Axiomatique d'Euclide, convexité, géométries non euclidiennes

Daniel PERRIN

Introduction

Ce chapitre a une grande importance didactique. Il s'agit de savoir sur quelle axiomatique (implicite) est fondée la géométrie enseignée au collège et au lycée et même s'il en existe une. En vérité, il y a deux grandes axiomatiques possibles [1] : celle d'Euclide [2] (et de ses héritiers, notamment Hilbert) et celle des espaces affines et vectoriels. Au début des années 1970, on a tenté d'introduire cette deuxième axiomatique (au lycée). C'est l'épisode de la réforme des maths modernes. Globalement, cela a été un échec. Pour une analyse de ces tentatives, voir dans [Kahane] le chapitre concernant la géométrie.

Dans ce cours, nous allons présenter d'abord l'axiomatique d'Euclide. Il faut savoir que le travail d'Euclide est extraordinaire, un sommet des mathématiques. Cependant, nous y verrons, dès le début, des imperfections [3], notamment sur les problèmes de position, qui conduiront Hilbert, vers 1900, à en proposer une refonte. Dans un autre cours, nous discuterons l'un des axiomes essentiels de la géométrie d'Euclide : le fameux postulat des parallèles et nous verrons que son rejet a mené à la naissance de nouvelles géométries dites non euclidiennes. Par paresse, j'ai inclus assez peu de figures dans ce texte, mais le lecteur ne manquera pas de faire celles qui manquent.

1 Définitions, postulats, axiomes

Je recopie ici le début du livre I des Éléments d'Euclide (j'utilise essentiellement la traduction de G. Kayas) :

1. Il en existe d'autres, par exemple des axiomatiques à base de symétries. C'est le cas de celle de Bachmann. C'est aussi le cas de celle d'Annie Cousin-Fauconnet, très proche de l'enseignement du collège des années 1990, voir [CF].
2. On ne connaît pas les dates exactes d'Euclide, on n'est même pas sûr qu'il s'agisse d'un seul homme. Les Éléments datent du III-ième siècle avant notre ère.
3. N'oublions jamais qu'Euclide ne disposait ni du langage de la théorie des ensembles, ni même de la plupart des notations qui nous sont maintenant familières.

1.1 Définitions

Définition 1 : Le point est ce qui n'a aucune partie.

Définition 2 : Une ligne est une longueur sans largeur.

Définition 3 : Les extrémités d'une ligne sont des points.

Définition 4 : La ligne droite est une ligne dont l'extension entre deux quelconques de ses points est égale à la distance entre ces points.

Définition 5 : Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.

Définition 6 : Les extrémités d'une surface sont des lignes.

Définition 7 : La surface plane est celle dont l'extension entre deux quelconques de ses droites est égale à la surface comprise entre ces droites.

Définition 8 : Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées dans la même direction.

Définition 9 : Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

Définition 10 : Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit et la droite abaissée est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle s'arrête.

Définition 11 : L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un angle droit.

Définition 12 : L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un angle droit.

Définition 13 : Un contour est ce qui délimite quelque chose.

Définition 14 : Une figure est ce qui est compris à l'intérieur d'un ou de plusieurs contours.

Définition 15 : Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence et telle que toutes les droites issues d'un point intérieur (unique) vers la circonférence sont égales entre elles.

Définition 16 : Et ce point se nomme centre du cercle.

Définition 17 : Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

Définition 18 : Un demi-cercle est la figure comprise entre un diamètre et la circonférence d'un cercle.

Définition 19 : On appelle figures rectilignes les figures délimitées par les lignes droites ; ainsi nous appellerons :

trilatères les figures délimitées par trois lignes droites ...

Définition 20 : Parmi les figures trilatères on appelle :

triangle équilatéral la figure qui possède trois côtés égaux,

triangle isocèle celle qui a seulement deux côtés égaux,

triangle scalène celle dont les trois côtés sont inégaux.

Définition 21 : On appelle de même :

triangle rectangle tout triangle qui possède un angle droit, *triangle obtusangle* tout triangle qui possède un angle obtus,

triangle acutangle tout triangle qui a ses trois angles aigus.

Définition 22 : Parmi les figures quadrilatères, on appelle :

carré celle qui est équilatérale et rectangulaire,

rectangle celle qui est rectangulaire, et non équilatérale,

losange celle qui est équilatérale, et non rectangulaire,

parallélogramme celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire,

trapèzes tous les autres quadrilatères (sic).

Définition 23 : Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

1.2 Les postulats

Postulat 1 : De tout point à tout autre point on peut tracer une ligne droite.

Postulat 2 : Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment.

Postulat 3 : Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence.

Postulat 4 : Tous les angles droits sont égaux entre eux.

Postulat 5 : Si une droite rencontre deux droites en faisant des angles intérieurs du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux angles droits.

1.3 Les axiomes

Axiome 1 : Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.

Axiome 2 : Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.

Axiome 3 : Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

Axiome 4 : Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux.

Axiome 5 : Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.

Axiome 6 : Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles.

Axiome 7 : Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles.

Axiome 8 : Les grandeurs superposables sont égales entre elles.

Axiome 9 : Le tout est plus grand que la partie.

(Axiome[4] 10 : Deux droites ne délimitent point d'aire.)

2 Les propositions 4,5,6 du livre I d'Euclide

Pour donner une idée du contenu des Éléments, j'étudie maintenant les propositions 4,5,6 du premier livre.

2.1 La proposition 4

Il s'agit de ce qu'on appelle le premier cas d'isométrie (on disait autrefois d'égalité) des triangles. Voir ci-dessous une discussion sur l'utilisation de ce résultat.

