Projet géométrie "Deltaèdres"

Cyrielle Danel et Olivier Dupuy

16 janvier 2012

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux polyèdres convexes ayant pour faces des triangles équilatéraux, appelés deltaèdres. Le but est d'établir la liste de ces polyèdres et de montrer qu'il n'y en a que 8. Nous connaissons bien sûr les polyèdres réguliers comme le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre. Nous pouvons donc par exemple imaginer obtenir des deltaèdres par réunion de ces polyèdres. On peut aussi penser à utiliser des antiprismes et des prismes qui font apparaître des triangles équilatéraux.

Nous commençons par donner des relations sur le nombre de sommets de chaque ordre, le nombre de faces et d'arêtes. En utilisant la formule d'Euler pour tout polyèdre convexe, nous obtenons 19 caractères possibles. Parmi ces 19 caractères, 8 sont ceux des deltaèdres dont on fera une description précise. Les 11 autres caractères ne définissent pas de deltaèdre. L'objectif du mémoire est d'en montrer les raisons.

On étudiera pour ce faire les angles dièdres du tétraèdre et de l'octaèdre qui nous permettront d'invalider certains caractères donnant des faces losanges. Cela nous permettra aussi de résoudre certains problèmes de convexité notamment en ce qui concerne le caractère $(2, 2, 2)$.

Nous prouverons par la suite que si deux sommets d'ordre 3 sont reliés par une arête, nous n'obtenons qu'un seul deltaèdre : le tétraèdre. Puis nous montrerons qu'un sommet d'ordre 3 et un sommet d'ordre 4 reliés par une arête ne donne aussi qu'un seul deltaèdre : le diamant triangulaire. Enfin, un sommet d'ordre 3 et un sommet d'ordre 5 reliés par une arête ne donne aucun deltaèdre. Ces propositions démontrées nous permettront d'éliminer 10 caractères. Le dernier ne possédant pas de sommet d'ordre 3 sera traîté de manière indépendante.

1 Définitions et premières propriétés

Cette première partie a pour but de donner des propriétés combinatoires des deltaèdres nécessaires à leur étude.

1.1 Préliminaires

Définition 1.1. On appelle **deltaèdre** un polyèdre convexe dont les faces sont des triangles équilatéraux.

Notations. On note s, f, a les nombres de sommets, de faces et d'arêtes du deltaèdre.

Théorème 1.1 (Formule d'Euler). *Pour tout polyèdre convexe, a fortiori pour tout deltaèdre, on a* ***la formule d'Euler*** *suivante :*

$$s - f + a = 2$$

Définition 1.2. On appelle **ordre d'un sommet** A le nombre d'arêtes (ou de faces) aboutissant en A.

Proposition 1.2. *Pour les sommets d'un deltaèdre, les seuls ordres possibles sont* 3, 4 *et* 5.

Démonstration.

– Il est impossible d'avoir un sommet d'ordre 6. En effet, les angles d'un triangle équilatéral mesurant 60°, la somme des angles en un tel sommet serait $6 \times 60 = 360^\circ$. Ceci n'est pas possible d'après la règle de la somme des angles dans un polyèdre convexe.

– On ne peut pas avoir un sommet d'ordre 2, sinon le polyèdre ne serait pas borné.

Finalement, les seuls ordres possibles sont bien 3, 4 et 5.

□

1.2 Caractère d'un deltaèdre

Définition 1.3. On appelle **caractère** d'un deltaèdre le triplet (p, q, r) où p , q, r sont les nombres de sommets d'ordres respectifs 3, 4 et 5.

Proposition 1.3. *On a les relations suivantes :*

$$\begin{cases} s = p + q + r \\ a = \frac{3p+4q+5r}{2} \\ f = \frac{2}{3}a = \frac{3p+4q+5r}{3} \end{cases}$$

Démonstration.

– D'après la proposition 1.2, le nombre de sommets d'un deltaèdre est la somme de ses sommets d'ordre 3, 4 et 5.

$$s = p + q + r.$$

– En un sommet d'ordre 3 aboutissent 3 arêtes, en un sommet d'ordre 4 aboutissent 4 arêtes et en un sommet d'ordre 5 aboutissent 5 arêtes. Ce qui nous donne $3p + 4q + 5r$ arêtes. Cependant, une arête est reliée à deux sommets, on a donc compté deux fois chaque arête. On obtient alors :

$$a = \frac{3p + 4q + 5r}{2}.$$

– Chaque face a 3 arêtes donc on a 3 fois plus d'arêtes que de faces, mais chaque arête appartient à 2 faces. On obtient donc :

$$f = \frac{2}{3}a = \frac{3p + 4q + 5r}{3}.$$

□

Proposition 1.4. *Les nombres p, q, et r vérifient la relation :*

$$3p + 2q + r = 12.$$

Démonstration. On écrit la formule d'Euler donnée en 1.1 en remplaçant s, f et a par les expressions obtenues en 1.3 :

$$p + q + r - \frac{3p + 4q + 5r}{3} + \frac{3p + 4q + 5r}{2} = 2.$$

Soit :

$$3p + 2q + r = 12.$$

□

2 Caractères possibles et descriptions des deltaèdres

Cette deuxième partie donne les caractères solutions de l'équation de la proposition 1.4. Certains ne correspondent à aucun polyèdre. On donnera une description des autres.

2.1 Caractères effectifs et virtuels

Définition 2.1. On appelle caractère **effectif** (en bleu dans le tableau 12) le caractère d'un deltaèdre qu'on peut construire. Sinon on dira que le caractère est **virtuel** (en rouge dans le tableau 12).

On peut dès à présent trouver tous les caractères possibles pour les deltaèdres. En effet, l'équation entière $3p + 2q + r = 12$ admet exactement 19 solutions que nous avons regroupées dans le tableau ci-dessous, triées dans le sens croissant de s et décroissant de p. Dans la suite, nous montrerons que les 11 caractères en rouge sont bien virtuels.

