Etude de la quadrature de la spirale d'Archimède

Projet de géométrie, Master 1 2010/2011

CABEZA-ORCEL Paloma
LEAUVA Daëna

L'objectif de ce projet est de comprendre la quadrature – c'est-à-dire le calcul de l'aire – de la spirale d'Archimède telle qu'elle a été effectuée par ce dernier et de la comparer aux méthodes modernes de calcul d'aires.

Table des matières

Figure 1 – Spirale d'Archimède gravée sur la tombe de Jacob Bernouilli

1 Introduction

Archimède était un savant grec du IIIe siècle avant J.-C., à la fois mathématicien, ingénieur et physicien. On ne lui connaît pas de professeur si ce n'est son père, mais cet érudit cite fréquemment les travaux de ses prédécesseurs et notamment ceux d'Eudoxe de Cnide et d'Euclide.

La majorité de ses travaux en mathématiques porte sur la géométrie. Il consigne ses travaux en ce domaine dans plusieurs traités dont diverses compilations nous sont parvenues après maintes copies, traductions et modifications ; l'une des plus exhaustives a été découverte seulement en 1906 et est connue sous l'appellation de *Palimpseste*[1] *d'Archimède*. Ses traités de géométrie étudient l'aire et le volume de nombreuses figures géométriques obtenus par des calculs exacts ou approchés très précis.

Archimède étudie notamment dans le traité *Des spirales* l'aire d'une spirale particulière[2] appelée depuis *spirale d'Archimède*, qui fait l'objet de ce projet. Cette spirale va notamment lui permettre de rectifier le cercle, c'est-à-dire de déterminer la longueur de sa circonférence en transformant celle-ci en une droite égale au côté d'un triangle rectangle dont l'autre côté est le rayon du cercle.

La spirale d'Archimède

Elle a peut-être été inspirée par la courbe décrite par un cordage de bateau enroulé sur lui-même, ou encore par des observations physiques. Tout comme Archimède, nous décrivons cette spirale comme la trajectoire d'un point animé d'un mouvement rectiligne uniforme sur une droite elle-même animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un centre. Ce type de spirales se caractérise par l'aspect circulaire des spires et la distance constante entre deux spires consécutives.

Paramétrons cette trajectoire en notations modernes.

Appelons O l'origine de la spirale. Soit M un point de cette spirale et r la distance OM. Soit (OM) la droite de révolution sur laquelle M se déplace d'un mouvement rectiligne uniforme.

On suppose qu'au temps $t = 0$, M est en O ($r = 0$). À l'instant t, nous avons :

$$OM = r = v\ .\ t$$

où v, la vitesse de M sur (OM), est constante.

1. Un palimpseste est un texte écrit sur parchemin, qui a été effacé (souvent par grattage) pour réutiliser le parchemin. Le livre original était une copie datant du Xe siècle des principaux traités d'Archimède ; il comprenait environ 90 parchemins reliés sous forme de codex (l'ancêtre du livre), mais certaines feuilles ont été arrachées. Le traité *Des spirales* y figure pour la première fois au complet.

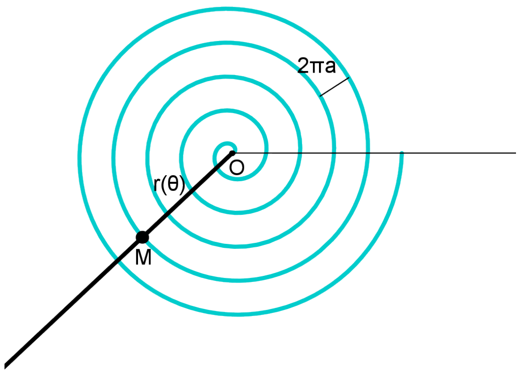
2. Il existe plusieurs autres types de spirales, les plus connues étant les spirales logarithmiques ou spirales de Bernouilli, d'équation polaire $r = a^\theta$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$), et les spirales paraboliques ou spirales de Fermat, d'équation $r^2 = a\theta$ avec $a > 0$, $\theta > 0$.

Pendant ce temps, la droite (OM) est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour du centre O. Soit θ l'angle que fait la droite (OM) par rapport à sa position initiale. Nous avons : $\theta = \omega \ . \ t$ ou encore $t = \frac{\theta}{\omega}$ où ω, la vitesse angulaire de la droite (OM), est constante.

De ce qui précède nous tirons :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{v}{\omega} \times \theta = a.\theta}$$

La position du point M est ainsi complètement déterminée par ses coordonnées polaires $(\theta,\, r(\theta))$.



La distance constante entre deux spires consécutives, caractéristique des spirales d'Archimède, se démontre maintenant aisément. Quel que soit θ donné, la distance entre deux spires consécutives est la différence $r(\theta+2\pi)-r(\theta) = a\times(\theta+2\pi-\theta) = 2\pi a$, qui ne dépend pas de θ mais seulement du paramètre a.

2 La méthode d'Archimède

À l'époque d'Archimède, les notions de nombre et d'opération sur les nombres ont une interprétation géométrique : un rationnel est un rapport de longueurs entières, l'addition de nombres est représentée par la longueur totale de segments de longueurs équivalentes mis bout à bout, la différence de deux nombres est un excédent entre deux longueurs ou deux aires, le produit de deux nombres a et b est calculé comme l'aire d'un rectangle dont les côtés ont pour longueurs a et b – d'où le terme *quadrature* pour désigner l'aire d'une figure. Cette vision limitée rend ardue la lecture des traités mathématiques de cette époque mais on ne peut que s'émerveiller de la puissance des raisonnements qui parviennent à contourner la plupart des difficultés ainsi induites.

Pour effectuer ses démonstrations, Archimède utilise principalement quatre procédés :
– le découpage des figures en aires élémentaires connues (rectangles, triangles, etc.) éventuellement de plus en plus petites (qui préfigurent le calcul intégral) ;
– des encadrements de plus en plus fins de la grandeur à déterminer (qui préfigurent le passage à la limite) ; ils lui permettent d'approcher très précisément le résultat ;
– la méthode d'exhaustion [3] qui consiste à rendre une différence aussi petite qu'on le souhaite ; cette méthode nécessite de connaître le résultat final (généralement obtenu par des encadrements) ;

3. Voir en annexe : *La méthode d'exhaustion*

– et enfin les raisonnements par l'absurde.

Quel que soit le nombre de révolutions considéré, Archimède divise l'aire circonscrite par la spirale en un nombre pair de secteurs d'écarts angulaires identiques. C'est la *méthode des pesées*, très employée dans l'Antiquité.

Il commence par calculer l'aire comprise entre la droite de révolution en position initiale et la courbe de la spirale après une révolution. Dans la Proposition X, il déduit des rapports entres les aires de figures semblables particulières ; ces figures permettront de calculer l'aire des figures inscrites et circonscrites à la spirale.

Puis il applique la théorie des proportions d'Euclide (Livre V des *Éléments*) aux déplacements mais aussi aux durées de déplacement (Proposition XII), ce qui lui permet de calculer des rapports entre certains arcs de cercle associés à la spirale et des segments de droites particulières de celle-ci.

Dans la Proposition XXI et son corollaire, Archimède démontre qu'on peut toujours trouver une figure circonscrite à la spirale de première révolution telle que son aire soit plus grande que l'aire de la spirale et plus petite que le tiers de l'aire du disque circonscrit. Il en déduit par exhaustion dans la Proposition XXIV que l'aire délimitée par la spirale après une révolution et la droite de révolution en position initiale vaut exactement le tiers de l'aire du disque circonscrit.

Archimède s'attaque ensuite au calcul de l'aire comprise entre les spires de la première et de la seconde révolution. Il établit qu'il existe un rapport $\frac{7}{12}$ entre cette aire et l'aire du cercle qui lui est circonscrit.