Proposition. *Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.*

Voici, recopiée intégralement, la preuve d'Euclide :

Soient $AB\Gamma$ et ΔEZ deux triangles tels que l'on ait : $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ et $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$. Je dis qu'il est aussi $B\Gamma = EZ$ et que ces triangles sont égaux[5] et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi : $B\Gamma = EZ$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ et $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

En effet, si l'on appliquait le triangle $AB\Gamma$ sur le triangle ΔEZ de manière à faire coïncider d'abord les points A et Δ, puis les côtés AB et ΔE, le point B coïnciderait avec E, car $AB = \Delta E$. Les côtés $A\Gamma$ et ΔZ coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, de sorte que le point Γ à son tour coïnciderait avec Z, car $A\Gamma = \Delta Z$. D'autre part, les points B et E ayant déjà coïncidé, les côtés $B\Gamma$ et EZ coïncideront aussi, car si d'une part B et E et d'autre part Γ et Z coïncident mais les côtés $B\Gamma$ et EZ ne coïncident pas, deux droites pourraient délimiter une aire[6], ce qui est impossible (Ax. 10). Nécessairement donc les côtés $B\Gamma$ et EZ coïncideront et ils seront égaux (Ax. 8).

4. Cet axiome n'est sans doute pas d'origine.
5. Sans doute Euclide entend-il ici : ont même aire.
6. Le recours à cet axiome est inutile et semble bien être un ajout des commentateurs, voir la traduction anglaise de Heath.

Par conséquent, le triangle $AB\Gamma$ tout entier coïncidera avec le triangle ΔEZ tout entier et il lui sera égal, et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux, à savoir : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ *et* $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

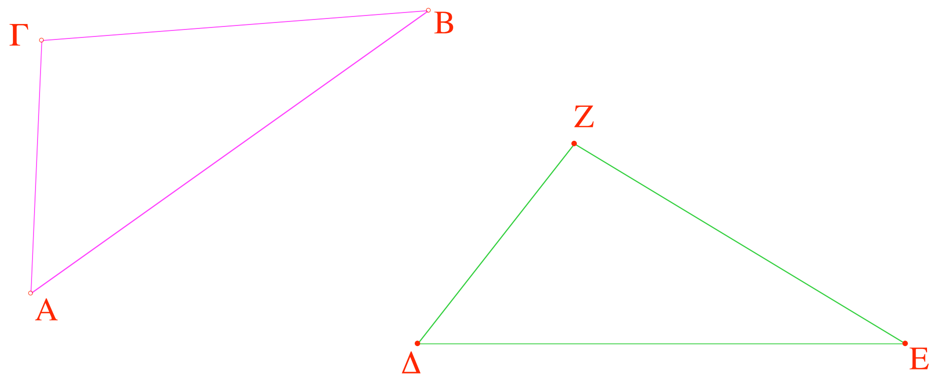


FIGURE 1 – Le premier cas d'égalité

Lorsque j'étais au collège [7], on donnait cette preuve (on parle de la méthode de superposition) en classe de cinquième et elle convainquait la plupart des élèves (et moi le premier).

Cependant cette preuve est critiquable (et on l'a fait depuis longtemps, par exemple Jacques Peletier en 1557). Parmi les difficultés :

- Que signifie "appliquer" le triangle $AB\Gamma$ sur ΔEZ ?
- Euclide ne dit rien du cas où les triangles sont indirectement isométriques.

Les remèdes possibles pour le premier point :

- Celui de Hilbert : prendre le premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus.
- Celui que je propose [8] : une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition. Pour cela, on postule l'existence d'un **groupe** de transformations qui opère transitivement sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par cette demi-droite).

7. Je vous parle d'un temps que les moins de vingt (voire de cinquante !) ans ne peuvent pas connaître.

8. Après d'autres, et je n'ai pas encore mis au propre mes idées là-dessus.

2.2 Une parenthèse : utilisation des cas d'isométrie

2.2.1 Introduction et historique

Les cas d'isométrie des triangles, ainsi que les cas de similitude, sont un des outils essentiels de la géométrie d'Euclide. Pendant deux millénaires, ils ont été aussi l'outil essentiel de tous les géomètres et des collégiens. Au début des années 1970, la réforme dite des mathématiques modernes les a bannis, parce qu'elle préférait à l'axiomatique euclidienne celle des espaces vectoriels et aux cas d'égalité l'usage des transformations. Voilà par exemple ce que disait à ce sujet Jean Dieudonné [9] :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles ...

C'est l'un des points que je conteste le plus dans cette réforme et dont les conséquences restent très importantes. Les cas d'égalité et de similitude sont réapparus en seconde (ce qui n'est pas le bon endroit mais c'était mieux que rien), en 2000. Ils viennent à nouveau d'être supprimés en 2009. Je pense, j'ai dit, j'ai écrit un peu partout (voir notamment [Kahane]), que c'est une grave erreur, mais j'ai l'impression de prêcher dans le désert ... Attention, cela ne signifie pas que je sois hostile à l'usage des transformations [10] et des groupes, bien au contraire.

Je vais expliquer ma position, avec des arguments mathématiques, puis leur illustration didactique.

2.2.2 Fondements mathématiques : transitivité

Mon point de départ est la vision de Felix Klein dans le programme d'Erlangen (sa thèse, 1873) : une géométrie c'est essentiellement la donnée d'un ensemble X et d'un groupe de transformations G de cet ensemble. Or, un problème crucial qu'on rencontre dans cette situation est de dire si G est transitif, c'est-à-dire si on peut transformer n'importe quel élément de X en n'importe quel autre par l'action du groupe. Par exemple, dans le plan, le groupe des isométries opère transitivement sur l'ensemble des points ou sur celui des demi-droites. En revanche, il n'est pas transitif sur l'ensemble des segments, ou sur l'ensemble des couples de demi-droites de même sommet.

9. L'un des fondateurs du groupe Bourbaki, (1906-1992) dans la préface de son livre intitulé *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.*

10. En vérité, aujourd'hui, il n'y a presque plus non plus de transformations (ni rotations, ni homothéties) dans les programmes, bref, plus de géométrie.

Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :

Deux éléments de X peuvent être échangés par l'action de G (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.

Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.

