Randonnée sur les hauteurs

Daniel PERRIN

1 La propriété de minimum

Le résultat suivant est bien connu et la démonstration n'est pas très difficile si l'on admet que les propriétés de position sont celles que l'on peut lire sur la figure. Dans ce qui suit j'essaie de prouver vraiment ces propriétés, ce qui n'est pas si facile ...

1.1 Théorème. *Soit ABC un triangle, A', B', C' les pieds des hauteurs issues de A, B, C. Soient $D \in [BC]$, $E \in [CA]$ et $F \in [AB]$.*

1) Si l'angle en A est obtus ou droit le minimum du périmètre $EF+FD+DE$ est atteint lorsque $E = F = A$ et $D = A'$ et il vaut $2AA'$.

2) Si le triangle n'a pas d'angle obtus ou droit, le minimum du périmètre est atteint pour $D = A'$, $E = B'$, $F = C'$.

1.2 *Remarque.* Le cas où le triangle est rectangle en A relève à la fois des deux catégories [1].

1.1 Preuve du point 1)

1.1.1 Deux rappels

1.3 Lemme. *Soit $\mathscr{S} := [\widehat{AOB}]$ un secteur saillant et soit $C \in \mathscr{S}$ un point non situé sur les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. Alors le segment $[AB]$ coupe la demi-droite $[OC)$.*

Voir par exemple [Brochure, 2021] Annexe 1, lemme 1.11.

1.4 Lemme. *Soient $[\widehat{AOB}]$ un secteur saillant et C un point du plan, distinct de O. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Le point C est dans le secteur $[\widehat{AOB}]$.

2) On a la relation de Chasles géométrique : $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$.

3) Les points A et B sont de part et d'autre de (OC) et on a $\widehat{AOC} + \widehat{COB} < \pi$.

4) Le point C est dans le demi-plan limité par (OA) qui contient B et on a $\widehat{AOC} \leq AOB$.

Voir par exemple, sur ma page web, la prop. 2.5 de :
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Projet-geometrie/Coursangles.pdf`

1. Véritable prodi-i-ge.

1.1.2 Un lemme préliminaire de position

1.5 Lemme. *Soit ABC un triangle dont l'angle en A est obtus ou droit et soient $D \in [BC]$, $E \in [CA]$ et $F \in [AB]$. Soient D' et D'' les symétriques de D par rapport à (CA) et (AB). Alors la demi-droite δ opposée à $[AD')$ coupe soit le segment $[EF]$ (en P), soit le segment $[FD'']$ (en N).*

Démonstration. Comme $[AD')$ est la symétrique de $[AD)$ par la réflexion d'axe (AC), la demi-droite δ est la symétrique de $[AD)$ par la symétrie τ_Δ d'axe Δ perpendiculaire à (AC) en A. On choisit un point $M \in \Delta$ situé dans le demi-plan limité par (AC) qui contient B. Le point M est dans $[\widehat{BAC}]$ en vertu de 1.4.4.

Le point D variant entre B et C, δ varie entre les demi-droites $[Ax)$ et $[Ay)$ symétriques respectivement de $[AB)$ et $[AC)$ par rapport à Δ. On note que $[Ay)$ n'est autre que la demi-droite opposée à $[AC)$. Par ailleurs $[Ax)$ coupe $[BC]$ en I. En effet, comme l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus, on a, en notant $B_1 = \tau_\Delta(B)$, $\widehat{BAM} = \widehat{MAB_1} < \pi/2$, donc B_1 est dans le secteur $[\widehat{MAB}]$ en vertu de 1.4. Comme ce secteur est inclus dans $[\widehat{BAC}]$ la conclusion vient de 1.3. Le même lemme montre que la demi-droite $[Ax)$ coupe $[EF]$ en G.

