Exposé 1 : La classification des courbes gauches

Daniel PERRIN

Les trois exposés qui suivent portent sur le schéma de Hilbert des courbes gauches. Ils sont centrés sur les techniques utilisant le module de Rao, dans la lignée des divers travaux que nous avons entrepris, Mireille Martin-Deschamps et moi-même, cf. [MDP 1–6], depuis une douzaine d'années, avec notamment l'utilisation de la notion de triade que nous avons introduite récemment en collaboration avec R. Hartshorne, cf. [HMDP 1,2,3].

1. La problématique.

Dans tout ce qui suit on travaille dans $\mathbf{P}^3_k$, espace projectif de dimension 3 sur un corps algébriquement clos.

a) Les courbes.

Les courbes dont nous parlons ici sont les courbes algébriques de $\mathbf{P}^3_k$, sans points isolés ni immergés, donc localement de Cohen-Macaulay.

Il faut peut-être justifier ce choix par rapport à d'autres possibles : celui des courbes lisses et connexes, ou, à l'opposé, celui des sous-schémas fermés de dimension 1, avec éventuellement des composantes ponctuelles. Le choix des courbes lisses et connexes est le plus courant dans la littérature. Cependant, l'idée que nous défendons c'est que, même si on s'intéresse essentiellement aux courbes lisses, il est nécessaire d'étudier des courbes plus générales. La raison de ce fait est à chercher dans la notion de liaison[1]. En effet, dans la classe de biliaison (c'est-à-dire de liaison paire) d'une courbe lisse les courbes les plus intéressantes sont les courbes minimales, i.e. celles de plus petit degré (car elles permettent de déterminer les autres, cf. [LR] ou [MDP1]). Or ces courbes sont souvent des courbes non connexes ou non réduites (mais toujours sans composantes ponctuelles). Par exemple les courbes minimales de la classe des courbes lisses et connexes de degré 4 et genre 0 (resp. de degré 7 et genre 3) sont des réunions disjointes de deux droites (resp. des structures doubles sur une droite). Réciproquement, toute courbe localement Cohen-Macaulay contient des courbes lisses dans sa classe de liaison (cf. [R]). En revanche, les classes de liaison des courbes lisses ne contiennent jamais de courbes avec des points (cf. [PS]), ce qui nous conduit à écarter ces courbes.

On trouvera de nombreuses applications de ce principe dans [MDP1,3,5] notamment.

[1] On rappelle que deux courbes C et Γ sont dites liées si leur union schématique est une intersection complète, cf. [PS]. Les intersections complètes sont en quelque sorte les objets triviaux de la théorie (Mario Fiorentini, plagiant Kronecker, dit que Dieu a donné les intersections complètes et que les géomètres ont fait le reste). Lorsque des courbes sont liées beaucoup de propriétés (concernant la cohomologie, les résolutions, le schéma de Hilbert, etc.) se transmettent de l'une à l'autre, cf. [PS], [R], [K], ce qui fait de la liaison un puissant moyen d'étude des courbes gauches.

b) Premiers invariants.

Classifier les courbes de $\mathbf{P}^3$, comme dans nombre de situations mathématiques, c'est d'abord repérer des invariants de ces courbes. Il y a, en premier lieu, leur degré d, mais, si le degré suffit, de notre point de vue, à classifier les courbes planes, on sait depuis longtemps qu'il n'en est plus de même dans l'espace. Halphen le note dans son célèbre travail de 1882 et il introduit un autre invariant h, le nombre de points doubles apparents. Il revient au même de considérer le genre (arithmétique) g en vertu de la formule : $g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2} - h$. En termes modernes, si $\mathcal{O}_C$ est le faisceau structural de la courbe C, se donner d et g revient, en vertu de Riemann-Roch, à se donner la caractéristique d'Euler de $\mathcal{O}_C$:

$$\chi\mathcal{O}_C(n) = h^0\mathcal{O}_C(n) - h^1\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g.$$

c) Les deux problèmes fondamentaux.

