Sur quelques développements décimaux

Daniel PERRIN

Ce texte répond à un avis de recherche proposé dans les Chantiers de pédagogie mathématique (le bulletin de l'APMEP d'Ile de France) d'octobre 2020.

1 Le théorème

1.1 Théorème. *Le développement décimal de l'inverse du nombre* $x_n = (99\dots 9)^2$*, avec* n *chiffres 9, est de la forme* $0,AA\dots A\dots$ *où la période* A *est la suite de chiffres :*

$$00\dots 0\ 00\dots 1\ 00\dots 2\ 00\dots 3\ \dots\ 99\dots 96\ 99\dots 97\ 99\dots 99$$

c'est-à-dire la suite de tous les $10^n - 1$ *paquets de* n *chiffres allant de* $00\dots 000$ *à* $99\dots 999$ *à l'unique exception de* $99\dots 998$*.*

2 La preuve

Notons déjà que l'on a $99\dots 9 = 10^n - 1$ si le premier membre admet n chiffres 9, donc $x_n = (10^n - 1)^2$.

On appelle a l'entier qui correspond à l'écriture A en système décimal :

$$a = \sum_{p=1}^{10^n-3} p\, 10^{n\times(10^n-p-2)} + 10^n - 1.$$

La différence entre a et A est la présence de $2n-1$ zéros en tête de A.

Le point crucial est de montrer le lemme :

2.1 Lemme. *On a la formule :*

$$a \times (10^n - 1) = \sum_{k=0}^{10^n-2} 10^{nk} := S.$$

Démonstration. Le premier membre s'écrit :

$$a \times (10^n - 1) = \sum_{p=1}^{10^n-3} \left(p10^{n(10^n-p-1)} - p10^{n(10^n-p-2)}\right) + (10^n - 1)^2.$$

Le premier terme du premier membre ($p = 1$) donne le terme $10^{n(10^n-2)}$ de S. Ensuite, dans les termes correspondant à p et $p + 1$, le terme en $10^{n(10^n-p-2)}$ a pour coefficient $p + 1 - p$, donc 1. Avec tous les termes de $p = 1$ à $10^n - 3$, à l'exception de la deuxième moitié du dernier terme, on obtient la somme $\sum_{k=2}^{10^n-2} 10^{nk}$. Il reste à regarder les termes de la fin. Le seul terme restant de la somme est $-(10^n - 3)10^n$. Avec le terme supplémentaire $(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \times 10^n + 1$ on obtient $10^n + 1$ et on a le résultat.

On peut alors prouver le théorème. Considérons le nombre y_n donné par le développement décimal périodique $0, AA \dots A \dots$. Il s'agit de montrer qu'on a $y_n = \dfrac{1}{x_n}\cdot$ La période A comporte $N = n \times (10^n - 1)$ chiffres. En multipliant le développement par 10^N (voir par exemple [1] Remarques 2.29) on "sort" une période et on a $10^N y_n = a, AA \dots A \dots = a + y_n$, autrement dit $(10^N - 1)y_n = a$ et on aura le résultat si l'on montre qu'on a $10^N - 1 = ax_n$.

Mais l'identité $u^r - 1 = (u - 1)(1 + u + \cdots + u^{r-1})$, appliquée avec $u = 10^n$ et $r = 10^n - 1$ donne

$$10^N - 1 = (10^n - 1)(1 + 10^n + 10^{2n} + \cdots + 10^{n\times(10^n-2)}) = (10^n - 1)S$$

et le lemme donne le résultat : $10^N - 1 = (10^n - 1)^2 a = ax_n$.

2.2 *Remarques.* 1) Pour d'autres résultats amusants sur les quatre-vingt-unièmes, voir :
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Divers/Fontes.pdf`

2) L'avis de recherche demandait de proposer d'éventuelles généralisations. Je n'en ai pas trouvé de pertinentes (hormis la variante du théorème dans une autre base, mais elle n'est pas très exaltante). Ainsi, le développement de $1/9^3$ admet une période de longueur 81 dont la régularité ne saute pas aux yeux.

Références

[1] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.