Notre projet s'arrête à l'étude de cette dernière proposition mais Archimède poursuit son étude. Il détermine notamment plusieurs tangentes à la spirale et l'utilise en particulier pour étudier la trisection de l'angle et la rectification du cercle.

2.1 Les définitions d'Archimède

La terminologie d'Archimède étant différente de la nôtre, nous allons décrypter les principales définitions d'Archimède ayant permis à celui-ci de codifier le calcul de l'aire de la spirale dont, par commodité, nous ne tracerons désormais qu'une à deux spires sur les figures d'accompagnement ($0 \leq \theta \leq 4\pi$).

Définition II – *Appelons commencement de la spirale l'extrémité de la droite qui reste fixe pendant que la droite tourne.* C'est pour nous le point origine O, qu'Archimède a désigné sur sa figure par la lettre Θ.

Définition III – *Appelons position initiale de révolution, celle à partir de laquelle la droite a commencé de tourner.* Pour nous c'est l'axe $\theta = 0$.

Définition IV – *Appelons Première droite celle sur laquelle le point se meut et qu'il parcourt pendant la première révolution ; appelons Seconde droite celle que le point parcourt pendant la seconde révolution. . .* La Première droite est en fait le *segment* de droite joignant les positions du point M quand θ varie de 0 à 2π, c'est-à-dire les positions de M au début et à la fin de la première révolution ; la Seconde droite est le segment de droite joignant les positions du point M quand θ varie de 2π à 4π, c'est-à-dire les positions de M au début et à la fin de la deuxième révolution.

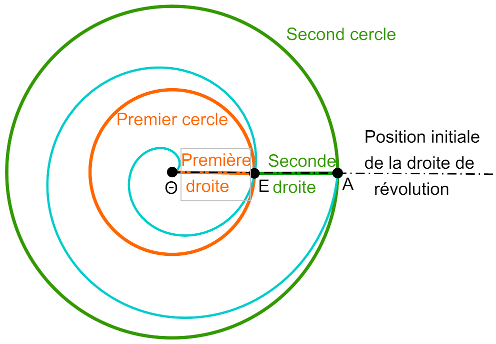


FIGURE 2 – Principales définitions

Il est facile de généraliser cette définition à n révolutions : la $n^{ième}$ droite est le segment de droite joignant les positions du point M quand θ varie de $2(n-1)\pi$ à $2n\pi$, c'est-à-dire les positions de M au début et à la fin de la $n^{ième}$ révolution.

Tous ces segments sont de longueur $2\pi a$.

Définition V – *Appelons première aire celle qui est entourée par la spirale décrite dans la première révolution et par la Première droite ; seconde aire celle qui est entourée par la spirale décrite dans la seconde révolution et par la Seconde droite (. . .)* Plus généralement, lorsque le point M décrit sa $n^{ième}$ révolution, il s'agit de la portion d'aire comprise entre la $n-1^{ième}$ spire et la $n^{ième}$ spire (θ compris entre $(n-1).2\pi$ et $n.2\pi$).

Définition VII – *Appelons Premier cercle celui qui est décrit du point d'origine de la spirale comme centre et avec la Première droite comme rayon, Second cercle celui qui est décrit du même centre avec le double de cette droite pour rayon. . .* Avec nos notations, le Premier cercle est le cercle de centre O et de rayon $2\pi a$, le Second cercle est de rayon $4\pi a$, et plus généralement, le $n^{ième}$ cercle est le cercle de centre O et de rayon $n \times 2\pi a$.

2.2 La démarche d'Archimède

Pour calculer l'aire de la spirale, Archimède a donc découpé le plan en secteurs égaux, le côté du premier secteur étant confondu avec la position initiale de la droite de révolution.

Il considère ensuite un secteur donné, et définit un *cercle inférieur* de même centre Θ que l'origine de la spirale et de rayon égal à la distance de ce centre à la spirale au début du secteur, et un *cercle supérieur* dont le rayon est égal à la distance de ce centre à la spirale à la fin du secteur. Il remarque que le rayon du cercle supérieur d'un secteur donné est égal au rayon du cercle inférieur du secteur suivant.

Il encadre ensuite l'aire de la portion de spirale comprise dans ce secteur donné par l'aire de la portion du cercle inférieur et celle de la portion du cercle supérieur. Il conclut en disant que l'aire d'une spirale dont la droite de révolution a parcouru un certain nombre de secteurs est encadrée par la somme correspondante des aires des portions de cercles inférieurs et supérieurs.

L'ensemble des arcs de cercles inférieurs et des portions de rayon les reliant est ce qu'il appelle la *figure inscrite* dans la spirale, et l'ensemble des arcs de cercles supérieurs et des portions de rayon les reliant, la *figure circonscrite*. Remarquons que ces segments de rayon sont tous de longueur égale.

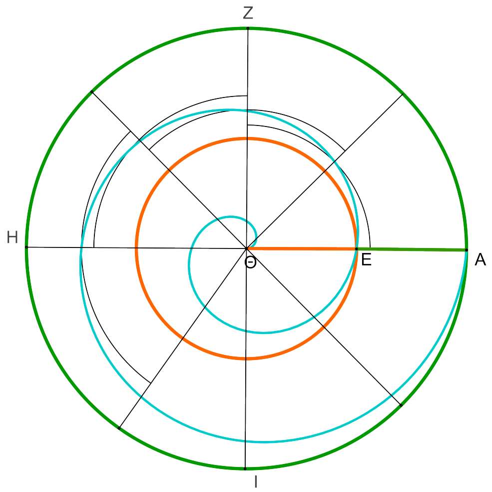


FIGURE 3 – Encadrement de portions de spirale par des arcs de cercles

Transcrivons cela en termes modernes :

On divise le plan en N secteurs égaux ; chaque secteur fait donc un angle de $2\pi/N$ et a une aire égale à $\pi R^2/N$ (où R est le rayon du secteur). Lorsque le point M arrive au début du n-ième secteur, la distance OM vaut $a.\theta = a \times (2\pi/N) \times n$; c'est le rayon r_n du cercle inférieur, avec n variant de 0 à $N-1$. Le rayon R_n du cercle supérieur du n-ième secteur est le même que celui du cercle inférieur du secteur suivant : $R_n = r_{n+1} = a \times (2\pi/N) \times (n+1)$.

Notons $\dashv_n$ l'aire de la spirale contenue dans le $n^{ième}$ secteur. On a donc l'encadrement suivant :

$$\pi \times r_n^2/N \leq \dashv_n \leq \pi \times R_n^2/N,$$
$$\pi^3 \times a^2 \times 4n^2/N^3 \leq \dashv_n \leq \pi^3 \times a^2 \times 4(n+1)^2/N^3.$$

L'aire de la spirale $\mathcal{A}$ est la somme, sur les N secteurs, des portions d'aire $\dashv_n$; elle est donc encadrée par :

$$4\pi^3 \times a^2/N^3 \sum_{n=1}^{N} n^2 \leq \mathcal{A} \leq 4\pi^3 \times a^2/N^3 \sum_{n=1}^{N} (n+1)^2.$$

Nous allons à présent étudier les principales étapes ayant permis à Archimède de calculer l'aire de la spirale et nous les transcrirons au fur et à mesure en termes modernes.

2.2.1 Proposition X

Si des lignes en nombre quelconque, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, sont disposées les unes à la suite des autres, l'excédent étant d'ailleurs égal à la plus petite ; et si l'on dispose un même nombre d'autres lignes dont chacune est aussi grande *que la plus grande des premières, les carrés des lignes égales à la plus grande, ajoutés au carré de la plus grande ainsi qu'au rectangle délimité sous la plus petite et sous une ligne égale à la somme de celles se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, valent le triple des carrés de toutes les lignes se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur(...)*

L'objectif de cette proposition est de calculer la somme des carrés de N nombres qui sont les multiples entiers successifs d'une même valeur (ici égale à la plus petite des lignes). Nous verrons que ceci revient à trouver une expression analytique pour la somme des carrés des N premiers entiers. Or nous avons vu à l'étape précédente que cette somme permettait à Archimède d'encadrer l'aire de la spirale.