Une fois ces invariants repérés se posent deux problèmes (cf. [rH2] ou [MDP1]) :

Problème A : quels sont les invariants possibles.

Problème B : décrire la famille des courbes d'invariants donnés.

Le problème A est résolu dans le cas de d et g. Pour les courbes (sans points) on montre facilement qu'il y a des courbes de degré $d \geq 2$ et genre g (non planes) dès qu'on a l'inégalité[2] :

$$g \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2}.$$

Dans le cas des courbes lisses et connexes le problème est nettement plus délicat, mais résolu aussi (Halphen a annoncé le résultat dès 1882 mais il n'a été établi rigoureusement que par Gruson et Peskine en 1982 cf. [GP2]).

Le problème B est beaucoup plus difficile. C'est essentiellement le thème de nos exposés.

Il s'agit d'étudier la famille $H_{d,g}$ des courbes de degré d et genre g, voire sa variante $H^0_{d,g}$ dans le cas des courbes lisses connexes.

Depuis Grothendieck (cf. [FGA]) on sait munir $H_{d,g}$ d'une structure de schéma et on peut alors se poser les questions naturelles sur ce schéma : est-il irréductible ? connexe ? lisse ? réduit[3] ? quelle est sa dimension ?, etc.

La première remarque fondamentale, déjà faite par Halphen (cf. [H]), c'est qu'en général $H^0_{d,g}$ n'est pas irréductible[4]. Il formule alors le problème de la classification sous la forme suivante :

[2] Y compris pour g arbitrairement négatif : le genre peut-être négatif si les courbes sont non connexes (par exemple une réunion de d droites disjointes est de genre $-(d-1)$) ou non réduites (il y a des structures doubles sur une droite de tous genres < 0)

[3] Bien entendu cette question n'avait pas de sens pour les anciens. Pourtant on sait depuis Mumford [M] que $H^0_{d,g}$ peut ne pas être réduit. Dans le cas de $H_{d,g}$ c'est même presque toujours le cas, cf. [MDP5]

[4] On sait maintenant que le schéma $H_{d,g}$ n'est presque jamais irréductible, cf. [MDP5]. En revanche, $H^0_{d,g}$ est irréductible lorsque g est petit devant d, par exemple si on a $g \leq d-3$, cf. [Ein], mais lorsque

Énumérer, définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre, plus générale.

Autrement dit, la question est de décrire les composantes irréductibles du schéma de Hilbert.

Le premier exemple de réductibilité fourni par Halphen est le schéma $H^0_{9,10}$ qui a deux composantes : l'une, H_1, formée des intersections complètes 3×3 de deux surfaces cubiques, l'autre, H_2, formée des courbes de bidegré $6, 3$ sur une quadrique lisse. L'objectif, si on suit Halphen, est de trouver un moyen de distinguer ces composantes. Dans le cas de $H_{9,10}$, il introduit pour cela un nouvel invariant n qui, en termes modernes, n'est autre que $d - e - 3$, où e désigne l'indice de spécialité de C :

$$e = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}.$$

En effet, on a $e = 2$ (donc $n = 4$) sur H_1 et $e = 1$ (donc $n = 5$) sur H_2.

En fait, il y a un autre invariant, peut-être plus simple, qui sépare les composantes dans le cas présent, c'est le nombre s_0, plus petit degré d'une surface contenant C :

$$s_0 = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$$

où $\mathcal{J}_C$ est le faisceau d'idéaux qui définit C dans $\mathbf{P}^{3}$[5], puisque s_0 vaut 3 sur H_1 et 2 sur H_2.

2. La philosophie de [MDP].

a) La stratification.