Or, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) **sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci**. D'ailleurs leur démonstration est une parfaite illustration de ce principe de transitivité : on envoie un sommet sur un autre, puis une demi-droite sur une autre, etc. et peu importe qui est la transformation finale. Parodiant le célèbre sketch de Pierre Dac et Francis Blanche [11] on pourrait avoir ce dialogue :

— *Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur cet autre triangle $A'B'C'$?*
— *Oui*
— *Vous pouvez le faire ?*
— *Oui*
— *Il peut le faire !*

2.2.3 Un exemple didactique

Je donne un premier exemple de cette situation pour montrer l'efficacité des cas d'isométrie des triangles, par rapport à l'usage direct des transformations. En vérité, dans le plan, comme on connaît toutes les isométries, il est souvent assez facile de repérer laquelle employer. En revanche, ce qui est plus délicat c'est de prouver qu'elle fait bien ce qu'on suppose. On y arrive, mais c'est souvent lourd et, presque toujours, inutile.

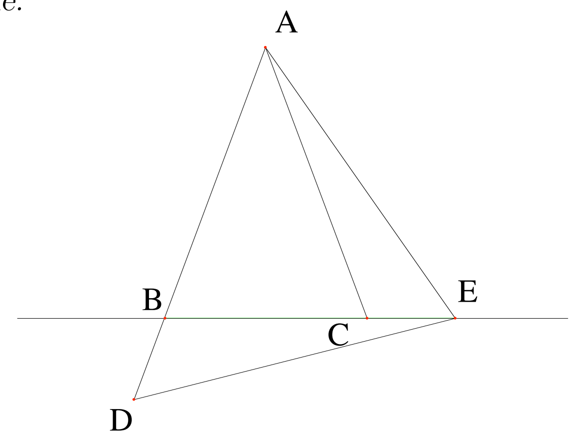
Il y a dans [DPR] et [Perrin] de nombreux exemples de cette utilisation des

11. On trouve ce sketch en video sur Internet, par exemple sur youtube, voir `http://www.youtube.com`

cas d'isométrie ou de similitude dans lesquels cette voie est plus simple que le recours aux transformations. À la lumière de ces exemples, je reprendrais volontiers la citation de Dieudonné, en la renversant :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en utilisant les "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions, afin de se ramener vaille que vaille à la transformation pertinente ...

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points D et E sur (AB) et (BC) tels que $BD = CE = AB - BC$. Montrer que ADE est isocèle.



C'est très facile avec les cas d'isométrie. En effet, on considère ACE et EBD. Ils sont isométriques (deux côtés et un angle). On a donc $AE = DE$.

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations (on peut toujours !). Il suffit de trouver la transformation qui passe de ACE à EBD. L'examen du sens des angles montre que c'est une rotation [12]. On peut donc la trouver comme composée de deux symétries en introduisant le point F symétrique de E dans la symétrie σ_1 par rapport à la médiane-hauteur de ABC. On compose ensuite par la symétrie σ_2 par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et F vient en D (la droite (BC) vient sur (AB) et précisément la demi-droite $[BC)$ sur $[BA)$ et on conclut en utilisant $BF = BD$). On en conclut que, si $\rho = \sigma_2\sigma_1$, on a $\rho(E) = D$. Par ailleurs, on a $\sigma_1(A) = A$ et $\sigma_2(A) = E$ (car le triangle ABE est isocèle en B donc la bissectrice est axe de symétrie). On a donc aussi $\rho(A) = E$ et, en définitive, $EA = DE$.

12. Et d'ailleurs, quand on sait cela, on peut préciser son centre ω. En effet, on doit avoir $\rho(E) = A$, de sorte que ω est sur la médiatrice de $[AE]$. Comme on a $AB = BE$, c'est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{ABE}$. On doit aussi avoir $\rho(C) = B$ et ω est donc sur la médiatrice de $[BC]$ donc sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. En définitive, on voit que ω doit être le centre du cercle inscrit dans ABC. Encore faut-il le prouver.

Plusieurs critiques sur cette démonstration.

0) Elle est moins visuelle : les surfaces (ici les triangles pleins) sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points.

1) Il faut déjà repérer quelle est la transformation pertinente (en tous cas, ici, on ne l'a fait qu'à partir des triangles !)

2) Elle nécessite une construction supplémentaire (le point F).

3) Elle est nettement plus compliquée (cf. la discussion sur les demi-droites) et nécessiterait de donner des indications aux élèves.

2.3 Retour à Euclide : la proposition 5

2.3.1 L'énoncé et la preuve d'Euclide

C'est une propriété bien connue du triangle isocèle :

Proposition. *Dans tout triangle isocèle les angles à la base sont égaux.*

Démonstration. (d'Euclide) On a un triangle ABC avec $AB = AC$. On prolonge les côtés $[AB]$ et $[AC]$ et on porte D, E de telle sorte qu'on ait $BD = CE$. Les triangles ADC et AEB sont isométriques ($AC = AB$, $AD = AB + BD = AE = AC + CE$ et l'angle en A est commun). On en déduit $DC = EB$, $\widehat{ADC} = \widehat{AEB}$ et $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$. Les triangles BDC et CEB sont alors isométriques ($BD = CE$, $DC = EB$ et $\widehat{BDC} = \widehat{CEB}$). On en déduit $\widehat{BCD} = \widehat{CBE}$ et, par différence d'égaux, les angles à la base du triangle isocèle.

2.3.2 Discussion

Il y a une preuve bien plus simple, due à Pappus, qui consiste à dire que les triangles ABC et ACB sont égaux ($AB = AC$, $AC = AB$ et l'angle $\widehat{A}$ commun). On en déduit $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Je ne sais pas pourquoi Euclide ne fait pas ça. Peut-être la répugnance à utiliser le même triangle avec deux ordres d'énumération des sommets ? C'est sans doute à ce type de preuve que Dieudonné pense dans la diatribe citée plus haut.

2.4 La proposition 6

2.4.1 L'énoncé et la preuve d'Euclide

C'est la réciproque de la précédente :

Proposition. *Si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux.*

Démonstration. (d'Euclide) On a ABC avec $\widehat{B} = \widehat{C}$. On montre $AB = AC$. On raisonne par l'absurde en supposant par exemple $AB > AC$ et on porte D tel que $BD = AC$. Les triangles DBC et ACB sont isométriques. On en déduit $DC = AB$ "et les deux triangles sont égaux, c'est-à-dire que le plus petit de ces triangles serait égal au plus grand, ce qui est absurde".

