Un joli problème d'arithmétique

Daniel PERRIN

0. Le problème.

La remarque suivante m'a été signalée par mon collègue physicien Pierre Fontes.

Si N est le nombre entier 12345679 (tous les chiffres, dans l'ordre, sauf 0 et 8), ses multiples ont des propriétés amusantes. Donnons une première liste : $2N = 24691358$, $3N = 37037037$, $4N = 49382716$, $5N = 61728395$, $6N = 74074074$, $7N = 86419753$, $8N = 98765432$, $9N = 111111111$, puis $10N = 123456790$, $11N = 135802469$, $12N = 148148148$, $13N = 160493827$, etc. Que les écritures de $3N, 6N, 12N$ et plus encore de $9N$ soient remarquables, voilà qui est clair. Pour les autres, leur particularité est la suivante : on constate que kN, pour $k < 9$ est formé de 8 chiffres distincts non nuls, l'unique chiffre manquant étant le complément à 9 de k. De plus, les chiffres de $8N$ (resp. de $7N$, resp. de $6N$, resp. de $5N$) sont les compléments à 10 de ceux de N (resp. de $2N$, resp. de $3N$, resp. de $4N$), sauf le chiffre des unités qui est le complément à 11. Enfin, pour les suivants, on voit réapparaître des suites de chiffres déjà vues mais décalées (comparer par exemple $11N$ et $2N$ ou $13N$ et $4N$). Je me propose ici d'expliquer l'ensemble de ces phénomènes.

1. Les quatre-vingt-unièmes.

Le point de départ est l'expression de $9N$, particulièrement frappante. On peut encore l'écrire : $9N = 111111111 = \dfrac{999999999}{9}$, d'où $N = \dfrac{10^9 - 1}{81}$. On voit donc apparaître les fractions de dénominateur 81 qui vont jouer un rôle crucial dans la suite. Rappelons quelques faits élémentaires à propos du développement décimal illimité des fractions de dénominateur 81 .

Théorème 1.1.
1) Si $x = \dfrac{a}{b}$ est un rationnel, écrit sous forme irréductible, et si b est premier avec 10*, le développement décimal illimité de x est périodique, c'est-à-dire de la forme :*

$$x = b_1 \cdots b_s, a_1 \cdots a_r \, a_1 \cdots a_r \, a_1 \cdots a_r \, \cdots$$

La longueur r de la période est le plus petit entier $n > 0$ tel que l'on ait $10^n \equiv 1$ (mod b). [1]
2) Soit x un nombre rationnel de la forme $\dfrac{a}{81}$, avec a premier avec 81 (i.e. sans le facteur 3). La longueur de la période du développement décimal illimité de x est égale à 9.

---

[1] *Rappelons que cela signifie que le reste de la division de 10^n par b est égal à 1.*

3) Les développements décimaux des nombres $k/81$ pour $k < 9$ s'écrivent avec le nombre N et ses multiples :

$$\frac{1}{81} = 0,0N0N0N0N\cdots = 0,012345679\ 012345679\ 012345679\cdots$$

$$\frac{2}{81} = 0,0(2N)0(2N)0(2N)\cdots = 0,024691358\ 024691358\ 024691358\cdots$$

et, plus généralement :

$$\frac{k}{81} = 0,0(kN)\,0(kN)\,0(kN)\ \cdots.$$

Démonstration. Le point 1) est bien connu (cf. par exemple [P1] II 2.25).

Pour 2), montrons d'abord le lemme suivant qui sera aussi utile plus loin :

Lemme 1.2.
Soit s un entier ≥ 0. On a $10^s \equiv 9s+1 \pmod{81}$. Si on a $0 \leq s < 9$, $9s+1$ est le reste dans la division euclidienne de 10^s par 81.

Démonstration. (du lemme) On a $10^s - 1 = 999\cdots 9 = 9 \times (111\cdots 1)$ (s chiffres) et $111\cdots 1$ (avec s chiffres) est congru à s modulo 9 (c'est essentiellement le critère de divisibilité par 9, cf. [P1] I 2.11) d'où le résultat. Le complément vient du fait que si on a $s < 9$, on a aussi $9s+1 < 81$.