Dans cette proposition, comme dans toutes les suivantes, Archimède annonce le résultat puis le démontre pas à pas à l'aide de figures géométriques représentant le problème posé, qui contiennent déjà en elles-mêmes le germe de la solution.

Dans ce cas précis, il trace une première série de 8 lignes – mais son raisonnement reste valable pour un nombre quelconque N de lignes. Les lignes sont rangées par ordre de longueurs décroissantes et sont respectivement notées A (la plus grande), B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ (la plus petite), chacune dépassant la suivante d'un excès fixe égal à la longueur de la plus petite (soit Θ).

Sur la même figure, il ajoute au bout de chaque ligne (hormis à la plus grande, A) une ligne complémentaire telle que la somme des longueurs des deux lignes mises bout à bout vaille celle de la ligne la plus grande. Il note ces lignes complémentaires respectivement I, K, Λ, M, N, Ξ et O (qui, par suite, sont respectivement de longueur Θ, H, Z, E, Δ, Γ et B).

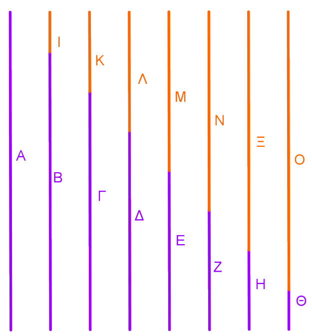


FIGURE 4 – Des lignes se dépassent toutes d'une même longueur

En reprenant ces notations, dans cette proposition X Archimède obtient l'équation ci-dessous :

$$\sum_{n=1}^{8} A^2+A^2+\Theta\times(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta) = 3\times(A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2). \tag{1}$$

Il déduira de cette égalité que l'aire de la spirale après une révolution vaut le tiers de l'aire du cercle circonscrit à la spirale.

La démonstration de cette égalité par Archimède est la suivante :

Comme la ligne de plus grande longueur A est aussi égale à la somme d'une ligne inégale et de sa ligne complémentaire, on a : $A^2 = (B+I)^2 = (\Gamma+K)^2 = (\Delta+\Lambda)^2 = (M+E)^2 = (N+Z)^2 = (H+\Xi)^2 = (\Theta+O)^2$; par ailleurs, $(B+I)^2 = B^2+I^2+2\times I\times B$, et ainsi de suite.

De ce fait, il obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{8} A^2 + A^2 &= A^2 + (B+I)^2 + (\Gamma+K)^2 + \cdots + (H+\Xi)^2 + (\Theta+O)^2 + A^2 \\
&= A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2 \\
&+ A^2 + I^2 + K^2 + \Lambda^2 + M^2 + N^2 + \Xi^2 + O^2 \\
&+ 2 \times (B \,.\, I + \Gamma \,.\, K + \Delta \,.\, \Lambda + E \,.\, M + Z \,.\, N + H \,.\, \Xi + \Theta \,.\, O)
\end{aligned}$$

Mais, par construction des lignes, nous avons $I = \Theta$, et donc $B \,.\, I = B \,.\, \Theta$; de même, $K = H = 2 \times \Theta$, $\Lambda = Z = 3 \times \Theta$, et ainsi de suite. Lorsqu'on remplace ceci dans ce qui précède, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{8} A^2 + A^2 &= 2 \times (A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2) \\
&+ 2 \times B \,.\, \Theta + 4 \times \Gamma \,.\, \Theta + 6 \times \Delta \,.\, \Theta + 8 \times E \,.\, \Theta \\
&+ 10 \times Z \,.\, \Theta + 12 \times H \,.\, \Theta + 14 \times \Theta \,.\, \Theta.
\end{aligned}$$

Lorsqu'on remplace ceci dans l'équation (1) page 7, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{8} A^2 + A^2 + \Theta \times (A + B + \cdots + H + \Theta) &= 2 \times (A^2 + B^2 + \cdots + H^2 + \Theta^2) \\
&+ \Theta \times (A + 3B + 5\Gamma + 7\Delta + 9E + 11Z + 13H + 15\Theta).
\end{aligned}$$

Ceci est égal au résultat souhaité si et seulement si le produit des termes croisés $\Theta \times (A + 3B + 5\Gamma + 7\Delta + 9E + 11Z + 13H + 15\Theta)$ vaut $A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2$.

Archimède le prouve par une démonstration à rebours : il démontre que la somme des carrés des longueurs des lignes inégales vaut le produit des termes croisés. Et en effet :

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \times A = 8\Theta \times A \\
&= \Theta \times (A + A + A + A + A + A + A + A) \\
&= \Theta \times (A + B + I + \Gamma + K + \Delta + \Lambda + E + M + Z + N + H + \Xi + \Theta + O) \\
&= \Theta \times (A + 2B + 2\Gamma + 2\Delta + 2E + 2Z + 2H + 2\Theta).
\end{aligned}$$

Par le même procédé, on obtient pour les autres carrés :

$$\begin{aligned}
B^2 &= \Theta \times (B + 2\Gamma + 2\Delta + 2E + 2Z + 2H + 2\Theta), \\
\Gamma^2 &= \Theta \times (\Gamma + 2\Delta + 2E + 2Z + 2H + 2\Theta), \\
\Delta^2 &= \Theta \times (\Delta + 2E + 2Z + 2H + 2\Theta), \\
E^2 &= \Theta \times (E + 2Z + 2H + 2\Theta), \\
Z^2 &= \Theta \times (Z + 2H + 2\Theta), \\
H^2 &= \Theta \times (H + 2\Theta), \\
\Theta^2 &= \Theta \times \Theta.
\end{aligned}$$

Par suite, la somme de ces carrés vaut bien $\Theta \times (A+3B+5\Gamma+7\Delta+9E+11Z+13H+15\Theta)$, et nous avons donc démontré la proposition X.

Traduisons cela en langage mathématique moderne :

Soit N le nombre total de lignes. Appelons d la différence (positive) entre une ligne inégale et la suivante. La plus grande ligne est donc de longueur Nd, la plus petite de longueur d, et la $n^{ième}$ ligne est de longueur nd. Posons $S_N = \sum_{n=1}^{N} n^2$. La proposition X peut alors se traduire par :

$$\sum_{n=1}^{N}(Nd)^2 + (Nd)^2 + d\sum_{n=1}^{N} nd = 3d^2 S_N. \tag{2}$$

Selon le raisonnement d'Archimède, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{N}(Nd)^2 + (Nd)^2 + d\sum_{n=1}^{N} nd = (N+1)(Nd)^2 + d^2\sum_{n=1}^{N} n.$$

Nous simplifions par d^2, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} N^2 + \sum_{n=1}^{N} n &= \sum_{n=1}^{N}[(N-n)^2 + n^2 + 2(N-n)n] + \sum_{n=1}^{N} n \\ (N+1)N^2 + \sum_{n=1}^{N} n &= 2S_N + 2\sum_{n=0}^{N}(N-n)n + \sum_{n=0}^{N}(N-n).\end{aligned}$$

Il reste donc à démontrer que $\sum_{n=0}^{N}(2n+1)(N-n) = S_N$.

Réécrivons S_N de manière à obtenir la partie gauche de l'égalité.