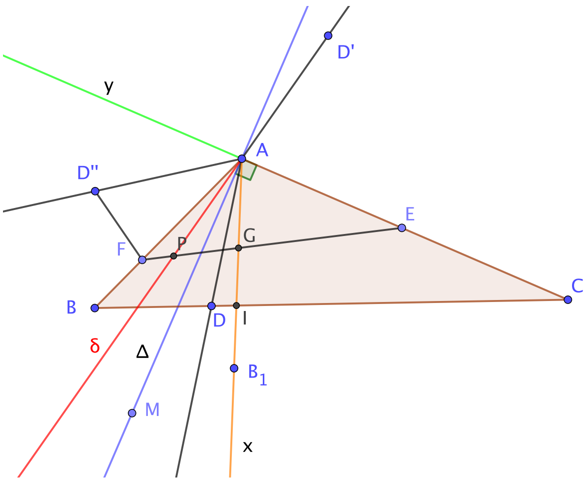

FIGURE 1 –

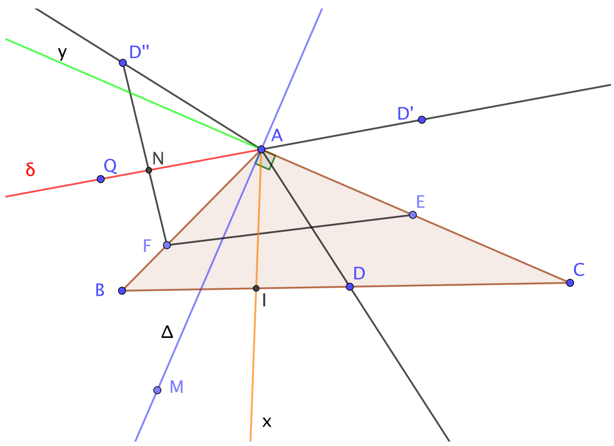

FIGURE 2 –

Supposons d'abord que D est dans $[BI]$. Le secteur $[\widehat{BAI}]$ est invariant par τ_Δ, donc δ est dans ce secteur, elle coupe $[FG]$ en P en vertu de 1.3 et ce point est aussi dans $[EF]$.

Supposons ensuite que D est dans $[IC]$. Par 1.3 il suffit de montrer que δ est contenue dans le secteur $[\widehat{D''AB}]$. On note $Q = \tau_\Delta(D)$, qui est sur δ.

Le point I est dans le secteur $[\widehat{MAD}]$ donc, par τ_Δ, B est dans le secteur $\widehat{MAQ}$, donc Q et M sont de part et d'autre de (AB). Comme D et D'' aussi, et que D et M sont du même côté de (AB), Q et D'' sont du même côté de (AB). De plus, on a $\widehat{BAQ} = \widehat{IAD}$ et $\widehat{BAD''} = \widehat{BAD}$ par les symétries et $\widehat{IAD} < \widehat{BAD}$, et donc $\widehat{BAQ} \leq \widehat{BAD''}$. On conclut par 1.4.

1.1.3 Preuve du point 1)

Notons que, comme $\widehat{A}$ est obtus, les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus, de sorte que A' est dans $[BC]$. Il suffit de montrer que, pour tout $D \in [BC]$, on a $DF + FE + ED \geq 2AD$ car AD est supérieur ou égal à AA'.

On reprend les notations de 1.5. Par les symétries on a $AD = AD' = AD''$, $DF = D''F$ et $DE = D'E$. On distingue les deux cas apparaissant dans 1.5.

1) Si la demi-droite opposée à $[AD')$ coupe $[EF]$ en P on a $AD = D''A \leq D''F + FP + PA$, donc $2AD = D''A + AD' \leq D''F + FP + PA + AD' = D''F + FP + PD' \leq D''F + FP + PE + ED' = DF + FE + ED$.

2) Si la demi-droite opposée à $[AD')$ coupe $[D''F]$ en N on a $AD = AD'' \leq D''N + NA$, d'où $2AD = AD'' + AD' \leq D''N + ND' \leq D''N + NF + FE + ED' = D''F + FE + ED' = DF + FE + ED$.