L'idée naïve qui vient aussitôt, lorsqu'on examine l'exemple précédent, c'est d'utiliser, pour séparer les composantes de $H_{d,g}$, les dimensions $h^i\mathcal{J}_C(n)$ des espaces de cohomologie $H^i\mathcal{J}_C(n)$, pour $i = 0, 1, 2, 3$ et $n \in \mathbf{Z}$. (On notera que l'on a $h^1\mathcal{O}_C(n) = h^2\mathcal{J}_C(n)$.) Bien entendu, le h^3 étant trivial (égal au h^3 de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}$), on peut se limiter aux autres et même, par Riemann-Roch, à h^0 et h^1 (la caractéristique d'Euler de $\mathcal{J}_C(n)$ est déterminée par celle de $\mathcal{O}_C(n)$, donc par d et g). De plus, en vertu des théorèmes de finitude et de dualité de Serre, il s'avère que seul un nombre fini de ces dimensions sont pertinentes.

Il est commode d'introduire deux fonctions pour mesurer la cohomologie : le caractère de postulation $\gamma_C(n)$, dont la donnée est équivalente à celle des $h^0\mathcal{J}_C(n)$ (c'est essentiellement la différence troisième de $h^0\mathcal{J}_C(n)$, cf. [MDP1]) et la fonction de Rao ρ_C donnée par $\rho_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(n)$. Comme C n'a pas de composante ponctuelle cette fonction est à support fini.

---

g est grand la situation peut être très compliquée. Ainsi, Ellia, Hirschowitz et Mezzetti (cf. [EHM]) ont prouvé que le nombre de composantes de $H^0_{d,g}$ peut ne pas être une fonction polynomiale du degré, cf. aussi [G2].

[5] Comme il s'agit de classifier des courbes plongées, la donnée pertinente est celle des équations, donc du faisceau $\mathcal{J}_C$, plutôt que celle de $\mathcal{O}_C$.

On stratifie alors (cf. [MDP1]) le schéma $H_{d,g}$ par les sous-schémas $H_{\gamma,\rho}$ sur lesquels la cohomologie de $\mathcal{J}_C$ est (schématiquement) constante, espérant ainsi trouver les composantes de $H_{d,g}$ parmi les $H_{\gamma,\rho}$. Bien entendu, cet espoir repose sur l'idée que les schémas $H_{\gamma,\rho}$ sont irréductibles, idée qui était la nôtre au départ, mais dont on sait maintenant qu'elle est totalement fausse ! (cf. [MDP1,2], [BB] et c) ci-dessous).

b) Le module de Rao.

Quoique les $H_{\gamma,\rho}$ ne soient pas irréductibles, leur introduction constitue un progrès car il se trouve que l'on possède un excellent outil pour étudier ces schémas : le module de Rao, qui joue un rôle fondamental dans notre approche.

Ce module, introduit par Hartshorne et étudié par Rao, est le $R = k[X,Y,Z,T]$-module gradué de longueur finie $M_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^1\mathcal{J}_C(n)$. Les dimensions de ses composantes sont données par la fonction de Rao ρ_C, mais sa structure de module contient beaucoup plus d'informations sur la courbe C, notamment vis à vis de la liaison.

En effet, Rao a montré (cf. [R]) que deux courbes C et C' sont dans la même classe de liaison (resp. de biliaison) si et seulement si leurs modules de Rao sont isomorphes ou duaux, à décalage près (resp. isomorphes, à décalage près). Il a montré aussi que tout module de longueur finie, suffisamment décalé, est le module de Rao d'une courbe lisse. Plus précisément, on peut décrire explicitement la classe de biliaison associée à un module de longueur finie M, à partir d'une résolution de ce module. On commence par décrire les courbes minimales associées (grâce à la fonction q introduite dans [MDP1] IV), puis on montre que les autres s'obtiennent par des biliaisons "élémentaires" (propriété de Lazarsfeld-Rao, cf. [LR], [MDP1], [BBM]).

c) Les trois étapes.