$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{n=1}^{N} n^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N}\,(n + \sum_{k=1}^{n-1}((n-k)+k)) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\,(n + 2\sum_{k=1}^{n-1} k)\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
S_N &= 1 \\
&+ 2 + 2 \times 1 \\
&+ 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1 \\
&+ \cdots (N lignes) \\
&+ N - 1 + 2(N-2) + \cdots + 2 \times 1 \\
&+ N + 2(N-1) + 2(N-2) + \cdots + 2 \times 1 \\
&= \sum_{n=0}^{N} (2n+1)(N-n)
\end{aligned}$$

La relation $\sum_{n=0}^{N}(2n+1)(N-n) = S_N$ est ainsi vérifiée et est suffisante pour obtenir le résultat :

$$\boxed{S_N = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}$$

Cependant Archimède s'intéresse peu à ce résultat car il utilise avant tout l'égalité (2) pour montrer dans la Proposition XXIV que l'aire de la spirale après une révolution vaut le tiers de l'aire de son cercle circonscrit.

2.2.2 Corollaire

Dans ce corollaire à la proposition X, Archimède effectue deux comparaisons différentes de la somme des carrés des lignes se dépassant l'une l'autre d'une même longueur et de la somme des carrés des lignes de même longueur.

De la proposition X il déduit premièrement :

$$\sum_{n=1}^{8} A^2 < 3 \times (A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2) \tag{3}$$

car, d'après (1) page 7, le terme de gauche de l'expression ci-dessus plus un autre terme valent le terme de droite.

Il en déduit deuxièmement :

$$\sum_{n=1}^{8} A^2 > (B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2). \tag{4}$$

Le terme croisé $\Theta \times (A + B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta)$, que nous noterons dans la suite P, est inférieur à A^2 parce que chaque terme de la somme à l'intérieur des parenthèses est inférieur à A et que Θ vaut $A/8$.

Posons $S = \sum_{n=1}^{8} A^2 + A^2 + P$. D'après ce qui précède, $S - A^2 - P = \sum_{n=1}^{8} A^2$ est plus grand que $S - A^2 - A^2$ et donc a fortiori plus grand que $S - 3A^2$. Mais, d'après la proposition X, S vaut aussi $3\times(A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2)$. Il s'ensuit qu'on a :

$$\sum_{n=1}^{8} A^2 > 3 \times (A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2) - 3A^2,$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{8} A^2 > 3 \times (B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2).$$

Ces inégalités sont aisément retrouvées quand on travaille en notations modernes. L'équation 1 se traduit par :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}(N\Theta)^2 + (N\Theta)^2 + \Theta \times \sum_{n=1}^{N} n\ \Theta &= 3 \times \sum_{n=1}^{N}(n\Theta)^2 \\ N^3\Theta^2 + N^2\Theta^2 + \Theta \times \sum_{n=1}^{N} n\ \Theta &= 3 \times \Theta^2 \times N(N+1)(2N+1)/6. \end{aligned}$$

Par suite, après simplification par Θ^2, on a bien :

$$\boxed{N^3 < 3\ N(N+1)(2N+1)/6.}$$

On vérifie de même aisément l'inégalité :

$$\boxed{N^3 > 3\ N(N-1)(2N-1)/6.}$$

avec $N(N-1)(2N-1)/6 = \sum_{n=1}^{N-1} n^2$.

Mais le principal résultat de ce corollaire est sa généralisation aux aires de figures semblables. Cette généralisation est possible parce qu'il s'agit de figures dont les aires sont dans les mêmes rapports que les carrés de leurs côtés homologues, comme l'a démontré Euclide (Livre VI, proposition XX). Ces inégalités seront utiles à Archimède pour démontrer sa proposition XXIV.

Construisons des figures semblables sur les lignes de longueurs respectives A, B, $\ldots$, Θ, et d'autres sur les lignes égales à A. Notons $\mathcal{A}$ l'aire de la figure de côté A. Les aires des figures de côtés B, Γ, $\ldots$, Θ s'expriment toutes en fonction de $\mathcal{A}$ car les figures sont semblables - elles valent respectivement $\mathcal{A} \times \frac{B^2}{A^2}$, $\mathcal{A} \times \frac{\Gamma^2}{A^2}, \ldots,$ $\mathcal{A} \times \frac{\Theta^2}{A^2}$. Par suite, nous retrouvons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{8} \mathcal{A} &= \frac{\mathcal{A}}{A^2} \sum_{n=1}^{8} A^2 \\ &< 3 \times \frac{\mathcal{A}}{A^2}(A^2 + B^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + E^2 + Z^2 + H^2 + \Theta^2), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}\mathcal{A} &= \frac{\mathcal{A}}{A^2}\sum_{n=1}^{8}A^2\\ &> \frac{\mathcal{A}}{A^2}(B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2).\end{aligned}$$

Traduisons ceci en notations modernes. Notons c_n le côté de la $n^{ième}$ figure qui dépasse de la grandeur Θ le côté c_{n+1} de la $n+1^{ième}$. On a donc $c_n = (N-(n-1))\Theta$, et $c_1 = N\Theta$.

Comme les figures sont semblables, leurs aires sont dans ce même rapport (au carré) :

$$\frac{\mathcal{A}_n}{\mathcal{A}} = \frac{(N-(n-1))^2}{N^2}.$$

Les inégalités (3) et (4) page 10 appliquées à ces rapports d'aires se traduisent respectivement par :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\mathcal{A} &= \frac{\mathcal{A}}{N^2}\times\sum_{n=1}^{N}N^2\\ &< \frac{\mathcal{A}}{N^2}\times 3\sum_{n=1}^{N}(N-(n-1))^2,\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\mathcal{A}}{N^2}\times\sum_{n=1}^{N}N^2 < \frac{\mathcal{A}}{N^2}\times 3\sum_{n=1}^{N}n^2$$

soit :

$$\boxed{\frac{\mathcal{A}}{N^2}\times\sum_{n=1}^{N}N^2 > \frac{\mathcal{A}}{N^2}\times\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.}$$

Par ailleurs :

$$\frac{\mathcal{A}}{N^2}\times\sum_{n=1}^{N}N^2 > \frac{\mathcal{A}}{N^2}\times 3\sum_{n=2}^{N}(N-(n-1))^2$$

d'où :

$$\frac{\mathcal{A}}{N^2}\times\sum_{n=1}^{N}N^2 > \frac{\mathcal{A}}{N^2}\times 3\sum_{n=1}^{N-1}n^2$$

soit :

$$\boxed{\frac{\mathcal{A}}{N^2} \times \sum_{n=1}^{N} N^2 > \frac{\mathcal{A}}{N^2} \times \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}.}$$

Ces résultats s'obtenaient directement en utilisant l'encadrement de N^3 précédemment établi dans la première partie de ce corollaire.

2.2.3 Proposition XII

Si des droites en nombre quelconque, menées de l'origine de la spirale à une spirale décrite dans une révolution quelconque, forment des angles égaux entre eux, ces droites se dépassent l'une l'autre d'une même longueur.

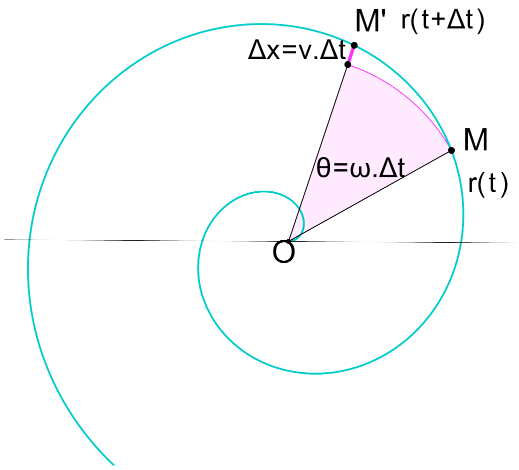
Cette proposition est une étape charnière dans la quadrature de la spirale parce qu'elle permet d'extrapoler aux secteurs de spirale les résultats du corollaire de la Proposition X, en prouvant que ces secteurs sont semblables entre eux.