Nom	p	q	r	f	a	s	Réunion de deux pyramides	Caractère virtuel ou effectif d'après ...
Tétraèdre ***régulier***	4	0	0	4	6	4		Figure 2
	3	1	1	6	9	5		Proposition 5.1
Diamant triangulaire	2	3	0	6	9	5	X	Figure 3
	3	0	3	8	12	6		Proposition 5.2
	2	2	2	8	12	6		Proposition 4.3
	1	4	1	8	12	6		Proposition 5.2
Octaèdre ***régulier***	0	6	0	8	12	6	X	Figure 4
	2	1	4	10	15	7		Proposition 5.2
	1	3	3	10	15	7		Lemme 4
Diamant pentagonal	0	5	2	10	15	7	X	Figure 5
	2	0	6	12	18	8		Lemme 4
	1	2	5	12	18	8		Proposition 5.3
Disphénoïde adouci	0	4	4	12	18	8		Figure 6
	1	1	7	14	21	9		Proposition 5.3
Prisme triangulaire triaugmenté	0	3	6	14	21	9		Figure 8
	1	0	9	16	24	10		Proposition 5.3
Diamant carré gyroallongé	0	2	8	16	24	10		Figure 10
	0	1	10	18	27	11		Proposition 5.4
Icosaèdre ***régulier***	0	0	12	20	30	12		Figure 12

FIGURE 1 – Tableau de tous les caractères

2.2 Description des deltaèdres

Nous allons décrire un deltaèdre correspondant à chaque caractère effectif. Nous essaierons dans la mesure du possible de montrer qu'il existe une seule construction pour chaque caractère.

- Le tétraèdre régulier $(4, 0, 0)$ est une pyramide à base triangulaire. Nous verrons en 4.1 que c'est le seul [1] à admettre ce caractère.

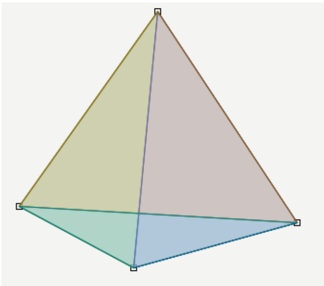

Figure 2 – Tétraèdre régulier

- Le diamant triangulaire $(2, 3, 0)$ est la réunion de deux tétraèdres (joints par une face). Nous montrerons dans la proposition 4.2 que c'est le seul avec des arguments combinatoires.

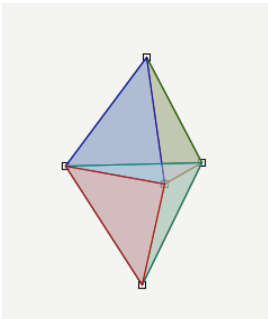

Figure 3 – Diamant triangulaire

- L'octaèdre régulier $(0, 6, 0)$ est la réunion de deux pyramides à base carrée (jointes par leurs bases).

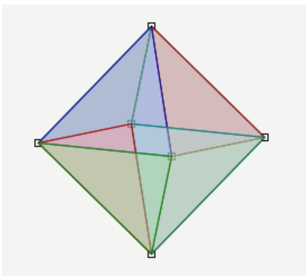

Figure 4 – Octaèdre régulier

1. On parlera toujours d'unicité des relations d'adjacence

– Le diamant pentagonal $(0, 5, 2)$ est la réunion de deux pyramides à bases pentagonales (jointes par leurs bases).

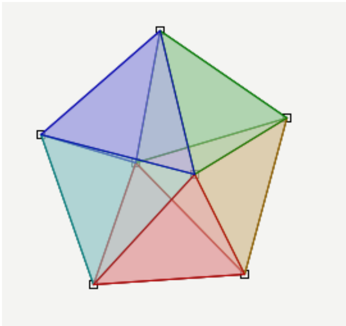

FIGURE 5 – Diamant pentagonal

– Le disphénoïde adouci $(0, 4, 4)$ est la ceinture déformée d'un antiprisme à base carrée, dont les deux bases sont constituées de deux triangles équilatéraux.

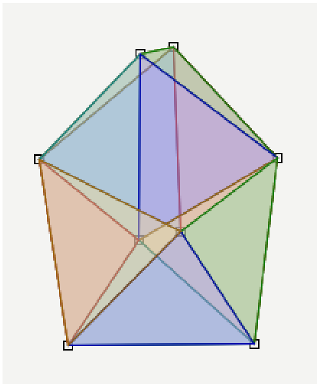

FIGURE 6 – Disphénoïde adouci

– Le prisme triangulaire triaugmenté $(0, 3, 6)$ est la réunion d'un prisme à bases triangulaires et de 3 pyramides à bases carrées (joints par les faces carrées du prisme et les bases des pyramides).

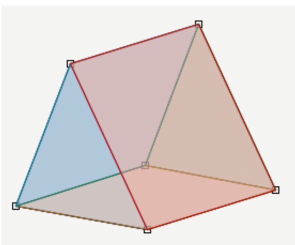

FIGURE 7 – Prisme à bases triangulaires

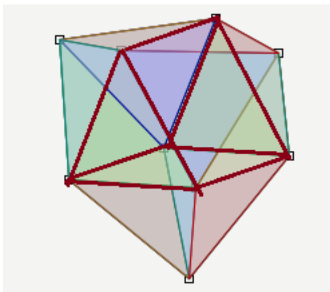

FIGURE 8 – Prisme triangulaire triaugmenté

– Le diamant carré gyroallongé $(0, 2, 8)$ est la réunion d'un antiprisme à base carrée et de deux pyramides à bases carrées (joints par leurs bases).

