Les 28 bitangentes à la quartique de Salmon

Daniel PERRIN

Le but de ce texte est de déterminer, en réponse à une question posée par Robert Ferréol[1]*, les* 28 *bitangentes à la quartique de Salmon, et de préciser si elles sont réelles et si leurs points de contact le sont.*

1 Introduction

1.1 Le problème

Soient a, b deux nombres réels positifs. On considère la quartique plane réelle $C_{a,b}$ (ou C), dite de Salmon[2], définie par l'équation :

$$F_{a,b}(x,y) = F(x,y) = (x^2 - a^2)^2 + (y^2 - a^2)^2 - b^4 = 0.$$

Il s'agit de déterminer ses bitangentes, c'est-à-dire les droites qui sont tangentes à la courbe en deux points distincts. Rappelons le résultat suivant :

1.1 Proposition. *Soit C une courbe algébrique du plan $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, lisse de degré d. Le nombre de bitangentes*[3] *à C est égal à $\dfrac{d(d-2)(d-3)(d+3)}{2}\cdot$ Une quartique lisse a donc* 28 *bitangentes.*

Démonstration. On sait qu'une courbe lisse C de degré d est de classe $d^* = d(d-1)$, ce qui signifie que l'on peut mener $d(d-1)$ tangentes à C d'un point extérieur. Une formule de Plücker[4] affirme qu'on a $d^*(d^*-1) = d+3i+2b$ où i est le nombre d'inflexions de C et b le nombre de ses bitangentes, comptées convenablement. Cette formule s'écrit encore $d^3(d-2) = 2b+3i$. Comme les inflexions sont les intersections de la courbe et de sa hessienne (qui est de degré $3(d-2)$), on a $i = 3d(d-2)$ et on en déduit le résultat.

Notre but ici, outre de montrer qu'il y a bien 28 bitangentes complexes à la quartique de Salmon, est de préciser, selon les valeurs de a et b, combien de ces bitangentes sont réelles.

1. http://www.mathcurve.com/courbes2d/salmon/salmon.shtml
2. Voir George Salmon, *Higher plane curves*, p. 45, Chelsea ed. 1879.
3. Vues comme droites projectives complexes comptées avec des multiplicités éventuelles.
4. Voir par exemple Gerd Fischer, *Plane algebraic curves*, AMS, 2001.

1.2 Groupe d'isométries

On munit le plan $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne naturelle pour laquelle la base canonique est orthonormée. On constate que C est invariante par les symétries par rapport aux axes, aux bissectrices et à l'origine, donc par le groupe $\mathbf{D}_4$ des isométries du carré. Cela montre que les éléments géométriques remarquables de la courbe (composantes connexes, singularités, inflexions, bitangentes, etc.) se répartissent en orbites selon ce groupe, qui sont donc de cardinal[5] $1, 2, 4$ ou 8.

1.3 La quartique

On considère la clôture projective $\widehat{C}$ de C, définie par l'équation homogène :

$$\widehat{F}(x, y, t) = (x^2 - a^2t^2)^2 + (y^2 - a^2t^2)^2 - b^4t^4 = 0.$$

1.2 Proposition. *La quartique $\widehat{C}_{a,b}$ (vue comme courbe projective complexe) est lisse sauf dans les cas suivants : $b = 0$, $a^4 = b^4$ (donc $a = b$) ou $2a^4 = b^4$ (donc $b = \sqrt[4]{2}\, a$).*

Démonstration. On a les formules suivantes pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2 - a^2t^2), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y(y^2 - a^2t^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -4a^2t(x^2 - a^2t^2) - 4a^2t(y^2 - a^2t^2) - 4b^4t^3.$$

Les points singuliers éventuels annulent ces trois polynômes. Le cas $x = y = 0$ (donc $t \neq 0$) impose $2a^4 = b^4$. Le cas $x = 0$, $y^2 = a^2t^2$ impose $a^4 = b^4$. Enfin le cas $x^2 = a^2t^2 = y^2 = a^2t^2 = 0$ entraîne $b = 0$.