La démonstration d'Archimède fait intervenir le mode même de construction de la spirale. Elle explique que le **temps** pendant lequel l'extrémité de la droite de révolution va du point B au point Γ est le même que celui pendant lequel elle passe de Γ à Δ, et ainsi de suite, car la droite de révolution balaie des angles égaux ; et que pendant ce *même* temps le mobile sur la droite de révolution parcourt l'excédent du segment $A\Gamma$ sur le segment AB, ou l'excédent du segment $A\Delta$ sur le segment $A\Gamma$, et ainsi de suite.

La traduction de ceci en termes modernes met en évidence la limpidité de la démonstration d'Archimède.

Rappelons qu'une spirale d'Archimède est la trajectoire d'un point se déplaçant à une vitesse constante v sur une droite en rotation uniforme de vitesse de rotation ω constante.

Quand la droite de révolution balaie un secteur d'angle θ, elle met donc un temps $\Delta t = \theta/\omega$, constant car produit de deux constantes ; pendant ce même temps, le point mobile s'est déplacé sur la droite de révolution d'une longueur $\Delta x = v.\Delta t$.



Ce déplacement Δx [4] est constant si Δt est constant puisque c'est alors le produit de deux constantes ; or Δt reste constant quelles que soient les deux positions de la droite de révolution considérées, dès lors que ces positions sont écartées d'un angle θ constant.

Cette proposition a une conséquence très importante, démontrée dans une proposition ultérieure que nous n'avions toutefois pas à détailler : le rapport de l'arc de cercle parcouru pendant que la droite de révolution passe de B à Γ à l'arc de cercle parcouru pendant que la droite de révolution passe de Γ à Δ est le même que le rapport de la longueur $A\Gamma$ à la longueur $A\Delta$, et ceci est vrai quelles que soient les positions successives de la droite de révolution ayant balayé un angle θ. Par suite, les secteurs circulaires construits sur les lignes de longueurs inégales (qui constituent les figures inscrite et circonscrite à la spirale utilisées extensivement dans les propositions ultérieures), sont *semblables* entre eux.

2.2.4 Proposition XXI

Si l'on prend l'aire comprise entre une spirale décrite en première révolution et entre la première droite à l'origine de la révolution, il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre qui soient composées de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une aire moindre que toute aire donnée.

Cette proposition permettra à Archimède de démontrer la proposition XXIV. Elle établit qu'il existe toujours une figure inscrite à la spirale d'aire plus grande que toute aire inférieure à celle de la spirale, et une figure circonscrite à la spirale d'aire plus petite que toute aire supérieure à celle de la spirale.

Le principe archimédien permet, à partir de deux aires données, de réduire la plus grande jusqu'à la rendre inférieure à la plus petite. Archimède divise le cercle en secteurs égaux d'angle $\frac{\pi}{8}$. Il prend pour plus grande aire l'aire du Premier cercle, et pour plus petite, l'aire d'un secteur de même rayon que ce cercle et d'angle $\frac{\pi}{8}$. Il construit ainsi des secteurs d'aire moindre que les aires données précédemment.

Archimède démontre ensuite que les aires des figures inscrite et circonscrite ne diffèrent que par l'aire d'un des secteurs de la dernière figure. Transcrivons sa démarche en termes modernes.

Comme lui, nous nous limiterons pour cette démonstration au premier quart de cercle divisé en quatre secteurs. Notons :
- A_0 le point d'intersection de la spirale et de la première droite,
- B, le point d'intersection, différent de A_0, du cercle avec le premier secteur,
- pour $i \geq 1$, A_i le point d'intersection, différent de A_{i-1}, de la spirale et du contour du $i^{\text{ème}}$ secteur.

4. C'est cet avancement constant à secteur angulaire balayé constant qui est responsable de la distance égale entre deux spires successives de la spirale.

Considérons maintenant les secteurs suivants : pour $i \geq 1$, construisons l'arc de cercle de centre O passant par A_i tel que ses extrémités, C_i et D_i, soient respectivement sur les segments $[OA_{i-1}]$ et $[OA_{i+1}]$.

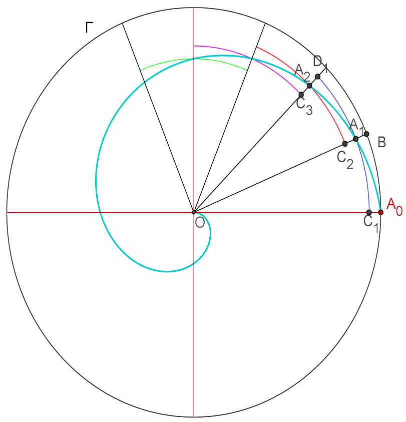


Figure 5 – Construction des figures inscrite et circonscrite

Nous avons ainsi, de part et d'autre du segment $[OA_i]$, un secteur S_{i+1} extérieur à la $(i+1)^{ème}$ portion de spirale et un secteur s_i intérieur à la $i^{\text{ème}}$ portion de spirale et, pour $1 \leq i \leq 15$, ces secteurs sont égaux. Les secteurs S_i et les s_i forment respectivement ce qu'Archimède nomme figure circonscrite et figure inscrite.

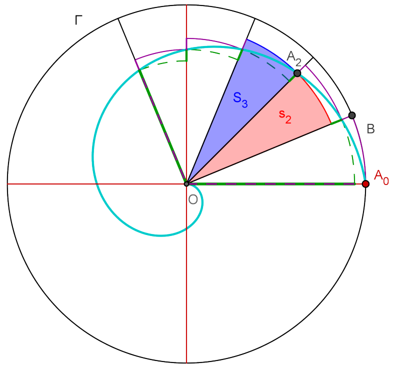


Figure 6 – Secteurs égaux

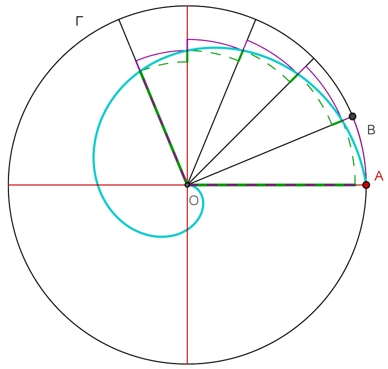


Figure 7 – Figure inscrite (pointillés) - Figure circonscrite (continu)

Notons S la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{16} S_i$ et s la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} s_i$. Nous avons alors :

$$S = S_1 + s.$$

Cette égalité établit que la figure circonscrite dépasse la figure inscrite de S_1, qui est égale à la plus petite des aires données. En particulier, S_1 peut être rendue moindre que toute aire donnée.

2.2.5 Proposition XXIV

L'aire comprise entre la spirale décrite en première révolution et la première des droites en position initiale de révolution est équivalente au tiers du premier cercle.

Nous arrivons au coeur du traité : c'est ici qu'Archimède démontre que l'aire de la spirale après une révolution vaut le tiers de l'aire du cercle qui la circonscrit (c'est-à-dire du Premier cercle). Il emploie pour ce faire un double raisonnement par l'absurde : il démontre qu'il est impossible que l'aire de la spirale soit inférieure au tiers de l'aire du cercle circonscrit, mais qu'il est également impossible qu'elle lui soit supérieure - c'est donc que l'aire de la spirale lui est égale.

Archimède montre d'abord qu'il est impossible que l'aire de la spirale de première révolution soit plus petite que le tiers de l'aire du cercle circonscrit.
— Supposons que l'aire de la spirale, notée $\mathcal{A}_1$, soit inférieure à l'aire $\mathcal{G}$ du cercle G, d'aire égale au tiers de l'aire du Premier cercle. Alors, d'après le corollaire de la proposition XXI, il existe une figure plane F d'aire $\mathcal{F}$, circonscrite à la spirale et qui vérifie $\mathcal{F} - \mathcal{A}_1 < \mathcal{G} - \mathcal{A}_1$. Par suite, $\mathcal{F}$ est inférieure à $\mathcal{G}$.