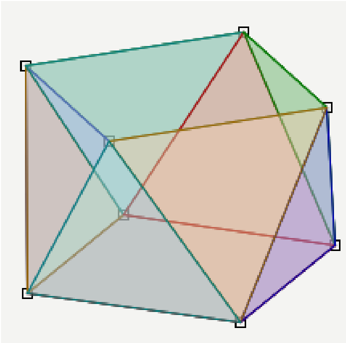

Figure 9 – Antiprisme à base carrée

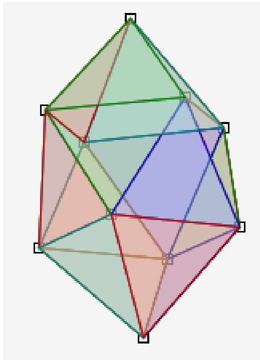

Figure 10 – Diamant carré gyroallongé

– L'icosaèdre régulier $(0, 0, 12)$ est la réunion d'un antiprisme à base pentagonale et de deux pyramides à bases pentagonales (joints par leurs bases).

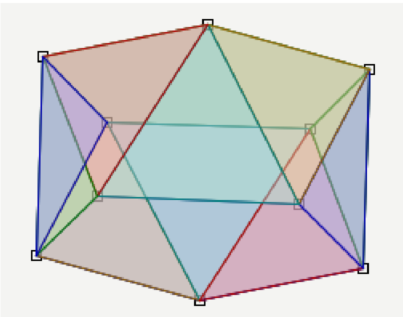

Figure 11 – Antiprisme à base pentagonale

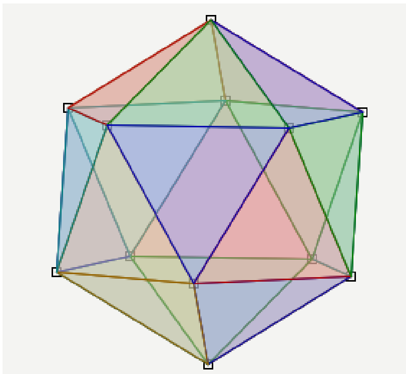

Figure 12 – Icosaèdre régulier

3 Angles dièdres

Le but de cette section est de se donner des outils pour tester la convexité des polyèdres construits. En effet, on s'aperçoit lorsqu'on essaie de construire un polyèdre avec un caractère donné qu'on obtient parfois un polyèdre avec une face qui n'est pas un triangle équilatéral (par exemple, un losange) ou un polyèdre non convexe.

3.1 Angle dièdre et rappels sur la convexité

Notations.
- On notera $A, B, C...J$ les sommets d'ordre 5, K, L, M, N, O les sommets d'ordre 4, X, Y, Z les sommets d'ordre 3 et $P, Q...W$ les sommets d'ordre indéterminé.
- Dans toute la suite, on notera c la longueur des arêtes.

Définition 3.1. Soit un polyèdre. On considère deux faces adjacentes et leur arête commune. Soient $\mathcal{D}$ la droite portant cette arête et $\mathcal{P}$ un plan perpendiculaire à cette droite. Notons $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ les plans contenant les deux faces adjacentes, et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les intersections de $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ avec $\mathcal{P}$.

On appelle **angle dièdre d'un polyèdre entre deux faces adjacentes**, l'angle du secteur intersection de $\mathcal{P}$ et du polyèdre, limité par les demi-droites intersections du plan $\mathcal{P}$ avec les faces adjacentes. Il est indépendant du plan $\mathcal{P}$ choisi.

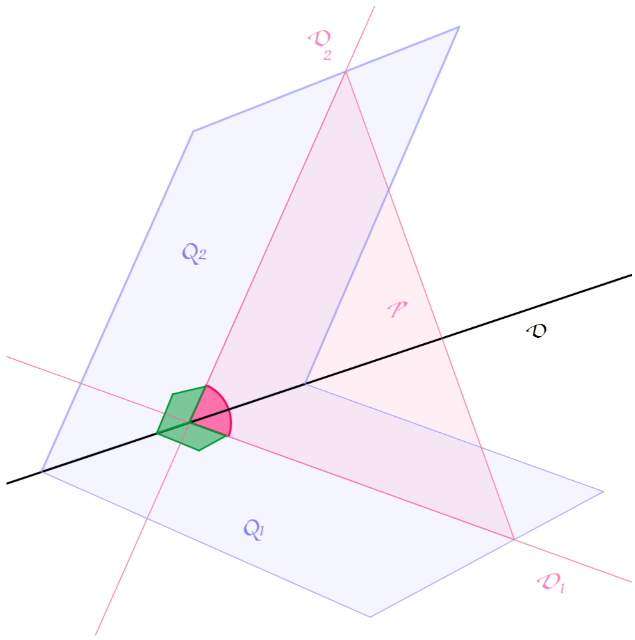

FIGURE 13 – Angle dièdre entre $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$

Définition 3.2. Un polyèdre $\mathcal{P}$ est dit convexe si, lorsqu'il contient deux points A et B, il contient tout le segment $[AB]$.

Proposition 3.1. *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre.*
Le polyèdre $\mathcal{P}$ est convexe si et seulement si pour toute face de $\mathcal{P}$, toutes ses autres faces sont dans un seul des demi-espaces délimités par le plan contenant cette face.

Proposition 3.2. *Toutes les mesures des angles dièdres entre des faces adjacentes d'un polyèdre convexe sont strictement inférieures à 180°.*

3.2 Angles dièdres du tétraèdre

Propriété 3.3. *L'angle dièdre d'un tétraèdre a pour mesure :* $\alpha = \mathrm{Arccos}(\frac{1}{3}) \simeq 70,53\ ^\circ$

Démonstration. La figure 14 illustre la démonstration de cette propriété.

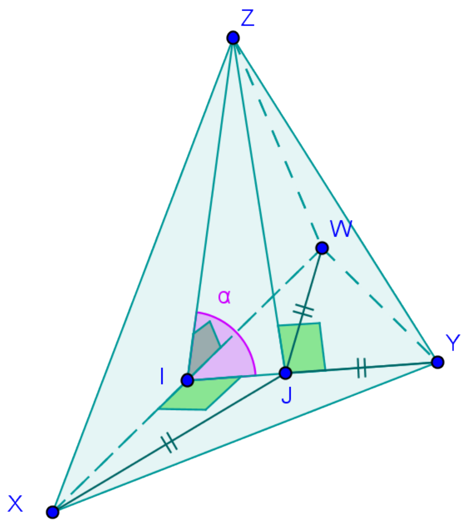

FIGURE 14 – Angle dièdre du tétraèdre

Les triangles XWZ, ZWY, YZX et XYZ sont équilatéraux de même côté. On note I le pied des hauteurs issues de Z et Y dans les triangles respectifs XWZ et XYW. Les droites (YI) et (ZI) sont donc perpendiculaires à la droite (XW). Par conséquent, le plan (YIZ) est un plan perpendiculaire à la droite (XW).