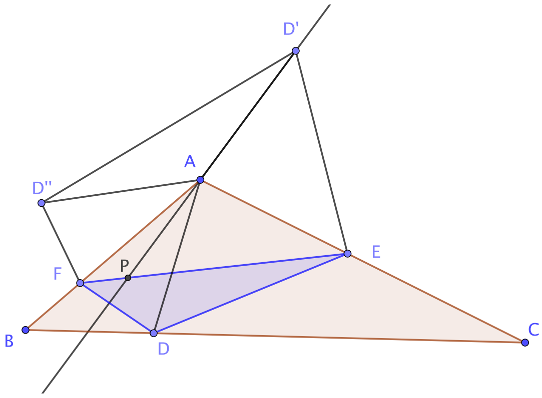

FIGURE 3 –

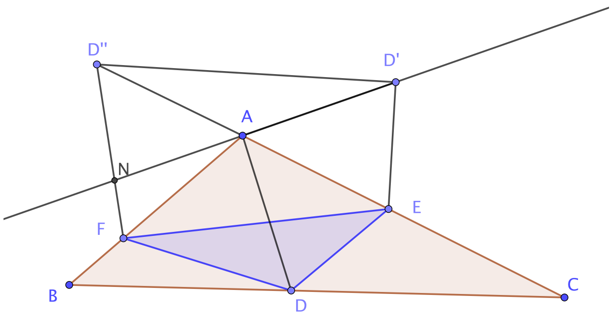

FIGURE 4 –

1.2 Preuve du point 2)

1.2.1 Un lemme

Le lemme suivant est le cœur de la solution (voir Figure 9) :

1.6 Lemme. *Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, $D \in [BC]$ un point quelconque fixé et soient $E \in [CA]$ et $F \in [AB]$ des points variables. Soient D' et D'' les symétriques de D par rapport à (CA) et (AB) respectivement et soient G, H les intersections de $(D'D'')$ avec (CA) et (AB). Les points G, H sont dans $[D'D'']$ et dans les segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Le minimum de $EF+FD+DE$ quand E, F varient est atteint lorsque l'on a $E = G$ et $F = H$ et il est égal à $D'D''$.*

Démonstration. La symétrie donne $AD = AD' = AD''$. Montrons les assertions de position. Une première vérification s'impose :

1.7 Lemme. *La droite $(D'D'')$ n'est parallèle ni à (AB) ni à (AC).*

Démonstration. Traitons le cas de (AB), voir Figure 5, l'autre est analogue. Si les droites étaient parallèles, on aurait les égalités d'angles de droites : $(AD'', D'D'') = (AD'', AB)$ (parallélisme), $(AD'', D'D'') = -(AD', D''D') = (D''D', AD')$ (symétrie du triangle isocèle $AD'D''$), $(AD'', AB) = (AB, AD)$ (symétrie par rapport à (AB)), d'où $(D''D', AD') = (AB, AD)$, ce qui s'écrit $(AB, AD') = (AB, AD)$ par le parallélisme et montre que D', A, D sont alignés. Mais cela implique, par symétrie, que (DA) est perpendiculaire à (AC) donc que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit ou obtus, ce qui est exclu.

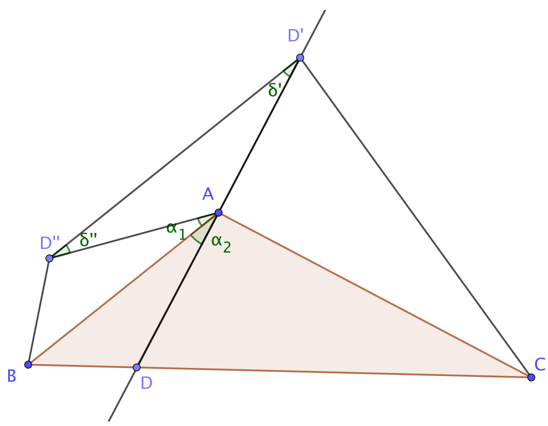

FIGURE 5 –

Montrons ensuite que D' et D'' sont de part et d'autre de (AB) (Figure 6), le raisonnement sera identique pour (AC) et cela montrera que les points G et H sont dans le segment $[D'D'']$. La symétrie par rapport à (AB) montre que D'' et D sont de part et d'autre de (AB) et les points D et C sont du même côté. Soit B' un point de la demi-droite opposée à $[AB)$, de sorte que B' et D' sont du même côté de (AC). Si D' était de l'autre côté de (AB) par rapport à

C, en vertu de 1.4, l'angle $\widehat{CAD'}$ serait plus grand que $\widehat{CAB'}$, supplémentaire de $\widehat{BAC}$ et il serait donc obtus. Or on a $\widehat{CAD'} = \widehat{CAD} < \widehat{CAB}$ et c'est absurde.