Le point 2) de 1.1 résulte du lemme car le plus petit s tel que $9s+1$ soit congru à 1 modulo 81 est bien 9 (les restes successifs sont $10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 = 1$ comme on peut d'ailleurs le vérifier à la main).

Une autre preuve de ce fait consiste à vérifier que la longueur de la période est bien égale à 9 pour $1/81$ par exemple.

3) Pour $1/81$ on peut se contenter de constater le phénomène, mais il a une explication très simple. Sachant que la période est de longueur 9, on écrit $1/81 = 0,a_1a_2\cdots a_9\,a_1a_2\cdots a_9\,a_1a_2\cdots a_9\cdots$, on multiplie par 10^9 et on trouve en retranchant $\dfrac{10^9}{81} - \dfrac{1}{81} = a_1a_2\cdots a_9 = N$ (avec, ici, $a_1 = 0$). Pour les autres $k/81$, on obtient leur développement en multipliant par k celui de $1/81$ et comme kN est $< 10^8$, les paquets de 9 chiffres ne se mélangent pas et commencent tous par 0, comme annoncé.

Remarque 1.3. Dits de façon savante, on a a les faits suivants (cf. [P2] I §7) :
a) Le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/81\mathbf{Z})^*$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/\varphi(81)\mathbf{Z} = \mathbf{Z}/54\mathbf{Z}$. Dans ce groupe l'élément 10 est d'ordre 9 comme on l'a vu.
b) Le quotient de $(\mathbf{Z}/81\mathbf{Z})^*$ par le sous-groupe engendré par 10 est formé des classes de 1,2,4,5,7,8. (Cette dernière assertion vient du fait que les développements de 1,2,4,5,7,8 (quatre-vingt-unièmes) restent distincts même si on les multiplie par des puissances de 10.) Cela explique que les nombres kN pour k premier avec 3 vont s'écrire à partir de ceux correspondant à $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$, voir plus loin.

On voit donc que le problème, au moins pour $k < 9$, est exactement équivalent au problème de décrire les développements décimaux des nombres $k/81$.

2. Les chiffres.

Il s'agit maintenant d'expliquer pourquoi les chiffres de la période des quatre-vingt-unièmes sont tous distincts et pourquoi le seul absent est le complément à 9 (lorsque le numérateur est < 9). Attention, le premier résultat n'est pas banal car il y a des nombres dont la période est < 10 mais qui ont pourtant des répétitions dans une période, par exemple : $1/137 = 0,00729927\,00729927\,00729927\cdots$.
Un premier résultat général permet d'expliquer quand les chiffres d'une période sont distincts :

Proposition 2.1.
Soit a_s le s-ième chiffre après la virgule du développement décimal illimité du rationnel $\dfrac{a}{b}$ écrit sous forme irréductible. On sait que a_s est le chiffre des unités du quotient q_s dans la division euclidienne de $10^s a$ par b : $10^s a = bq_s + r_s$ avec $0 \leq r_s < b$, cf. [P1]. Alors, si deux chiffres a_s et a_t sont égaux, les restes correspondants r_s et r_t sont congrus modulo 10. La réciproque est vraie si b est premier avec 10.

Démonstration. Comme a_s est le chiffre des unités de q_s l'hypothèse signifie qu'on a $q_s \equiv q_t \pmod{10}$ ce qui implique $r_s \equiv r_t \pmod{10}$. Si b est premier avec 10 on a la réciproque par Gauss.