Nous nous intéressons à l'angle $\widehat{YIZ}$, qui est l'angle dièdre des faces XWZ et XWY.

Soit J le projeté orthogonal de Z sur le plan (XYW). D'après le premier cas d'isométrie pour des triangles rectangles, les triangles JWZ, JYZ et JXZ sont isométriques.
En effet :
- Les triangles JWZ, JYZ et JXZ ont pour côté commun le segment $[JZ]$.
- Les segments $[WZ]$, $[YZ]$ et $[XZ]$ sont des arêtes du tétraèdre donc de même longueur.
- Les triangles JWZ, JYZ et JXZ sont rectangles en J.

Donc les longueurs WJ, YJ et XJ sont égales et J est le centre du triangle XWY.
Par conséquent IJ vaut $\frac{1}{3}YI$. De plus ZI et YI sont égaux, car XWY et XWZ sont isométriques.
On peut ainsi calculer $\cos(\alpha)$ dans le triangle IJZ rectangle en J et on obtient :

$$\cos(\alpha) = \frac{IJ}{IZ} = \frac{1}{3}.$$

D'où le résultat. □

3.3 Angle dièdre de l'octaèdre

Propriété 3.4. *L'angle dièdre d'un octaèdre a pour mesure :* $\gamma = 2\beta = 2\mathrm{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \simeq 109,47\ ^\circ$.

Démonstration. La figure 15 correspond à une moitié d'octaèdre. Il s'agit d'un octaèdre tronqué par le plan (LON) ce qui donne une pyramide à base carré.

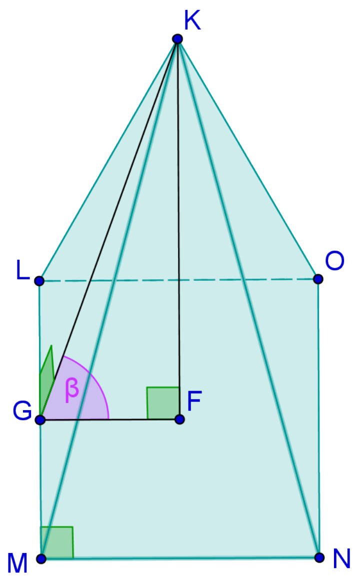

FIGURE 15 – Angle dièdre de l'octaèdre

Soit F le projeté orthogonal de E sur le plan (LON). D'après le premier cas d'isométrie pour des triangles rectangles, les triangles LFK, MFK, NFK et OFK sont isométriques.
En effet :
- Les triangles LFK, MFK, NFK et OFK ont pour côté commun le segment $[KF]$.
- Les segments $[KL]$, $[KM]$, $[KN]$ et $[KO]$ sont des arêtes de l'octaèdre donc de même longueur.
- Les triangles LFK, MFK, NFK et OFK sont rectangles en F.

Donc LF, MF, NF et OF sont égaux et F est le centre du carré $LMNO$.

Soit G le projeté orthogonal de K sur le segment $[LM]$. Le point G est donc le milieu du segment $[LM]$ car le triangle KLM est équilatéral, et les droites (KG) et (LM) sont perpendiculaires.

Les droites (FG) et (MN) sont parallèles d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle LMN. Or le parallélogramme $LMNO$ est un carré, donc la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (LM). Donc la droite (FG) est aussi perpendiculaire à la droite (LM). Le plan (KFG) est donc un plan perpendiculaire à la droite (LM).

Nous nous intéressons à l'angle dièdre $\widehat{FGK}$.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle KGL rectangle en G : KL vaut c et LG vaut $\frac{c}{2}$. Donc KG vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. Le point F étant le centre du carré $LMNO$, $FG = \frac{c}{2}$.
Dans le triangle KFG rectangle en F, on a :

$$\cos(\beta) = \frac{FG}{KG} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}c} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On a donc :

$$\beta = \text{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Ainsi l'angle dièdre d'un octaèdre est : $\gamma = 2\beta = 2\text{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \simeq 109,47^\circ$ □

Corollaire 3.5. *Il s'agit aussi de l'angle dièdre entre les faces triangulaires de la pyramide régulière à base carrée. En effet, l'octaèdre est un polyèdre régulier, donc tous ses angles dièdres sont égaux.*

4 Les voisins d'un sommet d'ordre 3

Nous représentons nos essais de constructions et nos illustration de démonstration par des schémas qui ne sont pas des patrons. Les schémas ne respectent que les relations d'adjacence entre faces, sommets et arêtes.

4.1 Sommet d'ordre 3 voisin d'un sommet d'ordre 3

Proposition 4.1. *Dans un deltaèdre, si deux sommets d'ordre* 3 *sont reliés par une arête, alors ce deltaèdre est le tétraèdre régulier de caractère* $(4, 0, 0)$.

Démonstration. Cette démonstration ne se repose que sur des arguments de nature combinatoire.

Soient X et Y deux sommets d'ordre 3 joints par une arête. Notons S et T les deux autres voisins de X. Montrons que les sommets S et T sont d'ordre 3.

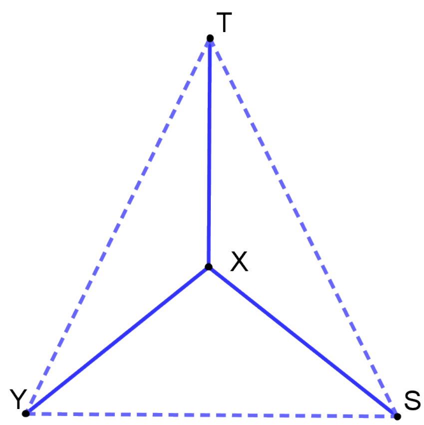

FIGURE 16 – Schéma du tétraèdre régulier.