2.4.2 Discussion

La fin de la preuve est très suspecte. Ce qui est sous-jacent est sans doute un argument d'aire, mais non explicité. On peut aussi utiliser le fait que, si D est entre A et B on a $\widehat{BCD} < \widehat{BCA}$ d'où une contradiction. Mais pour que cela soit correct, il faut ajouter un axiome supplémentaire, par exemple le suivant :

Si on a deux angles égaux $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DCB}$ avec A, D du même côté de (BC) les demi-droites $[CA)$ et $[CD)$ sont égales (et donc ici, $A = D$).

3 Les questions de position : l'axiomatique de Hilbert

Des difficultés du type de celles rencontrées dans la preuve de la proposition 6 et plus généralement l'imprécision d'Euclide sur les questions de position ont conduit David Hilbert, vers 1900, à une refonte de l'axiomatique d'Euclide que nous allons évoquer maintenant.

3.1 Objectifs didactiques

La problématique de ce paragraphe concerne les propriétés de position (au dessus, en dessous, de part et d'autre, du même côté, à l'intérieur, etc.) que l'on peut "lire sur la figure" (on a vu qu'Euclide le faisait ci-dessus). C'est toujours un point épineux dans l'enseignement des mathématiques. Au niveau du collège, mon opinion est qu'on peut effectivement se contenter de constater les propriétés de position sur la figure. Cela gêne toujours certains collègues qui disent : *Mais, si on demande aux élèves de lire sur la figure, à quoi sert de leur demander de prouver d'autres propriétés ?* Je leur réponds deux choses :

• Je fais une différence, au moins à ce niveau, entre lire les propriétés [13] "fermées" (alignement, concours, égalités d'angles ou de longueurs) et les propriétés "ouvertes" (du même côté, à l'intérieur, etc.).

• Le professeur scrupuleux et angoissé peut [14], lui, toujours établir rigoureusement (pour son usage personnel) les assertions de position. C'est ce dont je veux vous convaincre dans les paragraphes suivants. Il suffit pour cela d'avoir précisé soigneusement les axiomes et de faire un petit effort.

Attention, je répète que ce que je vais expliquer maintenant est à votre usage, comme futurs professeurs, et absolument pas destiné aux élèves. Ce serait un contre-sens de vous précipiter dans une classe de collège et de démontrer les assertions de position évidentes sur la figure (vous risqueriez de provoquer une émeute !). Au contraire, mon objectif est de vous convaincre, sur quelques exemples, que c'est toujours possible et que donc ce n'est pas un drame, ni un crime de lèse-mathématiques que de lire certaines choses sur la figure, puisque si l'on vous y obligeait [15], vous seriez capables de tout démontrer.

3.2 Les axiomes (Hilbert-Lion)

Dans ce qui suit j'utilise les axiomes de Hilbert [16] revus par Lion (voir [Lion]) et par moi-même. J'utilise les notations du polycopié [DHP] (minuscules pour les points, majuscules pour les parties). Attention, ce n'est pas du tout la tradition dans l'enseignement du second degré.

3.2.1 Axiome d'incidence

3.1 Axiome. *Il existe un ensemble non vide E appelé* **plan***, dont les éléments sont appelés* **points** *et un ensemble de parties non vides de E appelées* [17] **droites** *vérifiant la propriété suivante :*

Par deux points distincts a, b passe une droite et une seule notée (ab).

On peut déjà en déduire une proposition :

3.2 Proposition. *Deux droites distinctes ont au plus un point commun.*

13. Ces mots font référence à la formulation analytique des propriétés et la distinction entre celles qui sont définies par des égalités ou des inégalités. Par exemple, un point (x, y) est sur une droite s'il vérifie $ax + by + c = 0$, il est d'un côté s'il vérifie $ax + by + c > 0$ ou < 0.

14. Il peut le faire !

15. Par exemple, si un jury de CAPES vous le demandait !

16. David Hilbert (1862-1943). Son ouvrage *Grundlage der Geometrie* paraît en 1899.

17. Mais Hilbert signale qu'on pourrait aussi bien parler de tables et de chopes de bière.

Démonstration. En effet, si elles en avaient deux, disons a, b, on aurait une contradiction avec l'axiome 3.1.

3.3 Définition. *Deux droites D, D' sont dites parallèles si on a $D = D'$ ou $D \cap D' = \emptyset$.*

3.2.2 Axiome d'ordre sur les droites

3.4 Axiome. *Chaque droite D est munie d'une*[18] *relation d'ordre total sans plus petit ni plus grand élément.*

Rappelons qu'une relation d'ordre sur l'ensemble D est une relation notée $x \leq y$, qui est réflexive, transitive et telle que $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$. L'ordre est dit total si l'on a, pour tous x, y, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

Cet axiome permet de définir le segment $[ab] = \{x \in (ab) \mid a \leq x \leq b\}$, ainsi que la demi-droite $[ab) = \{x \in (ab) \mid a \leq x\}$ (si $a < b$). Il y a deux demi-droites opposées d'origine a sur une droite donnée. On a aussi la notion de partie convexe.

3.5 Proposition. *Une demi-droite et une droite sont des ensembles infinis*[19].

Démonstration. Il suffit de faire le cas d'une demi-droite. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une demi-droite finie $[oa)$ avec $o < a$. Cette demi-droite n'a pas de plus grand élément (sinon la droite en aurait un). Cela contredit le lemme suivant :

3.6 Lemme. *Un ensemble X fini non vide totalement ordonné admet un plus grand élément.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $|X|$. C'est évident pour $|X| = 1$. Supposons la propriété établie pour $|X| \leq n$ et soit X de cardinal $n+1$. On considère un point $a \in X$. S'il est le plus grand on a fini. Sinon, on considère $Y = \{x \in X \mid x > a\}$. Il est non vide, fini et de cardinal $\leq n$. Il admet donc un plus grand élément b, qui est aussi le plus grand de X. En effet, si x est dans X, comme l'ordre est total il est soit $\leq a$, donc *a fortiori* $\leq b$, soit $> a$, donc dans Y, donc $\leq b$.