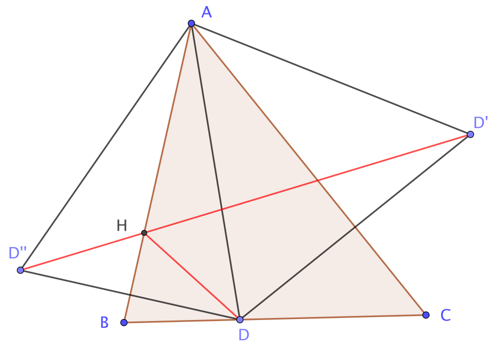

FIGURE 6 –

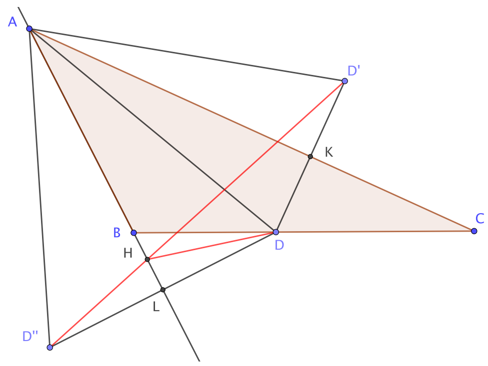

FIGURE 7 –

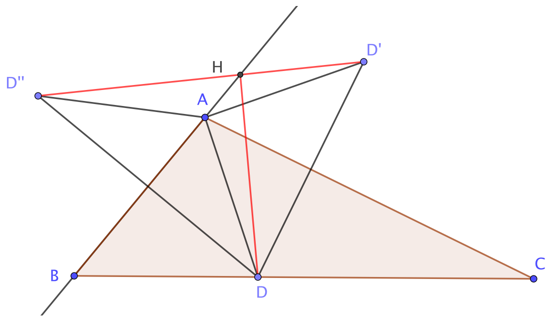

FIGURE 8 –

Le point suivant est de prouver que H est dans la demi-droite $[BA)$. On note d'abord que les milieux K et L de $[DD']$ et $[DD'']$ sont dans le demi-plan limité par (BC) qui contient A (sinon, si L par exemple était au-delà de B, l'angle $\widehat{DBL}$ serait aigu car le triangle DBL est rectangle en L, donc son supplémentaire $\widehat{ABC}$ serait obtus, ce qui est absurde, voir Figure 7). Mais alors, D' et D'' sont aussi dans ce demi-plan, donc aussi H, qui est dans $[D'D'']$, et on a le résultat.

Enfin, montrons que H est dans $[AB)$. Sinon, la somme des angles en A : $\widehat{D''AD'} + \widehat{D''AD} + \widehat{DAD'}$ est égale à 2π (utiliser H comme intermédiaire), de sorte que $\widehat{D''AD} + \widehat{DAD'}$ est $> \pi$. Mais cet angle est double de $\widehat{BAC}$ qui est donc obtus et c'est absurde (Figure 8).

La propriété de minimum est alors immédiate. En effet, on a alors, par symétrie, $EF + FD + DE = D''F + FE + ED'$ et cette quantité est supérieure ou égale à $D'D''$ parce qu'une ligne brisée est plus longue que la ligne droite. Mais on a $D'D'' = D''H + HG + GD' = DH + HG + GD$ par symétrie.

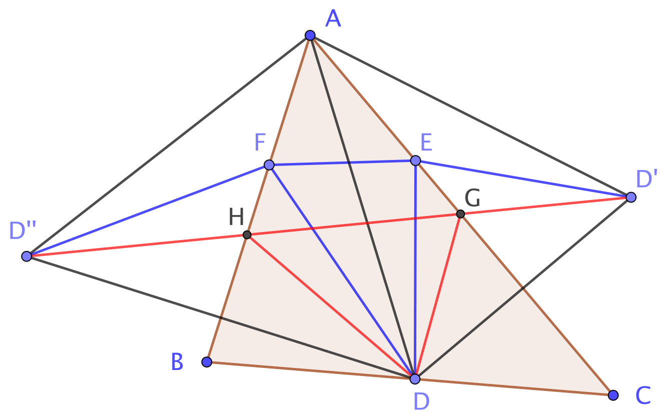

FIGURE 9 –

1.2.2 Le point 2 de 1.1

On reprend les notations de 1.6. La symétrie montre qu'on a $\widehat{D''AD'} = 2\widehat{BAC} := 2\alpha$, donc que cet angle est constant, quelles que soient les positions de D, E, F. On en déduit que la longueur $D'D''$ qui est, pour D fixé, le minimum du périmètre $EF + FD + DE$ est minimum lorsque AD est minimum (par exemple parce qu'on a, par Al-Kashi, $(D'D'')^2 = 2AD^2(1 - \cos 2\alpha)$ puisque $AD' = AD'' = AD$). Le minimum du périmètre de DEF est donc atteint lorsque $D = A'$, pied de la hauteur issue de A. Mais la même propriété vaut évidemment pour E et F, d'où le résultat. (On note que cela montre que si $D = A'$ les points G et H sont égaux à B' et C'.)