Le sommet X étant d'ordre 3, il est sommet de trois faces différentes qui sont XYT, XTS et XSY. Le sommet Y étant d'ordre 3, il n'est relié qu'à trois arêtes qui sont $[YX]$, $[YS]$ et $[YT]$. De plus, il est sommet de trois faces dont XYT et XSY. La troisième face a pour arêtes $[YS]$, $[YT]$, et $[ST]$, c'est donc YST.

Les sommets S et T sont donc aussi sommets de seulement trois faces, ils sont donc d'ordre 3, et $XYST$ est un tétraèdre régulier. □

4.2 Sommet d'ordre 4 voisin d'un sommet d'ordre 3

Proposition 4.2. *Dans un deltaèdre, si un sommet d'ordre* 3 *et un sommet d'ordre* 4 *sont reliés par une arête, alors ce deltaèdre a pour caractère* $(2, 2, 2)$ *ou* $(2, 3, 0)$.

Démonstration. Cette démonstration ne se repose que sur des arguments de nature combinatoire.

On a représenté sur la figure 17 le tétraèdre $XKAB$, où les sommets X et K sont respectivement d'ordre 3 et 4. On trace les deuxièmes faces d'arêtes $[KA]$ et $[KB]$. On note respectivement

L et C les troisièmes sommets de ces faces. Le sommet K étant d'ordre 4, les sommets L et C sont confondus.

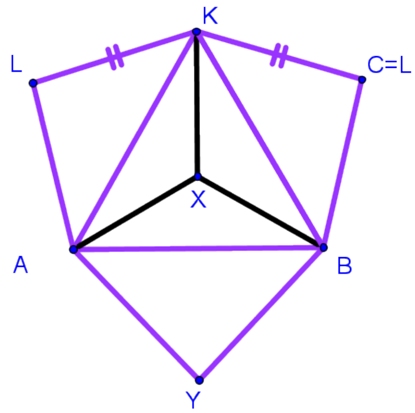

FIGURE 17 – Schéma d'essai de construction d'un deltaèdre dont un sommet d'ordre 3 et un sommet d'ordre 4 sont reliés par une arête.

Dans la figure 17, on trace la deuxième face d'arête $[AB]$ et on note Y son troisième sommet.

Alors deux cas sont possibles :

1. Soit B est d'ordre 4 (dans ce cas, on montrera que A est nécessairement d'ordre 4).
2. Soit B est d'ordre 5 (dans ce cas, on montrera que A est nécessairement d'ordre 5).

Cas 1 : Le sommet B est d'ordre 4

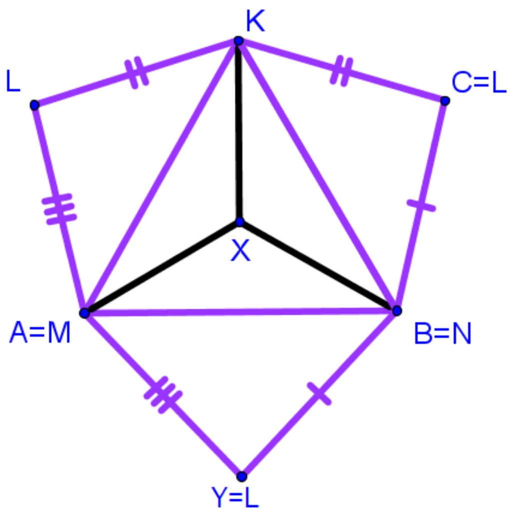

FIGURE 18 – Schéma du deltaèdre de caractère $(2, 3, 0)$.

Comme le sommet B est d'ordre 4, on le renomme N et les sommets Y et L sont confondus. Le sommet A est donc d'ordre 4 et on le renomme M.

On obtient ainsi le deltaèdre de caractère $(2, 3, 0)$, appelé diamant triangulaire.

Cas 2 : Le sommet B est d'ordre 5

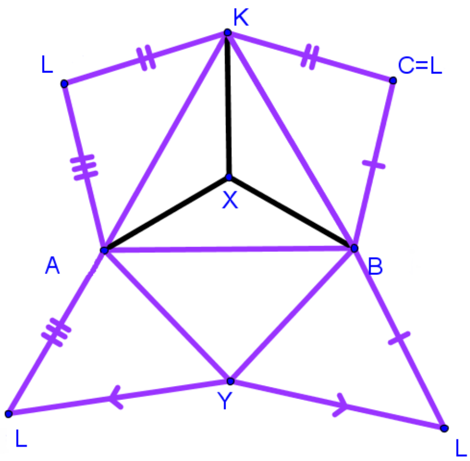

FIGURE 19 – Schéma d'essai de construction d'un deltaèdre dont un sommet d'ordre 3 et un sommet d'ordre 4 sont reliés par une arête.

Dans ce cas, Y est distinct de L. Donc A est aussi d'ordre 5. La cinquième face de sommet A (respectivement B) est LAY (respectivement LBY), donc Y est d'ordre 3.

Le polyèdre schématisé sur la figure a pour caractère $(2, 2, 2)$. □

Remarque. D'après la figure 19, le polyèdre $XABK$ est un tétraèdre. De même, le polyèdre $YABL$ est un tétraèdre. Cela implique que le polyèdre $KABL$ est aussi un tétraèdre.

Définition 4.1. Le polyèdre schématisé sur la figure 19, ayant pour caractère $(2, 2, 2)$, sera appelé le tri-tétraèdre.

Proposition 4.3. *Le tri-tétraèdre n'est pas convexe.*

Démonstration. Cette démonstration repose sur des arguments de nature métrique. Le schéma du tri-tétraèdre est la figure 19. Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 4.2 que le tri-tétraèdre étaient formé de trois tétraèdres, $XABK$, $YABL$ et $KABL$.