Remarques 2.2.
1) Bien entendu, la condition est réalisée si on a $r_s = r_t$ mais ce cas correspond à la période.
2) Les résultats 1.2 et 2.1 permettent d'élucider le cas $a = 1$, $b = 81$. On a vu qu'on a $10^s \equiv 9s + 1 \pmod{81}$ et, si s est < 9, $9s + 1$ est < 81, donc égal au reste r_s. On voit alors que, pour $0 \leq s, t < 9$, $9s + 1$ et $9t + 1$ ne peuvent être congrus modulo 10 et l'on retrouve le fait que les chiffres de la période de $1/81$ sont distincts.
3) Pour le cas $a = k$, $b = 81$ on a $k \times 10^s \equiv 9ks + k \pmod{81}$, mais *a priori* $9ks + k$ n'est plus le reste dans la division par 81 et on ne peut appliquer 2.1. Le théorème suivant éclaircit la situation :

Théorème 2.3.
Soit k un entier avec $1 \leq k < 9$ et soit s un entier ≥ 1. On effectue la division euclidienne de ks par 9 : $ks = 9\alpha_s + \rho_s$ avec $0 \leq \rho_s < 9$. On a les propriétés suivantes :
1) Le s-ième chiffre a_s du développement décimal illimité de $k/81$ est le chiffre des unités de $\alpha_s + k(s-1)$.
2) Le chiffre a_s n'est jamais égal à $9 - k$.
3) Si k est premier avec 3, les chiffres a_s et a_t sont égaux si et seulement si $s - t$ est un multiple de 9.

Démonstration. 1) On sait que a_s est le chiffre des unités de q_s, quotient de $k \times 10^s$ dans la division euclidienne par 81. Appelons u_s le nombre qui s'écrit $111\cdots111$ avec s chiffres 1 en système décimal, de sorte que l'on a :

$$u_s = 10 \times u_{s-1} + 1 = 9u_{s-1} + u_{s-1} + 1 = 9(u_{s-1} + u_{s-2} + \cdots + u_1) + s$$

(la dernière formule se montre par récurrence sur s). En écrivant $10^s = 9u_s + 1$ on obtient :

$$k \times 10^s = 9ku_s + k = 81k(u_{s-1} + u_{s-2} + \cdots + u_1) + 9ks + k,$$

soit, en remplaçant ks par $9\alpha_s + \rho_s$:

$$k \times 10^s = 81k(u_{s-1} + u_{s-2} + \cdots + u_1) + 81\alpha_s + 9\rho_s + k,$$

et, comme ρ_s et k sont tous deux < 9, il en résulte que le quotient q_s cherché n'est autre que $k(u_{s-1} + u_{s-2} + \cdots + u_1) + \alpha_s$. Comme u_i est congru à 1 modulo 10, on voit que q_s est bien congru à $k(s-1) + \alpha_s$ modulo 10, donc qu'il a même chiffre des unités que ce nombre.

2) Si a_s était égal à $9-k$, on aurait $\alpha_s + k(s-1) \equiv 9 - k \pmod{10}$ ou encore, en remplaçant ks par $9\alpha_s + \rho_s$, $\rho_s \equiv 9 \pmod{10}$ ce qui est absurde puisqu'on a $0 \le \rho_s < 9$.

3) Dire qu'on a $a_s = a_t$ revient à dire que l'on a $\alpha_s + ks \equiv \alpha_t + kt \pmod{10}$ ou encore $10\alpha_s + \rho_s \equiv 10\alpha_t + \rho_t$, soit $\rho_s \equiv \rho_t \pmod{10}$ et donc $\rho_s = \rho_t$ puisque ces entiers sont compris entre 0 et 9. Mais alors on a $ks \equiv kt \pmod 9$ et, comme k est premier avec 9, on voit que l'égalité se produit si et seulement si $s \equiv t \pmod 9$. On retrouve donc le fait que le développement admet la période 9, mais aussi le fait que les chiffres d'une période sont tous distincts.

Remarques 2.4.
1) On peut vérifier la formule ci-dessus dans le cas $k = 2$. Pour $s = 1, 2, \cdots, 9$, les quotients α_s de $2s$ par 9 sont successivement $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2$ et les valeurs de $\alpha_s + 2(s-1)$ sont donc $0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 18$. En prenant leurs chiffres des unités on obtient bien la période 024691358 pour $2/81$.
2) Le rapport entre N et $8N$ (resp. $2N$ et $7N$, resp. $3N$ et $6N$, resp. $4N$ et $5N$) est très simple : on a, par exemple, $N + 8N = 9N = 111111111$ et les chiffres de $8N$ sont les compléments à 10 de ceux de N, sauf le chiffre des unités qui, étant le complément à 11, donne le premier 1, les autres provenant de la retenue.