Côté schéma de Hilbert, l'introduction du module de Rao conduit à considérer le morphisme $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$ qui à C associe M_C, morphisme à valeurs dans le champ des modules de dimensions données par ρ. Ce morphisme permet de scinder l'étude de $H_{d,g}$ en trois étapes :

1) l'étape du bas, c'est-à-dire l'étude de E_ρ,

2) l'étape intermédiaire, c'est-à-dire l'étude de Φ,

3) l'étape du haut qui consiste à recoller les informations obtenues sur les $H_{\gamma,\rho}$ pour passer à $H_{d,g}$.

L'étape intermédiaire est résolue dans [MDP1] : Φ est lisse et irréductible et on sait calculer la dimension de ses fibres, de sorte que tout résultat sur E_ρ (irréductibilité, lissité, etc.) se transporte en principe à $H_{\gamma,\rho}$.

Malheureusement, contrairement à nos espoirs initiaux, l'étape du bas s'est révélée très difficile. En particulier, E_ρ n'est presque jamais irréductible[6], cf. [MDP2] et [G1], et c'est ce qui fait que $H_{\gamma,\rho}$ ne l'est pas non plus. De plus, dans le cas où E_ρ n'est pas irréductible, la situation devient vite compliquée. On montre, par exemple, que $E_{2,2,2}$ (qui correspond à $\rho(0) = \rho(1) = \rho(2) = 2$) a déjà 6 composantes irréductibles, cf. [MDP2].

[6] Il est réductible dès que la largeur de ρ, c'est-à-dire le nombre de valeurs non nulles consécutives, est ≥ 4.

d) Un programme.

La philosophie expliquée ci-dessus permet en tous cas de reformuler de manière plus précise et plus ambitieuse le programme d'Halphen. Pour cela, appelons **composant** de $H_{d,g}$ toute composante irréductible d'un schéma $H_{\gamma,\rho} \subset H_{d,g}$. Le programme se formule alors ainsi, en parcourant successivement les trois étapes :

Énumérer les divers composants X de $H_{d,g}$. Cela signifie, en particulier, donner toutes les fonctions de Rao ρ et toutes les postulations γ possibles, mais aussi identifier les composantes des E_ρ correspondants et décrire les résolutions des courbes génériques de X.

Pour chaque X préciser s'il est réduit, voire lisse et calculer sa dimension.

Préciser pour chaque couple de composants X_0, X si X_0 est adhérent à X ou sous-adhérent à X, i.e. si $\overline{X}$ rencontre[7] *X_0. (Problème d'incidence)*

Déduire de l'étude précédente les composantes de $H_{d,g}$. Préciser si elles sont réduites, lisses, calculer leur dimension.

Étudier l'incidence des diverses composantes et la connexité[8] de $H_{d,g}$.

3. Mise en œuvre du programme.

a) Introduction.

Il y a deux problèmes distincts selon que l'on considère le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ de toutes les courbes ou le schéma $H^0_{d,g}$ des courbes lisses connexes, mais tous deux sont extrêmement difficiles, voire impossibles en général[9].

On va donc se contenter, dans un premier temps, de chercher tout ce qu'on est capable de dire sur $H_{d,g}$ (ou $H^0_{d,g}$) lorsque d est petit, voire lorsque g est grand[10].

Les premiers cas à regarder pour d petit sont $d = 2$ (connu, cf. [Mi] ou [MDP5]), $d = 3$, (Nollet a prouvé la connexité, cf. [N1], mais il reste des points à élucider), $d = 4$ (en genre < 0, en commençant par $H_{4,-1}$ qui n'est déjà pas si simple).

Le cas le plus intéressant en genre grand, le seul non trivial, à vrai dire, où l'on sache appliquer intégralement le programme ci-dessus est le cas $g = (d-3)(d-4)/2$ étudié par

[7] Cela signifie qu'il existe une famille de courbes paramétrée par un anneau de valuation discrète A, dont le point spécial C_0 est dans X_0 et dont le point générique C est dans X.