D'après la proposition 3.3, l'angle dièdre α d'un tétraèdre régulier mesure $\mathrm{Arccos}(\frac{1}{3})$. D'après la description faite du polyèdre de caractère $(2, 2, 2)$, et d'après la figure 19, l'angle dièdre des faces ABX et ABY mesure :

$$3\mathrm{Arccos}(\frac{1}{3}) \simeq 211.59^{\circ}.$$

Or 211.59° est supérieur à 180°.

D'après la propriété 3.2, le polyèdre de caractère $(2, 2, 2)$ n'est donc pas convexe. Par conséquent, ce n'est pas un deltaèdre. □

Corollaire 4.4. *Dans un deltaèdre, si un sommet d'ordre* 3 *et un sommet d'ordre* 4 *sont reliés par une arête, alors ce deltaèdre est le diamant triangulaire de caractère* $(2, 3, 0)$.

Démonstration. D'après la proposition 4.2, les seuls caractères pouvant être obtenus sont $(2, 2, 2)$ et $(2, 3, 0)$. Or, d'après la proposition 4.3, le caractère $(2, 2, 2)$ ne définit pas un deltaèdre.

Le seul deltaèdre que l'on peut obtenir en joignant un sommet d'ordre 3 et un sommet d'ordre 4 est donc le diamant triangulaire de caractère $(2, 3, 0)$. □

4.3 Sommet d'ordre 5 voisin d'un sommet d'ordre 3

Proposition 4.5. *Dans un deltaèdre un sommet d'ordre* 3 *et un sommet d'ordre* 5 *ne sont pas reliés par une arête.*

Démonstration. Cette démonstration se divise en quatre lemmes.

Lemme 1. *Si, dans un deltaèdre $\mathcal{D}$, un sommet X d'ordre* 3 *est relié à un sommet A d'ordre* 5*, alors $\mathcal{D}$ a au moins* 7 *sommets et vérifie :*

$$p \geqslant 1 \text{ et } q + r \geqslant 6.$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme s'effectue avec des arguments de combinatoire.

Dans la figure 20, on a représenté le tétraèdre régulier $XABC$. On impose au sommet A d'être d'ordre 5. Par conséquent, les sommets B et C sont aussi d'ordre 5. En effet, ils ne peuvent pas être d'ordre 3 d'après la proposition 4.1, sinon on aurait un tétraèdre et le sommet A serait d'ordre 3; et ils ne peuvent pas être d'ordre 4 non plus d'après la proposition 4.2, sinon on aurait un diamant triangulaire et le sommet A serait d'ordre 4.

On construit donc les deuxièmes faces d'arêtes $[BC]$, $[AB]$, et $[AC]$ ayant respectivement pour troisième sommet P, Q et R. Les points P, Q et R sont distincts, sinon A, B et C seraient d'ordre 4.

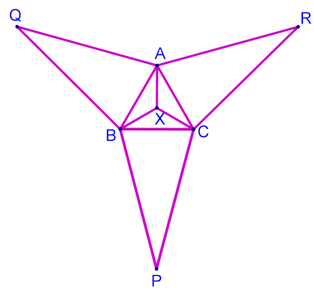

FIGURE 20 – Démonstration du lemme 1

Dans la figure 21, les sommets A, B et C étant d'ordre 5, on construit les faces de AQR, BPQ et CRP.

De plus, comme P, Q et R sont distincts, ils sont au moins d'ordre 4.

La figure 21 présente 7 sommets dont X est le seul d'ordre 3. Cette figure n'étant pas terminée, on obtient bien :

$$p \geqslant 1 \text{ et } q + r \geqslant 6.$$

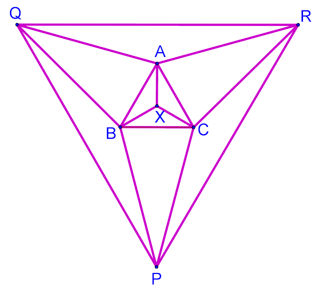

FIGURE 21 – Démonstration du lemme 1

□

Lemme 2. *Si, dans un deltaèdre $\mathcal{D}$, un sommet X d'ordre 3 est relié à un sommet A d'ordre 5, alors les seuls caractères possibles pour $\mathcal{D}$ sont $(1,3,3)$ et $(2,0,6)$.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme s'effectue avec des arguments de nature combinatoire.

On a vu dans le lemme 1 que P, Q et R sont au moins d'ordre 4.

Alors deux cas sont possibles :

1. Soit le sommet P est d'ordre 4 (dans ce cas, les sommets Q et R seront nécessairement d'ordre 4)
2. Soit le sommet P est d'ordre 5 (dans ce cas, les sommets Q et R seront nécessairement d'ordre 5)

Cas 1 : Le sommet P est d'ordre 4

Le sommet P étant d'ordre 4, on construit la deuxième face d'arête $[PQ]$. L'arête $[PR]$ est nécessairement une arête de cette face car P est d'ordre 4. Donc la troisième arête de cette face est l'arête $[QR]$. Par conséquent les sommets Q et R sont d'ordre 4. Le deltaèdre ainsi formé, représenté sur la figure 22, est fermé et a pour caractère $(1,3,3)$.

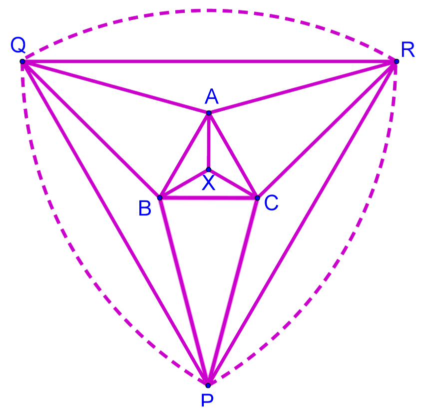

FIGURE 22 – Schéma du polyèdre $(1,3,3)$.