3. Au-delà de 9.

On tente ici de dire des choses sur kN pour k général. On verra que les résultats sont moins spectaculaires. Liquidons d'abord le cas des multiples de 3 :

Proposition 3.1.
Soit k un entier.
1) Si k est multiple de 9, $k = 9k'$, on écrit, en divisant par 9, $k' = 9l + r$ avec $0 \le r < 9$. On a $k/81 = l + \frac{r}{9}$ et $\frac{r}{9}$ a pour développement décimal $0, rrr \cdots rrrr \cdots$. Du côté de kN on obtient :

$$kN = (9N)k' = k' \times 111111111 = l \times 999999999 + rrrrrrrrr = l \times 10^9 - l + rrrrrrrrr.$$

2) Si k est multiple de 3 mais pas de 9, $k = 3k'$, on a $k/81 = k'/27$. On a $10^3 \equiv 1 \pmod{27}$, de sorte que le développement décimal de $k/81$ est de période 3. Pour $k' = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ on obtient 6 développements distincts et tous les autres s'en déduisent par décalage.

Démonstration. Le point 1) est évident. Si l est assez petit, le résultat a encore une forme remarquable. Par exemple, pour $k = 369$ on a $k' = 41 = 4 \times 9 + 5$ donc $l = 4$ et $r = 5$ et on a $369N = 4555555551$. Lorsque l devient trop grand le résultat se dégrade. Par exemple, pour $k = 9 \times 17438$, on a $l = 1937$ et $r = 5$ et $9 \times 17438 \times N = 1937555553618$.

Le point 2) est facile aussi. Expliquons seulement le dernier point. On a $1/27 = 0,037037037\cdots$, $2/27 = 0,074074074\cdots$, $4/27 = 0,148148148\cdots$, $5/27 = 0,185185185\cdots$, $7/27 = 0,259259259\cdots$, $8/27 = 0,296296296\cdots$.
Si on multiplie par 10, 100,1000, etc. on obtient le même développement décalé. Mais, comme $(\mathbf{Z}/27\mathbf{Z})^*$ est cyclique d'ordre 18 et que 10 est d'ordre 3 dans ce groupe (comme l'indique la longueur des périodes), le sous-groupe engendré par 10 est d'indice 6, et le fait que leurs développements soient distincts montre que le quotient est formé des classes de 1,2,4,5,7,8. Cela signifie que si on prend a quelconque, premier avec 3, on a $a \equiv l \times 10^s \pmod{27}$ avec $l = 1, 2, 4, 5, 7$ ou 8 et $s = 0, 1, 2$. On a alors, si $a = 27b + 10^s\, l$, $\dfrac{a}{27} = b + 10^s \dfrac{l}{27}$ et donc le développement décimal de $a/27$ se calcule à partir de celui de $l/27$. Par exemple, si on prend $a = 265$, a est congru à 22 (ou -5) modulo 27 donc on a $a \equiv 4 \times 10^2 \pmod{27}$. Précisément $265 = 400 - (27 \times 5)$, d'où :

$$\frac{265}{27} = \frac{400}{27} - 5 = 100 \times 0,148148148\cdots - 5 = 9,814814814\cdots$$

Ce développement donne aussi le calcul de $(265 \times 3)N = \dfrac{265}{27} \times (10^9 - 1)$ ou encore

$$9814814814,814814\cdots - 9,814814814\cdots = 9814814805.$$

Le résultat reste spectaculaire tant que k n'est pas trop grand.

Passons au cas des nombres premiers avec 3.

Proposition 3.2.
Soit k un entier premier avec 3. On peut écrire $k = l \times 10^s + 81b$ avec b entier, $l = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ et $0 \leq s \leq 8$. On a alors

$$\frac{k}{81} = \frac{l}{81} \times 10^s + b$$

de sorte que le développement de $k/81$ se déduit de celui de $l/81$. L'expression de kN s'en déduit grâce à la formule $kN = \dfrac{k}{81} \times 10^9 - \dfrac{k}{81}$.