[8] Attention, la connexité de $H_{d,g}$ n'est pas du tout évidente. En particulier, elle ne résulte pas du théorème d'Hartshorne (cf. [rH1]) car dans cet énoncé les courbes peuvent avoir des composantes ponctuelles, cf. ci-dessous 2.d.2 ou exposé 3. Voir aussi [MDP5'] !

[9] Dans le cas des courbes lisses on a cependant des atouts supplémentaires qui permettent de simplifier l'étude, par exemple le théorème de Gruson-Lazarsfeld-Peskine, cf. [GLP], qui donne de plus petites bornes de e et de r_o, le fait que $\mathcal{O}_C(n)$ est non spécial dès que $nd > 2g-2$, etc. La situation devient très difficile dès le degré 7.

[10] Une autre approche est de s'intéresser à certains types particuliers de courbes, notamment à celles dont le module de Rao a une structure "simple". On peut ranger dans ce cadre les travaux sur les courbes ACM (arithmétiquement de Cohen-Macaulay : celles dont le module de Rao est nul, cf. [GP1], [E],...), sur les courbes dont les modules de Rao sont petits (concentrés en un seul degré ou deux degrés, cf. [BM1], [MDP2],...), ou qui ont un module de Rao "de Koszul" (i.e. quotient de R par une suite régulière, cf. [MDP1,3,5]), ou "de Buchsbaum" (i.e. à multiplications nulles, cf. [BM1,2,3]).

Samir Aït-Amrane dans sa thèse, cf. [AA]. Je vais décrire ici, dans le cas de $H_{6,3}$ qui est l'un des cas qu'il étudie, le processus d'application du programme.

b) L'étape du bas.

1) On commence par répertorier les fonctions de Rao possibles pour les courbes de $H_{d,g}$. On dispose pour cela de bornes pour la fonction de Rao (cf. [MDP4]) et on connaît bien les courbes qui atteignent ces bornes (courbes extrémales, cf. [MDP5]). Pour les courbes non extrémales on a des résultats complémentaires qui permettent de borner ρ_C (cf. [phE] et [N2]).

Dans le cas de $H_{6,3}$ on montre que les seules fonctions possibles sont les suivantes : la fonction extrémale, $\rho_1(n) = 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1$ en degrés de -2 à 6, la sous-extrémale $\rho_2(n) = 1, 1, 1$ en degrés $1, 2, 3$, deux fonctions ρ_3 et ρ_4 valant seulement 1 au point 1 (resp. 2) et enfin la fonction nulle ρ_5.

2) On répertorie ensuite[11] les structures de module de Rao possibles (i.e. correspondant à des courbes de $H_{d,g}$) pour une fonction ρ donnée et notamment leurs résolutions. On décrit ensuite les sous-champs des différents E_ρ correspondant à ces modules. On est typiquement là face à une question d'étape du bas, qui peut devenir très vite inextricable.

Dans le cas présent, comme les valeurs des fonctions de Rao non extrémales sont majorées par 1, on montre que tous les modules sont des modules de Koszul et ce cas est bien connu depuis [MDP1,3,5].

c) L'étape intermédiaire.

1) On répertorie les cohomologies possibles (γ, ρ) dans $H_{d,g}$. Comme on a les modules possibles et leurs résolutions, l'algorithme de [MDP1] IV permet de préciser les courbes minimales correspondantes et donc aussi les autres par biliaison. Dans le cas qui nous intéresse, les courbes correspondant à ρ_1 sont minimales, celles qui correspondent à ρ_2 s'obtiennent par biliaison $(2, +1)$ à partir de courbes $(4, 0)$ (réunion disjointes d'une cubique plane et d'une droite) et celles qui correspondent à ρ_3 et ρ_4 s'obtiennent par des biliaisons $(4, +1)$ et $(2, +2)$ à partir de la réunion disjointe de deux droites.