18. Il y en a automatiquement deux, opposées l'une de l'autre. En choisir une revient à orienter la droite. Si l'on préfère, on peut aussi se contenter de définir la relation "entre". Ainsi le segment $[ab]$ sera l'ensemble des points m qui sont entre a et b.

19. En revanche pour qu'un segment non trivial soit infini, il faut un axiome. **On supposera désormais** que tout segment $[ab]$ avec $a \neq b$ contient au moins un point c distinct de a et b. Exercice : montrer qu'alors il est infini.

3.2.3 Axiome des demi-plans

3.7 Axiome. *Une droite D partage le plan en trois parties non vides disjointes : D et deux demi-plans ouverts notés E^+ et E^-. Deux points a, b sont dans le même demi-plan (on dit aussi "du même côté de D") si et seulement si $[ab]$ ne rencontre pas D.*

On définit aussi les demi-plans fermés $E^+ \cup D$ et $E^- \cup D$ que l'on notera aussi $\overline{E^+}$ et $\overline{E^-}$.

3.8 Corollaire. *Soit D une droite et soient $a, b \notin D$. Alors, a et b sont dans des demi-plans différents (on dit aussi "de part et d'autre" de D) si et seulement si $[ab]$ rencontre D.*

Démonstration. C'est une conséquence évidente de l'axiome.

Les résultats suivants sont énoncés avec E^+ mais valent aussi avec E^-, bien entendu.

3.9 Proposition. *Soit D une droite et E^+, E^- les demi-plans limités par D. Si a et b sont dans E^+, $[ab]$ est contenu dans E^+ (qui est donc convexe).*

Démonstration. Notons déjà que $[ab]$ ne rencontre pas D puisque a et b sont du même côté de D. Si $x \in [ab]$ est dans E^-, il est différent de a, donc il existe $y \in D$ entre a et x. Cela contredit le point précédent.

3.2.4 Le lemme de la demi-droite

3.10 Proposition. *1) Soit D une droite, o un point de D et a un point de E^+. Alors, la demi-droite $[oa)$ (resp. $]oa)$) est entièrement contenue*[20] *dans $E^+ \cup D$ (resp. E^+).*

2) La demi-droite opposée est contenue dans $E^- \cup D$.

3) Soient D et Δ deux droites sécantes en o. L'intersection d'un demi-plan fermé limité par D avec Δ est une demi-droite d'origine o.

Démonstration. 1) Il suffit de montrer l'assertion sur la demi-droite ouverte. Soit b un point de cette demi-droite. On a donc $b \neq o$ et on peut supposer $b \neq a$ (sinon le résultat est évident). Si b n'est pas dans E^+, comme il n'est pas sur D (car la droite (ab) coupe D en le seul point o en vertu de 3.2), il est dans E^- et $[ab]$ rencontre D, nécessairement en o par 3.2. Mais alors, o est entre a et b et cela contredit le fait que b est dans la demi-droite $]oa)$.

2) Si un point b de la demi-droite opposée (ouverte) était dans E^+, le point o y serait aussi par convexité et c'est absurde.

20. Les demi-plans sont donc infinis.

3) Appelons a un point de $E^+ \cap \Delta$ (il en existe, sinon o serait un plus petit ou un plus grand élément pour Δ). Alors, on a $\Delta \cap (E^+ \cup D) = [oa)$. En effet, par 1), on sait que $[oa)$ est inclus dans l'intersection et par 2) que l'intersection ne contient aucun point de la demi-droite opposée.

3.11 Corollaire. *Soit D une droite et E^+, E^- les demi-plans limités par D. Si a est dans D et b dans E^+, $]ab]$ est contenu dans E^+*

3.2.5 Le lemme de la parallèle

3.12 Proposition. *Soient D, D' des droites parallèles et distinctes et soit $a \in D'$. La droite D' est toute entière dans le demi-plan ouvert limité par D qui contient a.*

Démonstration. Sinon, D' contiendrait soit un point de D, ce qui est absurde puisqu'elles sont parallèles, soit un point b de l'autre demi-plan. Mais alors $[ab]$ rencontrerait D, donc D' aussi et c'est encore absurde.

3.2.6 Le lemme de la bande

3.13 Définition. *Soient D, D' des droites parallèles et distinctes. La bande $\mathcal{B}(D, D')$ limitée par D, D' est l'intersection des demi-plans fermés limités par D et D' et contenant respectivement D' et D.*

3.14 Proposition. *Soient D, D' des droites parallèles et distinctes et soit Δ une sécante qui coupe D et D' en a et a' respectivement. Alors, on a $(aa') \cap \mathcal{B}(D, D') = [aa']$.*

Démonstration. Cela résulte de 3.10.3.

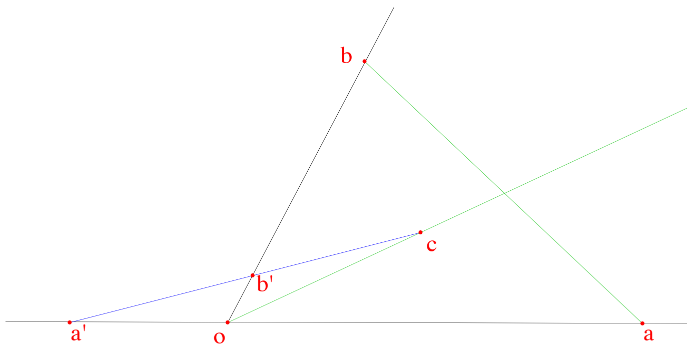
3.3 Les secteurs

Nous donnons maintenant la définition des secteurs. Les secteurs sont les objets géométriques qui vont donner naissance aux angles (de même que les segments donnent naissance aux longueurs).