Démonstration. La première assertion signifie que les nombres $1, 2, 4, 5, 7, 8$ constituent un système de représentants du groupe quotient de $(\mathbf{Z}/81\mathbf{Z})^*$ par le sous-groupe engendré par 10, cf. 1.3. Le reste est à peu près évident.

La remarque suivante va nous être utile :

Proposition 3.3.
Soient k et l deux entiers compris entre 1 et 9. On suppose que les développements décimaux illimités :

$$k/81 = 0, a_1 \cdots a_9\, a_1 \cdots a_9\, a_1 \cdots a_9 \cdots \quad \text{et} \quad l/81 = 0, b_1 \cdots b_9\, b_1 \cdots b_9\, b_1 \cdots b_9 \cdots$$

ont deux chiffres consécutifs égaux : $a_s = b_t$ et $a_{s+1} = b_{t+1}$. Alors, on a $k = l$.

Démonstration. Rappelons que si on écrit $10^s k = 81q_s + r_s$, a_s est le chiffre des unités de q_s. On écrit aussi $10^t l = 81q'_t + r'_t$ et les relations analogues avec $s+1$ et $t+1$ et on sait (cf. [P1]) qu'on a les relations :

$$(*) \qquad 10r_s = 81a_{s+1} + r_{s+1} \quad \text{et} \quad 10r'_t = 81b_{t+1} + r'_{t+1}.$$

L'égalité de a_s et b_t montre que l'on a $r_s \equiv r'_t \pmod{10}$, celle de a_{s+1} et b_{t+1}, jointe à $(*)$, montre qu'on a $r_{s+1} \equiv r'_{t+1} \pmod{100}$. Comme ce sont des restes modulo 81, ils sont égaux. Mais, on sait qu'on a $r_s = k(9s+1)$ (cf. 1.2), d'où $r_{s+1} = k(9s+10) = r'_{t+1} = l(9t+10)$ et on voit que $10(k-l)$ est multiple de 9, donc aussi $k-l$. Comme k et l sont plus petits que 9, ils sont égaux.

Corollaire 3.4.
Soit r un entier avec $1 \leq r < 81$. Le développement décimal illimité de $r/81$ s'obtient par la procédure suivante :
1) on calcule ses deux premiers chiffres : $r/81 = 0, ab\cdots$,
2) ces deux chiffres sont dans un et un seul des développements des nombres $k/81$ avec $1 \leq k \leq 9$,
3) le développement de $r/81$ est alors le même que celui de $k/81$ à décalage près.

Exemple 3.5. Si on prend $r = 53$, on a $53/81 = 0,65\cdots$. La suite de chiffres 65 est présente dans $8N$ ou encore dans $8/81 = 0,098765432\,098765432\cdots$ et on a donc $53/81 = 0,654320987\,654320987\cdots$.

4. Et maintenant, Mesdames et Messieurs, le tour du mage Rabindranah Perrin.

Pour multiplier $N = 12345679$ par un nombre entier k, même grand, on utilise la procédure suivante :
1) on divise k par 81 : $k = 81b + r$,
2) on calcule une période P de 9 chiffres du développement décimal illimité de $r/81$ par la procédure 3.4 ci-dessus,
3) le produit kN s'obtient alors en prenant la période P, en mettant devant b et en retranchant b au total.

Exemple 4.1. On prend $k = 2023 = 24 \times 81 + 79$: $b = 24$, $r = 79$. On a $79/81 = 0,97$. Parmi les développements des nombres $l/81$ avec $1 \leq l \leq 9$ le seul qui comporte les chiffres 97 à la suite est $l = 7$: $7/81 = 0,086419753$. On a donc $79/81 = 0,975308641\,975308641\cdots$. On obtient alors kN en prenant la période $P = 975308641$, en mettant $b = 24$ devant : 24975308641 et en retranchant 24 : $2023 \times 12345679 = 24975308617$.

Il peut le faire !

5. Références.

[P1] **Perrin Daniel**, *Mathématiques d'école*, Cassini 2005.

[P2] **Perrin Daniel**, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.