2) En utilisant le morphisme Φ, on décrit les schémas $H_{\gamma,\rho}$ et leurs composantes irréductibles, c'est-à-dire les composants de $H_{d,g}$. On calcule leurs dimensions avec les formules de [MDP1] IX. Dans le cas de $H_{6,3}$ il y a 5 cohomologies possibles, donc 5 sous-schémas $X_i = H_{\gamma_i,\rho_i}$, de dimensions respectives 30, 24, 23, 23, 24, tous irréductibles, donc 5 composants.

3) On peut décrire les courbes génériques des cinq composants X_i. La courbe générique de X_5 est une courbe ACM lisse bien connue, celle de X_4 est une courbe lisse de bidegré $(4, 2)$ sur une quadrique, celle de X_3 est réunion d'une quartique plane et de deux droites qui la coupent chacune transversalement en un point, celle de X_2 est réunion d'une quartique plane et d'une conique qui la coupe en un point, enfin la courbe générique de X_1 est réunion d'une quartique plane Γ et d'une structure double sur une droite du plan de Γ.

d) L'étape du haut.

[11] En réalité, les deux premières opérations sont très imbriquées.

Il s'agit d'élucider les incidences possibles (adhérence ou sous-adhérence) entre les composants. Il y a une condition nécessaire pour que X_0 soit sous-adhérent à X : en vertu du théorème de semi-continuité, si on a une famille dont le point spécial C_0 est dans X_0 et le point générique C dans X, on a $h^i \mathcal{J}_C(n) \leq h^i \mathcal{J}_{C_0}(n)$ pour tout i et tout n, ce qu'on écrira $(\gamma, \rho) \leq (\gamma_0, \rho_0)$. Dans le cas de $H_{6,3}$, les couples (i, j) des composants vérifiant cette condition sont les suivants : $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5)$, $(2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)$.

Il y a deux cas faciles : comme les composantes irréductibles de $H_{d,g}$ sont de dimension $\geq 4d$, on voit que X_3 et X_4 sont nécessairement dans l'adhérence de X_5.

Pour les autres, la réponse n'est pas du tout évidente [12] et elle nécessite un nouvel outil : la notion de triade, qui fera l'objet des exposés suivants.

Références bibliographiques.

[AA] S. Aït-Amrane, Sur le schéma de Hilbert $H_{d,(d-3)(d-4)/2}$, thèse Université Paris-Sud, en préparation.

[BB] E. Ballico et G. Bolondi, The variety of module structures, Arch. der Math. 54, 1990, p. 397-408.

[BBM] E. Ballico, G. Bolondi et J. Migliore, The Lazarsfeld-Rao problem for liaison classes of two-codimensional subschemes of $\mathbf{P}^n$, Amer. J. of Math., 113, 1991, p. 117-128.

[BM1] G. Bolondi et J. Migliore, Classification of maximal rank curves in the liaison class L_n, Math. Ann., 277, 1987, p. 585–603.

[BM2] G. Bolondi, J.-C. Migliore, Buchsbaum liaison classes, J. Algebra 123, No.2, 1989, p. 426-456.

[BM3] G. Bolondi et J.-C. Migliore, The Lazarsfeld-Rao problem for Buchsbaum curves, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 82, 1989, p. 67-97.

[Ein] L. Ein, Hilbert scheme of smooth space curves, Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 4, 1986, p.469–478.

[phE] Ph. Ellia, On the cohomology of projective space curves, Bolletino U.M.I. 7, 9-A, 1995, p.593-607.

[EHM] Ph. Ellia, A. Hirschowitz et E. Mezzetti, On the number of irreducible components of the Hilbert scheme of smooth space curves, Int. J. Math. 3, N^o 6, 1992, p. 799-807.

[E] G. Ellingsrud, Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbf{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay, Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 8, 1975, p.423–432.