3.15 Définition. *Soient $\alpha = [oa)$ et $\beta = [ob)$ deux demi-droites d'origine o, non portées par la même droite. Soient U^+ (resp. V^+) le demi-plan (fermé) limité par (oa) contenant b (resp. par (ob) contenant a) et soient U^- et V^- les demi-plans fermés opposés. On appelle* **secteur saillant** *(resp.* **secteur rentrant***) défini par ces demi-droites l'intersection $U^+ \cap V^+$ (resp. l'union $U^- \cup V^-$). Le secteur saillant est noté $[\widehat{aob}]$ ou encore $[\widehat{\alpha, \beta}]$. Le point o est le* **sommet** *du secteur, les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$ sont ses* **côtés***. Si* *les demi-droites sont confondues on convient que le secteur saillant qu'elles définissent est égal à $[oa)$ et le secteur rentrant à E tout entier. Si elles sont opposées, on convient qu'elles définissent deux secteurs, considérés à la fois comme saillants et rentrants : les deux demi-plans limités par (oa). On parle alors de secteurs* **plats**.

3.16 *Remarques.*
1) Si D est une droite passant par o, il résulte de 3.10 que l'une au plus des deux demi-droites limitées par o est dans le secteur saillant $[\widehat{aob}]$. Précisément, une demi-droite $[om)$ est dans le secteur $[\widehat{aob}]$ dès que l'un de ses points y est (cf. 3.10).
2) Si $[oa')$ est la demi-droite opposée [21] à $[oa)$, la réunion des secteurs $[\widehat{aob}]$ et $[\widehat{a'ob}]$ est le demi-plan limité par (oa) qui contient b, et leur intersection est $[ob)$.

Le lemme principal sur les secteurs saillants (dont on verra l'utilité dans ce qui suit) est le suivant [22]



3.17 Lemme. *Soit $[\widehat{aob}]$ un secteur saillant et soit c un point de ce secteur, non situé sur les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$. Alors, les points a et b sont situés de part et d'autre de la droite (oc) et, plus précisément, le segment $[ab]$ coupe la demi-droite $[oc)$.*

Démonstration. Montrons que a et b sont de part et d'autre de (oc). L'idée est d'introduire un point a' de la demi-droite opposée à $[oa)$. Comme c et a sont du même côté B^+ de (ob), c et a' sont de part et d'autre et donc $[a'c]$ coupe (ob) en b'. De plus b' est dans $[ob)$ car tous les points sont dans A^+ (demi-plan limité par (oa) qui contient b, c). Mais alors, si C^+ (resp. C^-) est

21. En vertu de 3.5 elle contient bien un point $a' \neq o$.
22. On s'inspire fortement ici du livre d'Annie Cousin-Fauconnet [CF].

le demi-plan limité par (oc) qui contient a (resp. l'autre), comme a' est dans C^-, $[ca')$ aussi, donc b' aussi, donc $[ob')$ aussi et donc b est dans C^- et on a gagné.

On en déduit que $[ab]$ coupe la droite (oc) et comme tous les points sont dans A^+, il coupe la demi-droite $[oc)$.

3.4 Un exemple d'utilisation de ces axiomes : triangles

3.18 Définition. *On appelle* **triangle** *la donnée de trois points a, b, c non alignés. Les côtés du triangle sont les segments $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ et ses sommets sont a, b, c. Le triangle plein est l'intersection des demi-plans limités par (bc), (ca), (ab) et contenant respectivement a, b, c. C'est un convexe. L'intérieur du triangle est la partie de cet ensemble non située sur les côtés*[23].

3.19 Proposition. *1) (Axiome de Pasch) Soit abc un triangle et D une droite passant par $m \in]bc[$. Alors D coupe $[ab]$ ou $[ac]$.*

2) Soit abc un triangle et o un point intérieur au triangle. La demi-droite $[ao)$ coupe le segment ouvert $]bc[$.

3) Soit abc un triangle et soient b' et c' des points de $]ac[$ et $]ab[$ respectivement. Alors, les segments $[bb']$ et $[cc']$ se coupent en un point g et la droite (ag) coupe le segment $[bc]$.

Démonstration. 1) C'est évident si D est égale à (bc). Sinon, les points b et c sont de part et d'autre de D. Si D ne coupe pas $[ab]$, les points a et b sont du même côté de D, donc a et c de part et d'autre. Il en résulte que $[ac]$ coupe D.

2) C'est 3.17 dont on voit ici l'utilité.

3) (Noter que les droites sont distinctes, sinon le triangle est aplati). On considère la droite (bb'). Comme $[ac]$ coupe (bb') en b', a et c sont de part et d'autre de (bb'). Comme c' est dans $[ba]$ il est du même côté que a par rapport à (bb'), donc de l'autre côté que c, donc $[cc']$ coupe (bb') en un point g qui est le point d'intersection (unique) des droites (bb') et (cc'). Le même argument dans l'autre sens montre que $[bb']$ coupe (cc'). Par unicité de l'intersection des droites, le point g est bien sur les deux segments.

Pour voir que (ag) coupe $[bc]$ il suffit de voir que b, c sont de part et d'autre de (ag). Or, c et c' sont de part et d'autre (car $[cc']$ coupe (ag) en g). Mais alors, la demi-droite $[ac')$, qui contient b, est toute entière du côté de c', donc b et c sont de part et d'autre.

3.20 *Remarque.* La proposition précédente s'applique en particulier lorsque b' et c' sont les milieux de $[ac]$ et $[ab]$ et c'est un point essentiel pour prouver le

23. Comme les segments sont infinis, l'intérieur d'un triangle est infini aussi.

concours des médianes. Cet exemple est très révélateur des principes exprimés au début :

• Pour un professeur, il est normal de se poser ces questions.

• Il n'est pas difficile de leur apporter une réponse rigoureuse à partir des axiomes exprimés ci-dessus.

• Bien entendu, il n'est pas question de perturber les collégiens avec ce genre de considérations (sauf si la question était soulevée par l'un d'eux, à qui on pourrait répondre directement).