Cas 2 : Le sommet P est d'ordre 5

On construit alors les deuxièmes faces de base $[PQ]$ et d'arête $[PR]$ de troisième sommet respectifs Y et Z. Or P étant d'ordre 5 les sommets Y et Z sont confondus.
Les sommets Q et R sont d'ordre au moins 5, donc d'ordre 5 d'après la proposition 1.2. On construit donc la deuxième face d'arête $[QR]$. Son troisième sommet est Y, sinon Q et R seraient d'ordre 6. Par conséquent, le sommet Y est d'ordre 3. Le polyèdre ainsi formé, représenté sur la figure 23, est fermé et a pour caractère $(2,0,6)$.

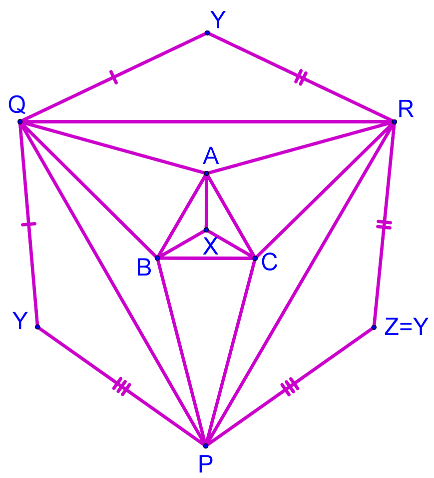

FIGURE 23 – Schéma du polyèdre $(2,0,6)$.

□

Lemme 3. *Pour les polyèdres de caractères* $(1, 3, 3)$ *et* $(2, 0, 6)$*, le polyèdre* $ABCPQR$ *est un octaèdre régulier.*

Démonstration. Nous allons montrer que le polyèdre $ABCPQR$ est convexe. Alors comme son caractère est $(0, 6, 0)$ ce sera un octaèdre régulier. Supposons que les polyèdres de caractères $(1, 3, 3)$ et $(2, 0, 6)$ sont des deltaèdres.

Considérons le polyèdre de caractère $(1, 3, 3)$. Comme on a supposé que c'est un deltaèdre, il est convexe. D'après la définition 3.1, il est contenu dans un seul des demi-espaces délimités par les plans de chaque face. Considérons le polyèdre $ABCPQR$. Toutes ses faces sont donc dans un même demi-espace délimité par chaque face sauf éventuellement la face ABC.

Supposons que le polyèdre $ABCPQR$ ne soit pas convexe. Cela signifie que, par exemple, le sommet P n'est pas dans le même demi-espace que les sommets Q et R. Par convexité du polyèdre de caractère $(1, 3, 3)$, le sommet P est donc dans le tétraèdre $XABC$. Or les arêtes $[AP]$ et $[BP]$ sont de même longueur égale à c, donc P est confondu avec X ou C, ce qui est absurde car ces sommets sont distincts.

Le polyèdre $ABCPQR$ est donc un octaèdre régulier pour le polyèdre de caractère $(1, 3, 3)$.

Le polyèdre de caractère $(2, 0, 6)$ est obtenu à partir du polyèdre de caractère $(1, 3, 3)$ en collant un tétraèdre $YPQR$ à la face PQR du polyèdre $ABCPQR$, on peut donc raisonner pour le plan PQR comme pour le plan ABC.

Le polyèdre $ABCPQR$ est donc aussi un octaèdre régulier pour le polyèdre de caractère $(2, 0, 6)$. □

Lemme 4. *Les polyèdres de caractères* $(1, 3, 3)$ *et* $(2, 0, 6)$ *ont au moins une face losange.*

Démonstration. Cette démonstration n'utilise que des arguments de nature métrique.

Le polyèdre de caractère $(1, 3, 3)$ est constitué d'un octaèdre régulier $ABCPQR$ et d'un tétraèdre régulier $XABC$, joints par la face ABC. Dans l'octaèdre $ABCPQR$, l'angle dièdre γ entre la face ABC et la face ACR mesure $2\text{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{3}})$ d'après la proposition 3.4.

Dans le tétraèdre $XABC$, l'angle dièdre α entre la face ABC et la face XAC mesure $\text{Arccos}(\frac{1}{3})$ d'après la proposition 3.3.

Le tétraèdre $XABC$ étant joint par la face ABC à l'octaèdre $ABCPQR$, l'angle dièdre entre les faces XAC et ACR mesure :

$$\alpha + \gamma = 180^\circ.$$

Ainsi les points X, A, C et R sont coplanaires et sont les sommets d'un losange $XACR$.

Le polyèdre de caractère $(2, 0, 6)$ est obtenu à partir du polyèdre de caractère $(1, 3, 3)$ en joignant un tétraèdre $YPQR$ à la face PQR de l'octaèdre $ABCPQR$. Il possède donc aussi au moins la face losange $XACR$. □

On ne peut donc pas obtenir de deltaèdre en joignant un sommet d'ordre 3 à un sommet d'ordre 5 par une arête. □

5 Les caractères virtuels

Nous avons 19 triplets vérifiant la relation $3p+2q+r=12$ et nous avons présenté 8 caractères effectifs. Cette section consiste donc à expliquer pourquoi les 11 autres caractères sont virtuels.

On a vu à la proposition 4.3 que le caractère $(2,2,2)$ est virtuel car le polyèdre obtenu n'est pas convexe et au lemme 3 que les caractères $(1,3,3)$ et $(2,0,6)$ sont virtuels car ils ont une face losange.

Proposition 5.1. *Les seuls caractères effectifs vérifiant* $p \geqslant 1$ *sont* $(4,0,0)$ *et* $(2,3,0)$.

Les caractères $(3,0,3)$, $(3,1,1)$, $(2,2,2)$, $(2,0,6)$, $(2,1,4)$, $(1,4,1)$, $(1,3,3)$, $(1,2,5)$, $(1,1,7)$ *et* $(1,0,9)$ *vérifient* $p \geqslant 1$ *et sont virtuels.*

Démonstration.