Cette figure circonscrite est formée de secteurs circulaires semblables dont les côtés issus de l'origine de la spirale se dépassent l'un l'autre d'une même longueur, et dont le plus grand est de même longueur OA que le rayon du Premier cercle (voir figure 7). Par conséquent, on peut appliquer les résultats du corollaire de la Proposition X : l'aire de secteurs tous identiques construits sur des droites de longueurs toutes égales à la plus grande (c'est-à-dire l'aire du Premier cercle, de rayon OA) est inférieure au triple des aires des secteurs construits sur des droites de longueurs inégales (c'est-à-dire à l'aire de la figure F). Par suite $3\mathcal{G}$ est inférieure à $3\mathcal{F}$.

Mais ceci est incompatible avec l'hypothèse de départ, c'est donc que l'hypothèse est fausse.
— Supposons maintenant que l'aire de la spirale soit supérieure à l'aire du cercle G. Alors, d'après le corollaire de la proposition XXI, il existe toujours une figure plane d'aire $\mathcal{F}'$ à la fois inscrite dans la spirale et circonscrite au cercle G ; par suite, on peut écrire : $\mathcal{A}_1 - \mathcal{F}' < \mathcal{A}_1 - \mathcal{G}$, ce qui entraîne que $\mathcal{G}$ est inférieure à $\mathcal{F}'$.

Cette figure inscrite est formée de secteurs circulaires semblables dont les côtés partant de l'origine de la spirale se dépassent l'un l'autre d'une même longueur égale à l'excédent du rayon du Premier cercle sur le plus grand côté (figure 7). Par conséquent, on peut appliquer à la figure F' et au Premier cercle les résultats du corollaire de la proposition X, ce qui conduit à l'inégalité $3\mathcal{G} > 3\mathcal{F}'$.

Mais l'inégalité précédente revient à dire que l'aire de G est supérieure à l'aire de la figure inscrite F', ce qui est incompatible avec l'hypothèse de départ. C'est donc que celle-ci est fausse.

— Si l'aire de la spirale après une révolution n'est ni plus grande que celle du cercle G, ni plus petite, c'est donc qu'elle lui est strictement équivalente.

Remarque

La proposition XXIV s'achève par cette égalité, sans qu'Archimède poursuive plus avant le calcul de la quadrature de la spirale de première révolution, et nous ignorons s'il a précisé celle-ci dans une proposition ou un traité ultérieur.

Toutefois il a démontré dans le traité *La Mesure du Cercle*, à la proposition I, que *tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base*, et à la proposition III [5], que *le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre est inférieur à* $3 + \frac{10}{70}$ *mais supérieur à* $3 + \frac{10}{71}$. Ceci permet d'en déduire au moins un encadrement "archimédien" de l'aire de la spirale de première révolution :

$$\frac{1}{3} \times (3 + \frac{10}{71}) OA^2 \leq \mathcal{A}_1 \leq \frac{1}{3} \times (3 + \frac{10}{70}) OA^2$$

2.2.6 Proposition XXV

Le rapport de l'aire comprise entre la spirale de seconde révolution et la seconde des droites en position initiale de révolution au second cercle est le même que le rapport de 7 *à* 12 *; rapport identique lui-même à celui de l'ensemble du rectangle, délimité sous le rayon du second cercle et le rayon du premier cercle, et du tiers du carré de l'excédent du rayon du second cercle sur le rayon du premier cercle, au carré du rayon du second cercle.*

Archimède a montré dans la proposition précédente que l'aire comprise entre la spirale de première révolution et la Première droite est égale au tiers de l'aire du Premier cercle. Quant à sa proposition XXV, elle établit à $\frac{7}{12}$ le rapport de l'aire de la spirale balayée par la droite de révolution entre la première et la deuxième révolution sur l'aire du Second cercle. Nous n'avons pas les détails de sa démonstration mais nous allons utiliser nos connaissances modernes pour calculer les aires et vérifier ses calculs finaux.

Rappelons que les rayons ΘO du Premier cercle et $\Theta A = 2\ \Theta O$ du Second cercle valent respectivement $2\pi a$ et $4\pi a$, où a est la distance entre deux spires de la spirale. Le *rectangle délimité sous le rayon du Second cercle et le rayon du Premier cercle* est le produit de la longueur du segment $A\Theta$ et de la longueur du segment $O\Theta$; *l'excédent du rayon du Second cercle sur le rayon du Premier cercle* est la différence de longueurs $A\Theta - O\Theta = 2\pi a$.

Notons $\mathcal{A}_2$ la portion d'aire comprise entre les spires de première et deuxième révolution et la Deuxième droite, et $\mathcal{C}_2$ l'aire du Second cercle. La proposition XXV se traduit par :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{C}_2} &= \frac{7}{12} \\ &= \frac{A\Theta \times O\Theta + 1/3\ (A\Theta - O\Theta)^2}{A\Theta^2} \end{aligned}$$

5. La proposition III donne une approximation de π obtenue en inscrivant et en circonscrivant le cercle par deux polygones réguliers semblables à 96 côtés.

Remplaçons ces aires et ces longueurs par leurs valeurs respectives ; nous retrouvons bien :

$$\begin{aligned}\frac{A\Theta \times O\Theta + 1/3\ (A\Theta - O\Theta)^2}{A\Theta^2} &= \frac{4\pi\ a \times 2\pi\ a + 1/3\ (4\pi\ a - 2\pi\ a)^2}{(4\pi\ a)^2}\\ &= 4\pi^2 a^2 \times \frac{(2 + 1/3)}{4(2\pi\ a)^2}\\ &= \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

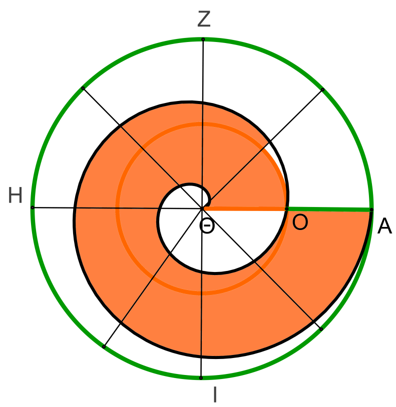


FIGURE 8 – En orange, aire balayée entre la première et la deuxième révolution

On en tire l'expression de l'aire balayée entre la première et la seconde révolution :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \frac{7}{12} \times \mathcal{C}_2\\ &= \frac{7}{12} \times \pi\ A\Theta^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_2 = 7 \times \frac{4\pi^3 a^2}{3}.}$$

Remarquons que l'aire balayée entre la première et la seconde révolution vaut 7 fois l'aire de la spirale de première révolution. Il est probable qu'Archimède ait continué de calculer les aires balayées au cours des révolutions suivantes et il serait intéressant de savoir ce qu'il a conclu de leur rapports successifs. Nous allons, quant à nous, poursuivre la discussion dans la section suivante.

3 Le calcul moderne

La méthode d'Archimède pour faire la quadrature de la spirale - découper l'aire $\mathcal{A}_1$ de la spirale de première révolution en N secteurs d'angle $2\pi/N$ encadrés par des secteurs circulaires, puis sommer ces secteurs - se ramène au calcul de la somme des carrés des N premiers entiers. En effet, d'après 2.2 page 6, nous avions :

$$\frac{4a^2\pi^3}{N^3}\sum_{n=1}^{N} n^2 \leq \mathcal{A}_1 \leq \frac{4a^2\pi^3}{N^3}\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2,$$

soit $\dfrac{4a^2\pi^3}{N^3}.\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} \leq \mathcal{A}_1 \leq \dfrac{4a^2\pi^3}{N^3}(\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 - 1)$.