3.5 Quadrilatères

On adoptera ici la définition suivante [24] :

3.21 Définition. *Soit (a, b, c, d) un quadruplet de points du plan,* **distincts et tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés**. *Le* **quadrilatère** Q *associé à ce quadruplet est la réunion des segments $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$ et $[da]$. Les points a, b, c, d sont les* **sommets** *de Q, les segments $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$ et $[da]$ ses* **côtés** *et les segments $[ac]$ et $[bd]$ ses* **diagonales**. *Deux sommets (resp. deux côtés) sont dits* **adjacents** *s'ils sont les extrémités d'un côté (resp. s'ils ont un sommet en commun). Deux sommets (resp. deux côtés) non adjacents seront dits* **opposés**. *On notera $Q = abcd$.*

Le point-clé est le suivant :

3.22 Proposition-Définition. *Soit $Q = abcd$ un quadrilatère. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Si $[mn]$ est un côté de Q, les deux autres sommets sont dans le même demi-plan limité par (mn).

ii) Les diagonales de Q se coupent.

Si ces conditions sont vérifiées, on définit le quadrilatère plein $K(Q)$ associé à abcd comme l'intersection des quatre demi-plans limités par les côtés de Q et contenant les autres sommets. C'est une partie convexe et on dit que Q est **convexe**.

Démonstration. $i) \Longrightarrow ii)$ Considérons le secteur $[\widehat{abc}]$. Par hypothèse, d est dans ce secteur, donc la demi-droite $[bd)$ coupe le segment $[ac]$ (c'est 3.17 qui montre ici encore son intérêt). Le même raisonnement appliqué au secteur $[\widehat{bad}]$ montre que $[ac)$ coupe $[bd]$. Les droites (ac) et (bd) se coupent donc en un point qui est dans les deux segments $[ac]$ et $[bd]$.

$ii) \Longrightarrow i)$ Considérons par exemple $D = (ab)$. Si c et d étaient de part et d'autre de D, les segments $[ac]$ et $[bd]$ seraient de part et d'autre par 3.11, donc ne se couperaient pas.

24. C'est ma proposition, mais il y a d'autres possibilités.

3.23 Corollaire. *Soit $Q = abcd$ un quadrilatère convexe et soient m, n deux points distincts situés sur les côtés de Q. On a $K(Q) \cap (mn) = [mn]$.*

Démonstration. Comme $K(Q)$ est convexe, il est clair qu'il contient $[mn]$. Inversement, soit p un point de $K(Q)$ situé sur (mn). Supposons par exemple que m est sur le côté $[ab]$. Alors, $K(Q)$ est tout entier dans le demi-plan limité par (ab) qui contient c, d. Donc n est dans ce demi-plan. Comme l'intersection du demi-plan et de (mn) est une demi-droite limitée par m, c'est $[mn)$. Comme $K(Q)$ est dans le demi-plan, on voit que $K(Q) \cap (mn)$ est contenu dans $[mn)$. Mais le raisonnement marche de la même manière avec n et on a gagné.

3.24 Proposition. *Les parties $K(Q)$ (et son intérieur) et $E - K(Q)$ sont connexes.*

Démonstration. Pour $K(Q)$ c'est parce qu'il est convexe. Pour l'extérieur, on montre qu'on peut joindre deux points m, n quelconques par une ligne brisée. C'est évident si m, n sont tous deux dans le mauvais demi-plan par rapport à (ab) : on les joint par $[mn]$. Si m est dans ce demi-plan et n dans le mauvais pour (bc) (ou (ad)) on prend a' et c' sur les demi-droites opposées à $[ba)$ et $[bc)$ et on regarde le secteur $[\widehat{a'bc'}]$. On prend dedans un point p et on joint m, n par le chemin $[mp] \cup [pn]$. Enfin, si n est du mauvais côté de $[cd]$ on fait deux fois cette manœuvre.

3.5.1 Le mal-aimé

On appelle parallélogramme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (il est alors convexe). Lorsqu'on a introduit la notion de distance, on montre que ses côtés opposés sont égaux (de même longueur) et que ses diagonales se coupent en leur milieu [25] . Inversement :

3.25 Proposition. *Soit abcd un quadrilatère* **convexe***. On suppose que les côtés $[ab]$ et $[cd]$ sont parallèles et égaux. Alors abcd est un parallélogramme. Pour vérifier la condition de convexité, il suffit de montrer que le segment $[ac]$ rencontre la droite (bd) ou que $[bd]$ rencontre (ac).*

Démonstration. On mène la parallèle à (ad) passant par b. Elle n'est pas parallèle à (cd) (sinon (ad) et (cd) seraient parallèles par transitivité, attention ici on utilise le cinquième postulat d'Euclide, voir plus loin), donc elle coupe (cd) en un point c'. Le quadrilatère $abc'd$ est un parallélogramme, de sorte

25. Il faut pour cela avoir précisé quelques autres axiomes pour disposer notamment des cas d'isométrie. Voir [Euclide] ou [Hilbert].

qu'on a $ab = dc' = dc$. Il suffit de montrer[26] que c et c' sont du même côté de d, ou encore de (ad). Mais, par la convexité de $abcd$, on sait que c est du côté de b par rapport à (ad) et c' y est aussi par le lemme de la parallèle.

Le point supplémentaire[27] vient du lemme de la bande 3.14. En effet, si par exemple $[ac]$ rencontre (bd) en e, le point e est dans la bande limitée par (ab) et (cd), donc il est aussi dans le segment $[bd]$.

3.26 *Remarque.* Bien entendu, le résultat est inexact si l'on ne suppose pas que le quadrilatère est convexe (il peut être croisé). Le fait de devoir vérifier cette condition (ou d'être obligé de la lire sur la figure) est la raison pour laquelle les professeurs de collège n'aiment pas ce théorème.

3.5.2 Une application

La proposition suivante est alors facile avec le mal-aimé :

3.27 Proposition. *Soit $abcd$ un parallélogramme et soient m, n les milieux de $[ab]$ et $[cd]$. Alors $amcn$ est un parallélogramme.*

Démonstration. Cela résulte du théorème mal-aimé 3.25. Il suffit de montrer que $[mn]$ rencontre (ac) donc que m, n sont de part et d'autre de (ac). Mais, comme $abcd$ est un parallélogramme, ses diagonales se coupent et b et d sont de part et d'autre de (ac). Comme m est du côté de b et n du côté de d par le lemme de la demi-droite, on a gagné.