[FGA] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique, Sém. Bourbaki, 1957-1962.

[G1] S. Ginouillac, Sur les schémas des modules de Rao de longueur 3, note CRAS, t. 320, Série I, 1995, p. 1327-1330.

[G2] S. Ginouillac, Sur le nombre de composantes du schéma de Hilbert des courbes ACM de $\mathbf{P}^3_k$, en préparation.

[GLP] L. Gruson, R. Lazarsfeld et C. Peskine, On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves, Invent. Math., 72, 1983, p. 491-506.

[12] S. Aït-Amrane a montré que toutes les incidences correspondant aux couples énumérés ci-dessus sont effectivement réalisées, cf. [AA].

[GP1] L. Gruson et C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif, Lecture Notes 687, Springer Verlag, 1977, p. 31–59.

[GP2] L. Gruson et C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 15, 1982, p. 401-418.

[H] G. Halphen, Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, Oeuvres complètes, t.3, p. 261-455.

[rH1] R. Hartshorne, On the connectedness of the Hilbert scheme, Publ. Math. IHES, 29, 1966,p. 6-48.

[rH2] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, 1977, Springer Verlag.

[rH3] R. Hartshorne, On the classification of algebraic space curves, in Vector bundles and differential equations, Proceedings, Nice, France, 1979, Progress in Math.7, Birkhäuser.

[Ho] Horrocks G., Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. London Math. Soc. 14, 1964, p. 689-713.

[HMDP1] R. Hartshorne, M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Un théorème de Rao pour les familles de courbes gauches. Prépublication du LMENS 97-15, mai 1997.

[HMDP2] R. Hartshorne, M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Construction de familles minimales de courbes gauches. Prépublication du LMENS 97-29, octobre 1997.

[HMDP3] R. Hartshorne, M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Triades et familles de courbes gauches. Prépublication du LMENS 97-33, décembre 1997.

[K] J.O. Kleppe, Deformations of graded algebras and of projective schemes of nests. Applications to the Hilbert scheme of curves in 3-space. Thesis, University of Oslo, 1980.

[LR] R. Lazarsfeld et A. P. Rao, Linkage of general curves of large degree, Lecture notes 997, Springer Verlag, 1983, p. 267-289.

[MDP 1] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur la classification des courbes gauches, Astérisque, Vol. 184-185, 1990.

[MDP 2] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Courbes gauches et Modules de Rao, J. reine angew. Math. 439, 1993, p. 103-145.

[MDP3] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Construction de courbes lisses : un théorème à la Bertini, rapport de recherche du LMENS 94-14, 1994.

[MDP4] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur les bornes du module de Rao, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 137, série I, 1993, p. 1159-1162.

[MDP5'] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Le schéma de Hilbert des courbes localement de Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais connexe ni réduit, Prépublication du LMENS 94-14, juillet 1994.

[MDP5] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Le schéma de Hilbert des courbes localement de Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 29, 1996, p. 757-785.

[MDP6] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Triades et déformations de sous-quotients, en préparation.

[Mi] J. Migliore, On linking double lines, Trans A.M.S., vol. 294, n^o 1, 1986, p. 177-185.

[MK] N. Mohan Kumar, Smooth degeneration of complete intersection curves in positive characteristic, Invent. Math. 104, 1991, p. 313-319.

[M] D. Mumford, Further pathologies in algebraic geometry, Amer. J. of Maths, 84, 1962, p. 642–648.

[N1] S. Nollet, The Hilbert scheme of degree three curves, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 30, 1997, p. 367-384.

[N2] S. Nollet, Subextremal curves, preprint 1996.

[PS] C. Peskine et L. Szpiro, Liaison des variétés algébriques, Invent. Math., 26, 1974, p. 271–302.

[R] A. P. Rao, Liaison among curves in $\mathbf{P}^3$, Invent. Math., 50, 1979, p. 205-217.