Archimède précise que le découpage de la spirale de première révolution peut être effectué en un nombre N de secteurs aussi grand que souhaité. Que devient son encadrement lorsque N tend vers l'infini ?

Pour N tendant vers $+\infty$, les membres de gauche et de droite de l'inégalité précédente tendent vers une même limite qui vaut

$$\mathcal{A}_1 = \frac{4a^2\pi^3}{3}.$$

On retrouve bien que l'aire de la spirale de première révolution vaut le tiers de l'aire du cercle circonscrit. Mais comme le calcul aux limites n'existait pas encore à son époque, Archimède a dû trouver ce résultat par une méthode différente tout à fait remarquable.

Pour les scientifiques modernes, toutefois, ce passage à la limite pour un nombre infiniment grand de secteurs qui deviennent, de ce fait, infiniment petits, évoque naturellement le calcul infinitésimal et le calcul intégral.

C'est effectivement à ceux-ci que fait appel le calcul moderne de l'aire limitée par une spirale – c'est bien plus simple et cela va beaucoup plus vite !

3.1 La méthode du physicien

Rappelons que la position du point M est déterminée par ses coordonnées polaires $(\theta, r = a\theta)$. Le physicien approche l'aire limitée par la spirale et comprise dans un secteur infiniment petit par l'aire d'un secteur aussi petit limité cette fois par un arc de cercle. Il intègre ensuite cette portion d'aire approchée.

Notons $d\mathcal{A}$ la portion d'aire balayée entre l'angle θ et l'angle $\theta + d\theta$, où $d\theta$ est un accroissement infiniment petit de θ. Comme $d\theta$ est très petit, on peut considérer que le rayon r ne varie pas entre les positions θ et $\theta + d\theta$ et qu'il vaut $a\theta$.

Comme l'aire d'un secteur circulaire de rayon r et d'angle θ vaut $r^2\theta/2$, par suite, l'aire $d\mathcal{A}$ de la spirale balayée entre θ et $\theta + d\theta$ vaut approximativement :

$$d\mathcal{A} = r^2 d\theta/2 = \frac{1}{2}a^2\theta^2 d\theta$$

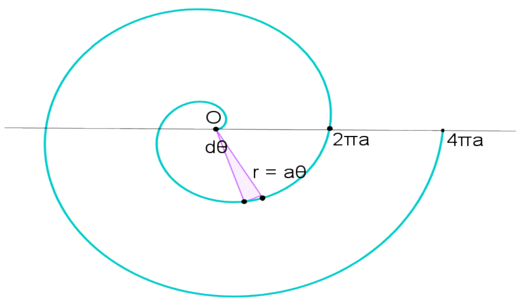


FIGURE 9 – La méthode du physicien ($d\theta$ est une variation infiniment petite de l'angle θ).

Par suite, l'aire $\mathcal{A}$ de la spirale décrite par M quand l'angle polaire varie de θ_1 à θ_2 vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau^2 d\tau \\ &= \frac{a^2}{6}(\theta_2^3 - \theta_1^3).\end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{a^2}{6}(\theta_2^3 - \theta_1^3). \tag{5}$$

Mais cette méthode d'intégration est-elle vraiment justifiée d'un point de vue mathématique ? C'est ce que nous allons démontrer à présent.

3.2 La méthode du physicien revisitée – Justification mathématique

Nous allons justifier rigoureusement le calcul du physicien. Notons $\mathcal{A}(\theta)$ l'aire de la portion de spirale comprise entre les angles 0 et θ et $\mathcal{A}$ l'aire totale de la spirale (en première révolution). Avec ces notations, on a $\mathcal{A} = \mathcal{A}(2\pi)$.

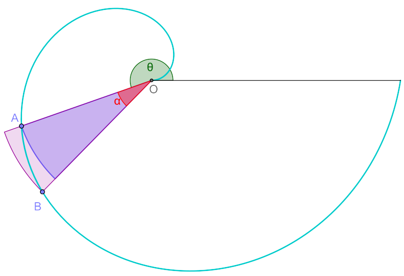


FIGURE 10 – Le calcul rigoureux

L'aire de la portion de spirale comprise entre les angles θ et $\theta + \alpha$ est $\mathcal{A}(\theta+\alpha) - \mathcal{A}(\theta)$ et nous avons l'encadrement suivant :

$$\frac{\alpha a^2 \theta^2}{2} \leq \mathcal{A}(\theta+\alpha) - \mathcal{A}(\theta) \leq \frac{\alpha a^2(\theta+\alpha)^2}{2}.$$

C'est équivalent à

$$\frac{a^2\theta^2}{2} \leq \frac{\mathcal{A}(\theta+\alpha) - \mathcal{A}(\theta)}{\alpha} \leq \frac{a^2(\theta+\alpha)^2}{2}.$$

En faisant tendre α vers 0 dans les membres de gauche et de droite de la double inégalité, on montre que $\mathcal{A}'(\theta)$ existe et vaut $a^2\theta^2/2$.

Par suite, on a $\mathcal{A} = \mathcal{A}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \mathcal{A}'(\alpha) d\alpha$, et il vient bien :

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{4a^2\pi^3}{3}.}$$

4 Discussion et conclusion

Discutons chacune des méthodes de calcul d'aires. Tout d'abord, comparons les résultats du physicien avec ceux d'Archimède.

Pour le physicien, l'aire $\mathcal{A}_1$ balayée au cours de la première révolution ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) est donnée par l'intégrale de la formule (5) page 20 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{6}a^2 \int_0^{2\pi} \tau^2 d\tau \\ &= \frac{4}{3}a^2\pi^3. \end{aligned}$$

C'est aussi ce qu'on obtient en appliquant la proposition XXIV d'Archimède en prenant la valeur $2\pi a$ pour le rayon du Premier cercle : $\frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 = \frac{4}{3}a^2\pi^3$.

Pour l'aire $\mathcal{A}_2$ comprise entre la courbe de la spirale entre la première et la seconde révolution ($2\pi \leq \theta \leq 4\pi$) et la Seconde droite, le physicien obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \int_{2\pi}^{4\pi} d\mathcal{A} \\ &= \frac{1}{2}a^2 \int_{2\pi}^{4\pi} \tau^2 d\tau \\ &= \frac{28}{3}a^2\pi^3. \end{aligned}$$

C'est aussi l'aire obtenue en appliquant la proposition XXV d'Archimède, le rayon du Second cercle valant $4\pi a$: $\frac{7}{12}\pi(4\pi a)^2 = \frac{28}{3}a^2\pi^3$.

Poursuivons le raisonnement un peu plus loin. Qu'obtient-on pour l'aire $\mathcal{A}_n$ de la portion de spirale balayée au cours de la n-ième révolution par la méthode du physicien ?

Au cours de la n-ième révolution, l'angle θ varie de $(n-1)\times 2\pi$ à $n\times 2\pi$, et l'aire $\mathcal{A}_n$, déterminée par l'équation (5), vaut :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n &= \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} d\mathcal{A} \\
&= \frac{a^2}{6}\left((2n\pi)^3 - (2(n-1)\pi)^3\right) \\
&= \frac{4\pi^3 a^2}{3}\left(n^3 - (n-1)^3\right) \\
&= \frac{4\pi^3 a^2}{3}(3n^2 - 3n + 1)
\end{aligned}$$

Les premiers termes de cette suite $\mathcal{A}_n$ montrent que l'aire de la portion de spirale balayée en n-ième révolution est toujours proportionnelle au tiers de l'aire du cercle circonscrit à la spirale de première révolution (soit $\frac{4\pi^3 a^2}{3}$) et successivement proportionnelle à 1, 7, 19, 37, 61, ... – une suite de nombres qui n'est pas, contrairement aux apparences, seulement constituée de nombres premiers car l'expression $U_n = 3n^2 - 3n + 1$ donne $169 = 13 \times 13$ au huitième terme. (La suite U_n a d'ailleurs des propriétés très intéressantes qui ne relèvent pas directement du sujet mais qui sont évoquées en annexe.)