On peut aussi montrer le résultat en utilisant le lemme suivant :

3.28 Lemme. *Soit $Q = abcd$ un quadrilatère convexe et soient m, n des points situés respectivement sur $[ab]$ et $[cd]$. Alors, le quadrilatère $amcn$ est convexe.*

Démonstration. On montre d'abord que m, n sont de part et d'autre de (ac). C'est le cas pour b et d par convexité de $abcd$, donc aussi pour les demi-droites $[cd)$ et $[ab)$ et on a gagné. Il en résulte que $[mn]$ coupe (ac) en e. Mais comme e est dans $K(Q)$ et dans (ac), il est dans $[ac]$ et les diagonales se coupent.

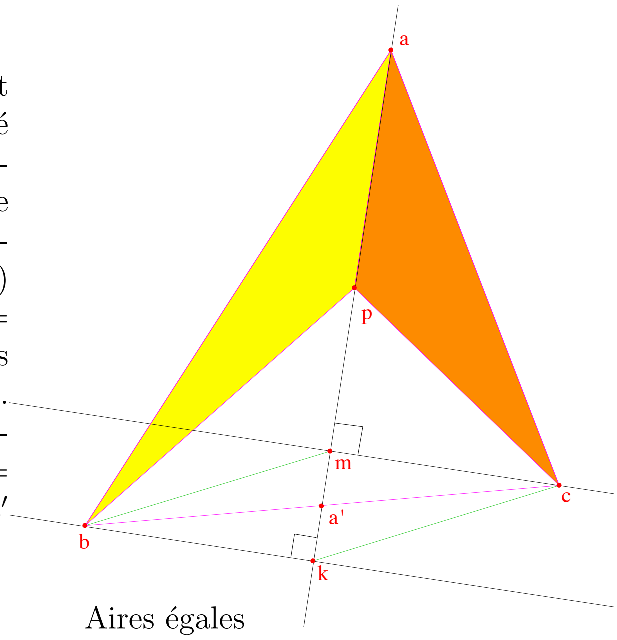
---

26. Ici on utilise un axiome qui n'a pas été formulé et qui dit que sur une demi-droite $[oa)$ il n'y a qu'un point à une distance donnée de o.

27. L'exemple d'une "pointe de flèche" montre que cela ne suffit pas si l'on ne suppose pas les côtés (ab) et (cd) parallèles.

3.5.3 Un exemple

Soit abc un triangle et p un point du plan. On suppose qu'on a l'égalité d'aires $\mathcal{A}(abp) = \mathcal{A}(acp)$ et on va montrer que p est sur la médiane issue de a. Soient k et m les projetés orthogonaux de b et c sur (ap). Les droites (bk) et (cm) sont parallèles et on a $bk = cm$ comme hauteurs de deux triangles de même aire ayant la même base ap. On en déduit que $bkcm$ est un parallélogramme. Ses diagonales $(mk) = (ap)$ et (bc) se coupent en leur milieu a' et on a le résultat.



Aires égales

Que pensez-vous de ce raisonnement ?

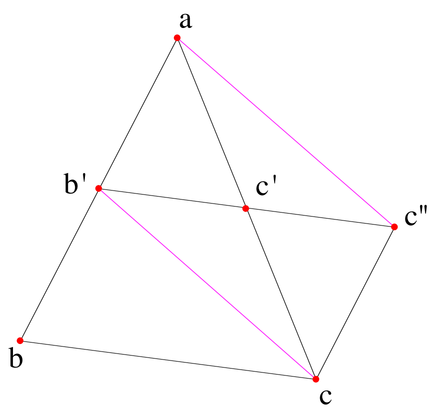
3.5.4 La droite des milieux

Il y a beaucoup de preuves du théorème de la droite des milieux. En voici une qui utilise le mal-aimé :

3.29 Théorème. *Soit abc un triangle, b' et c' des points situés respectivement sur $[ab]$ et $[ac]$. On suppose que b' est le milieu de $[ab]$ et que $(b'c')$ est parallèle à (bc). Alors c' est le milieu de $[ac]$.*

Démonstration.

On trace la parallèle à (ab) passant par c qui coupe $(b'c')$ en c''. Le quadrilatère $bb'c''c$ est un parallélogramme. On en déduit $bb' = cc'' = ab'$, de sorte que $ab'cc''$ est un parallélogramme (par le mal-aimé, légitime ici puisque les diagonales de ce quadrilatère se coupent). Mais alors, ses diagonales se coupent en leur milieu et c' est milieu de $[ac]$.



La droite des milieux

3.5.5 Un autre exemple : l'orthocentre

Dans l'exercice qui suit, on suppose qu'on a défini les notions d'angle et d'orthogonalité et qu'on a prouvé que la somme des angles d'un triangle est égale à π.

3.30 *Exercice.* 1) Soit abc un triangle et soit a' le projeté orthogonal de a sur (bc). Montrer que l'angle $\widehat{abc}$ est aigu (resp. droit, resp. obtus) si et seulement si le point a' est sur la demi-droite $]bc)$ (resp. en b, resp. sur la demi-droite opposée à $[bc)$).

2) Montrer que l'orthocentre de abc est intérieur au triangle si et seulement si abc a trois angles aigus.

4 Références

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin (1995).

[DHP] DAVID Marie-Claude, HAGLUND Frédéric, PERRIN Daniel, Polycopiés de déométrie affine et euclidienne.

[DPR] DUPERRET Jean-Claude, PERRIN Daniel, RICHETON Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 2001.

[Euclide] EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Kayas, Éditions du CNRS (1978).

[Hartshorne] HARTSHORNE Robin, Geometry : Euclide and beyond, Springer, 2000.

[Hilbert] HILBERT David, *Les fondements de la géométrie*, Dunod (1971).

[Kahane] KAHANE Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob (2002).

[Lion] LION Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert (2001).

[Perrin] PERRIN Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.* Repères IREM, 53, p. 91-110, 2003.

Voir aussi ma page web :
`http://www.math.u-psud.fr/ perrin/`