- On a déjà vu que les caractères $(2,2,2)$ et $(2,0,6)$ sont virtuels.
- Pour les caractères $(3,0,3)$, $(2,1,4)$, $(1,2,5)$, $(1,1,7)$ et $(1,0,9)$ un sommet d'ordre 3 serait inévitablement relié à un sommet d'ordre 5, ce qui est impossible d'après la proposition 4.5.
- Pour le caractère $(3,1,1)$, l'un de ses sommets d'ordre 3 serait forcément relié à un autre sommet d'ordre 3 et ce serait un tétraèdre régulier d'après la proposition 4.1.
- Pour le caractère $(1,4,1)$, le sommet d'ordre 3 serait inévitablement relié à un sommet d'ordre 4 et ce serait le diamant triangulaire d'après la proposition 4.2.
- Pour le caractère $(1,3,3)$, le sommet d'ordre 3 serait relié soit à un sommet d'ordre 4 et ce serait le diamant triangulaire d'après la proposition 4.2, soit à un sommet d'ordre 5, ce qui est impossible d'après la proposition 4.5.

□

Il nous reste à étudier le caractère $(0,1,10)$.

Proposition 5.2. *Le caractère* $(0,1,10)$ *est virtuel.*

Démonstration. Cette démonstration ne nécessite que des arguments de nature combinatoire.

Considérons K le seul sommet d'ordre 4. Il a donc quatre sommets voisins A, B, C et D qui sont tous d'ordre 5, d'après le corollaire 4.4.

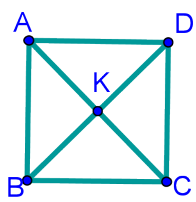

FIGURE 24 – Schéma d'essai de construction du (0,1,10).

On trace les autres faces d'arêtes respectives $[AD]$, $[DC]$, $[CB]$ et $[BA]$ et on note E, F, G et H leurs troisièmes sommets.

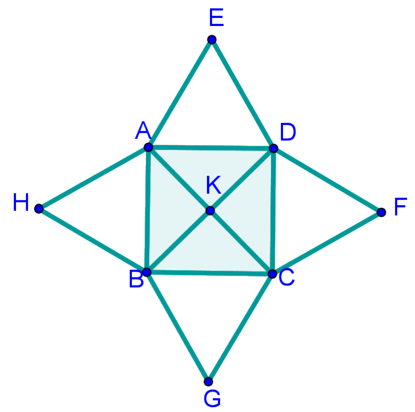

FIGURE 25 – Schéma d'essai de construction du (0,1,10).

Montrons que ces quatre points sont tous distincts.

Les sommets H et E sont distincts car A est d'ordre 5. De même pour les sommets E et F, F et G, et G et H. Si les sommets E et G étaient confondus, ils seraient d'ordre 4 et H et F le seraient également. Les quatre points seraient alors confondus et on aurait un sommet d'ordre 4, ce qui est exclu. On trace alors les faces AEH, DEF, CFG et BGH.

On trace les deuxièmes faces d'arêtes $[HE]$, $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$.

Les quatre derniers sommets doivent donc être confondus en I, sinon E, F, G et H seraient d'ordre 6, ce qui est impossible.

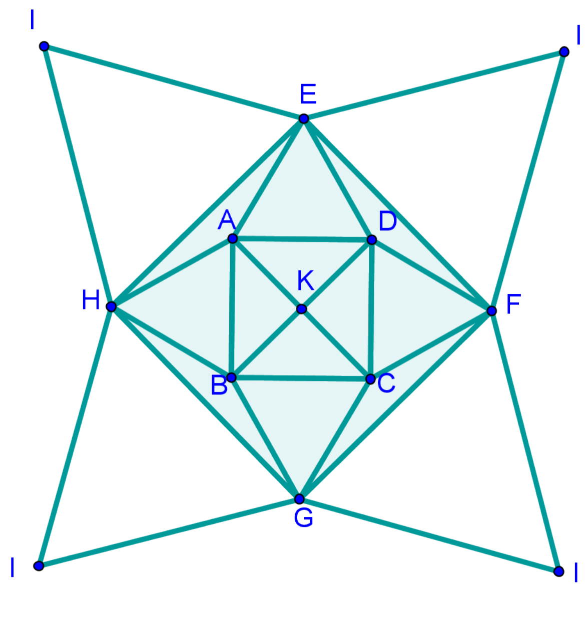

FIGURE 26 – Schéma du deltaèdre de caractère $(0, 2, 8)$.

Le point I est donc d'ordre 4. Or K est le seul sommet d'ordre 4. Donc $(0, 1, 10)$ est virtuel. □

Conclusion

Ce dossier illustre un problème de géométrie dans l'espace pouvant être traité de manière algébrique et combinatoire. Finalement, nous avons montré qu'il n'existe que huit deltaèdres. Nous pouvons mener le même type de recherche concernant les polyèdres ayant pour faces des carrés ou encore des pentagones. Un raisonnement similaire à celui que nous avons utilisé pour la démonstration de la proposition 1.2, nous amène au seul ordre 3 possible pour les sommets de tels polyèdres. Nous n'obtenons donc que le cube pour les faces carrées et le dodécaèdre pour les faces pentagonales.

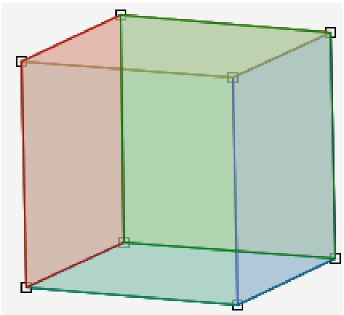

FIGURE 27 – Cube

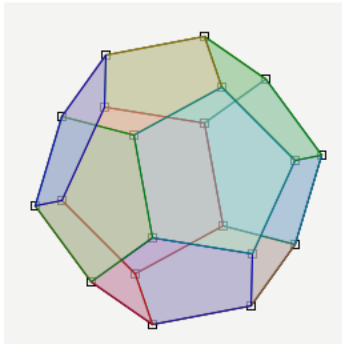

FIGURE 28 – Dodécaèdre