Quand n tend vers l'infini, l'aire $\mathcal{A}_n$ se comporte comme $4\pi^3 a^2 n^2$, autrement dit comme l'aire d'un disque de rayon $2\pi a n$ – c'est le cercle circonscrit à la spirale de n-ième révolution. Ce n'est pas si surprenant pour deux raisons :
– la spirale d'Archimède a des spires très "rondes" ;
– lorsqu'on regarde le rapport des aires des portions de spirales balayées entre deux révolutions successives (par exemple la $n$ième et la $n+1$ième), on obtient :

$$\frac{\mathcal{A}_{n+1}}{\mathcal{A}_n} = \frac{3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1}{3n^2 - 3n + 1},$$

et ce rapport tend vers 1 quand n vers l'infini.

La rapidité d'obtention de n'importe quelle portion d'aire de spirale grâce à la méthode intégrale montre l'incroyable avancée conceptuelle et la puissance de cette dernière méthode. Archimède a dû déployer des trésors d'ingéniosité pour effectuer ses quadratures, et nous ne pouvons que nous émerveiller devant son intuition et sa rigueur.

5 ANNEXE

•La méthode d'exhaustion

Le terme "exhaustion" tire sa racine du mot latin *exhaurire* qui signifie "épuiserè'. Les Anglo-saxons utilisent d'ailleurs le verbe *to exhaust* en ce sens, et nous avons en français l'adjectif "exhaustif" qui signifie "épuiser tous les cas possibles".

Lors du calcul d'aires et de volumes comme de longueurs d'arc, les mathématiciens de l'Antiquité n'ayant pas l'outil intégral ont dû diviser les grandeurs pour approcher la solution cherchée par des solutions connues.

La méthode d'exhaustion, inaugurée par le mathématicien grec Antiphon [6], a été améliorée par Eudoxe de Cnide [7] et largement utilisée par Archimède.

Le postulat d'Antiphon est le suivant : en doublant le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et en répétant l'opération suffisamment de fois, on peut rendre nulle la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.

Ce postulat est critiqué car, selon le principe de divisibilité infinie, il sera toujours possible de diviser encore la différence d'aires, quel que soit le nombre des côtés du polygone.

Aussi Eudoxe le reformule-t-il autrement : si l'on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste on soustrait une partie supérieure ou égale à la moitié de ce dernier, et ainsi de suite, la grandeur restante peut être rendue aussi petite *que toute grandeur donnée*, c'est-à-dire que toute grandeur prédéfinie de même nature.

Traduisons cela en termes modernes :

Soit a une grandeur donnée. A la première itération, nous lui soustrayons plus que sa moitié, soit par exemple les deux tiers ; par suite :

$$a - \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}a.$$

A ce reste nous soustrayons encore ses deux tiers ; à la deuxième itération, il reste donc :

$$\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{9}a = \left(\frac{1}{3}\right)^2 a.$$

On trouve aisément qu'à la n-ième itération, on obtient :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} a - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} a = \left(\frac{1}{3}\right)^n a.$$

Il suffit d'itérer le procédé suffisamment de fois pour rendre ce reste plus petit que, par exemple, $a/1000$ – ici, c'est le cas dès la septième itération.

Archimède utilise ce procédé pour calculer très précisément une valeur approchée, ou encore démontrer un résultat (souvent par l'absurde).

•**La suite** $U_n = 3n^2 - 3n + 1$

La suite U_n, de premier terme $U_1 = 1$, est vraiment très particulière.

6. 480–410 av. J.-C.
7. vers 400–350 av. J.-C.

Ses quinze premiers termes sont $1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, 469, 547, 631$. On remarque que jusqu'au 8e terme, la suite n'est composée que de nombres premiers, et que le 8e terme est le carré d'un nombre premier ; elle comprend beaucoup d'autres nombres premiers dans ses termes ultérieurs.

On remarque par ailleurs que le *dernier* chiffre des termes de la suite (le chiffre des unités) semble présenter une forme de périodicité : il vaut $1-7-9-7-1$, puis à nouveau $1-7-9-7-1$, et ainsi de suite ; ceci détermine des groupes de cinq termes : $\mathbf{1}, \mathbf{7}, 1\mathbf{9}, 3\mathbf{7}, 6\mathbf{1}$, puis $9\mathbf{1}, 12\mathbf{7}, 16\mathbf{9}, 21\mathbf{7}, 27\mathbf{1}$, puis $33\mathbf{1}, 39\mathbf{7}, 46\mathbf{9}, 54\mathbf{7}, 63\mathbf{1}$,... Daëna a calculé les 25 premiers termes de la suite U_n et c'est toujours la même chose, mais nous n'avons pas démontré cette conjecture.

Par ailleurs, à partir de $n = 3$, les chiffres différents du chiffre des unités quicomposent chaque terme semblent pouvoir être obtenus à partir des chiffres du terme précédent en leur ajoutant (presque) la suite des entiers :
- dans les 5 premiers termes (dont on a exclu U_1 et U_2), le 1 (de $\mathit{1}9$) $+\mathbf{2} = 3$ (le 3 de $\mathit{3}7$), $3 + \mathbf{3} = 6$ (le 6 de $\mathit{6}1$)
- dans les 5 termes suivants, le 9 (de $\mathit{9}1$) $+\mathbf{3} = 12$ (le 12 de $\mathit{12}7$), $12 + \mathbf{4} = 16$ (le 16 de $\mathit{16}9$), $16 + \mathbf{5} = 21$ (le 21 de $\mathit{21}7$), etc.
Nous n'avons pas eu le temps de trouver une explication algébrique à cela ni de le démontrer par récurrence (si c'est faisable).

Enfin (pour nous, mais ce n'est sûrement pas la dernière surprise que réserve cette suite), nous avons découvert que les termes de la suite donnent le nombre d'hexagones compris dans ce qu'on appelle les "hexagones magiques". Ces hexagones sont composés eux-mêmes d'hexagones unitaires empilés en quinconce.

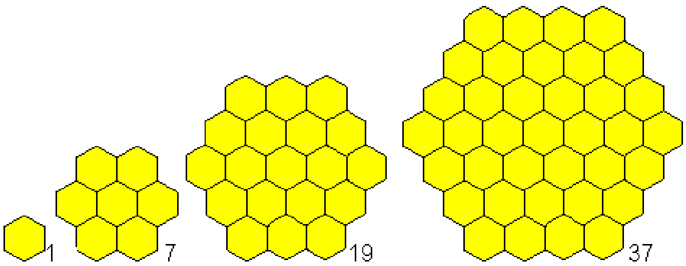


Figure 11 – Les 4 premiers hexagones magiques

Le premier hexagone magique est l'hexagone unité, composé de **1** hexagone unitaire. Le second, qui comporte deux hexagones unitaires par côté, est composé de **7** hexagones unitaires, le troisième (de trois hexagones unitaires de côté), est composé de **19** hexagones unitaires, et ainsi de suite.

6 Références

- Biographie d'Archimède http://fr.wikipedia.org/wiki/Archimède#Trait.C3.A9s
- Biographie d'Eudoxe http://fr.wikipedia.org/wiki/Eudoxe_de_Cnide

- Réflexion sur le traité *Des spirales* et la quadrature du cercle http://www.google.fr/imgres?imgurl=http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire
- La méthode d'exhaustion http://wwww.clevislauzon.qc.ca/professeurs/mathematiques/rossa/DOSSIERS/-Exhaus-Eudo.pdf