2 Le concours des hauteurs

Patrick Popescu-Pampu m'a soufflé ce qui me manquait. Il faut savoir que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes. Ensuite il n'y a qu'à montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont les bissectrices intérieures de $A'B'C'$. Mais ça, c'est très facile si l'on n'oublie pas le résultat qui suit.

2.1 Encore un théorème de minimum

2.1 Théorème. *Soient A, B deux points distincts et d une droite. Le minimum de $MA + MB$ lorsque M parcourt d est atteint en un point P défini comme suit :*

0) Si on a $d = (AB)$, tous les points de $[AB]$ réalisent le minimum.

1) Si A et B sont de part et d'autre de d (au sens large, mais non tous deux sur d), l'unique point P réalisant le minimum est le point d'intersection de d et de $[AB]$.

2) Si A et B sont du même côté de d, appelons A' et B' les symétriques de A et B par rapport à d. Alors, l'unique point P réalisant le minimum est l'intersection de $[A'B]$ et de d, ou encore de $[B'A]$ et de d. La droite d est alors bissectrice extérieure de $\widehat{APB}$.

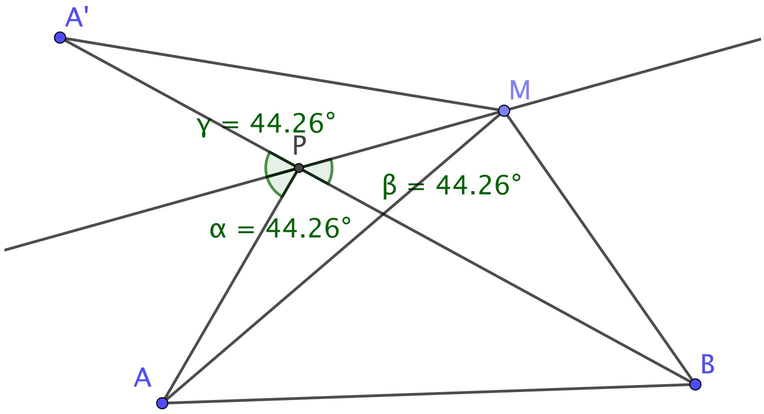

FIGURE 10 –

Démonstration. 0) Si P est un point de $[AB]$ on a $PA + PB = AB$, tandis que si P est extérieur au segment, disons du côté de A, on a $PA + PB = 2PA + AB > AB$.

1) Si P est le point d'intersection on a $PA + PB = AB \leq MA + MB$ par l'inégalité triangulaire.

2) Considérons par exemple A'. On a $MA + MB = MA' + MB$, mais maintenant A' et B sont de part et d'autre de d et on est ramené au point 1). L'assertion sur la bissectrice est claire par symétrie : d est axe de symétrie des demi-droites $[PA)$ et $[PA')$ et cette dernière est l'opposée de $[PB)$.

2.2 Le concours des hauteurs

2.2 Théorème. *Les hauteurs d'un triangle acutangle sont concourantes.*

Démonstration. Soient A', B', C' les pieds des hauteurs qui sont dans les segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On a vu que les points A', B', C' réalisent le minimum du périmètre pour des points D, E, F situés sur les côtés. Mais alors, il résulte de 2.1 que (BC) est bissectrice extérieure de $\widehat{B'A'C'}$ (les points B' et C' sont du même côté de (BC), celui de A), donc que (AA') en est bissectrice intérieure (par exemple par différence avec l'angle droit). On conclut grâce au concours des bissectrices intérieures.

Références

[Brochure, 2021] Groupe géométrie de l'IREM de Paris, *Brochure 100, Enseigner la géométrie au cycle 4.*
`http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IPS20011.pdf`