1.3 *Remarque.* Pour $b = 0$ et $a \neq 0$, la courbe est décomposée en la réunion de deux coniques imaginaires conjuguées se coupant en quatre points réels. Pour $b = \sqrt[4]{2}\, a$, on a un point singulier isolé à l'origine (point double à tangentes imaginaires). Pour $a = b$, la courbe est décomposée en deux ellipses réelles :

$$F_{a,a}(x, y) = (x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 - a^2)(x^2 - \sqrt{2}xy + y^2 - a^2),$$

voir figure 1.

5. Dans le cas des bitangentes à $C_{a,b}$ (supposée lisse), ces orbites ont 4 ou 8 éléments. En effet, dire que l'orbite d'une bitangente est de cardinal ≤ 2 c'est dire que son stabilisateur est de cardinal ≥ 4. Or les sous-groupes d'ordre 4 de $\mathbf{D}_4$ sont le groupe des rotations, qui ne stabilise aucune droite, et les deux groupes de Klein associés aux symétries par rapport aux axes ou aux bissectrices et on vérifie que ni les axes, ni les bissectrices ne sont des bitangentes.

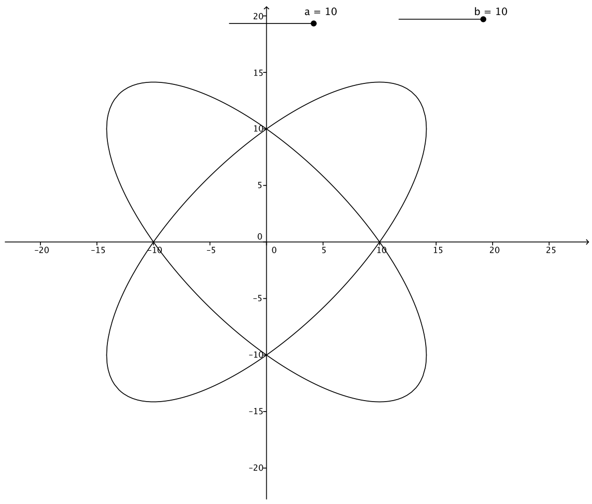

FIGURE 1 – La quartique dans le cas $a = b$

1.4 Composantes connexes de la courbe réelle

Dans ce paragraphe on suppose la courbe lisse.

Pour étudier la topologie de la courbe [6] on résout, par exemple, l'équation donnée par rapport à y :

$$(*) \qquad y^4 - 2a^2y^2 + a^4 - b^4 + (x^2 - a^2)^2 = 0.$$

Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta' = b^4 - (x^2 - a^2)^2$ et il est positif ou nul si et seulement si on a $a^2 - b^2 \leq x^2 \leq a^2 + b^2$. On distingue alors deux cas :

1.4.1 Le cas $a > b$

Dans ce cas on a des solutions $Y := y^2 = a^2 + \epsilon\sqrt{b^4 - (x^2 - a^2)^2}$ de $(*)$, avec $\epsilon = \pm 1$, pourvu que x soit dans l'ensemble D :

$$D = [-\sqrt{a^2 + b^2}, -\sqrt{a^2 - b^2}] \cup [\sqrt{a^2 - b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}].$$

Ces solutions sont strictement positives (c'est évident si $\epsilon = 1$ et si $\epsilon = -1$ cela vient du fait que $x^4 - 2a^2x^2 + 2a^4 - b^4$ est > 0). Il y a donc quatre y au-dessus d'un x donné sauf sur les bords des intervalles où il y en a deux (par exemple pour $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ on a $y = \pm a$). On rencontre ici des bitangentes que l'on retrouvera. En utilisant les isométries de $\mathbf{D}_4$ on voit que les y correspondants sont aussi dans D et la courbe C admet quatre composantes connexes, voir figure 2.

6. Et pour la construire avec un logiciel de géométrie, par exemple GeoGebra.

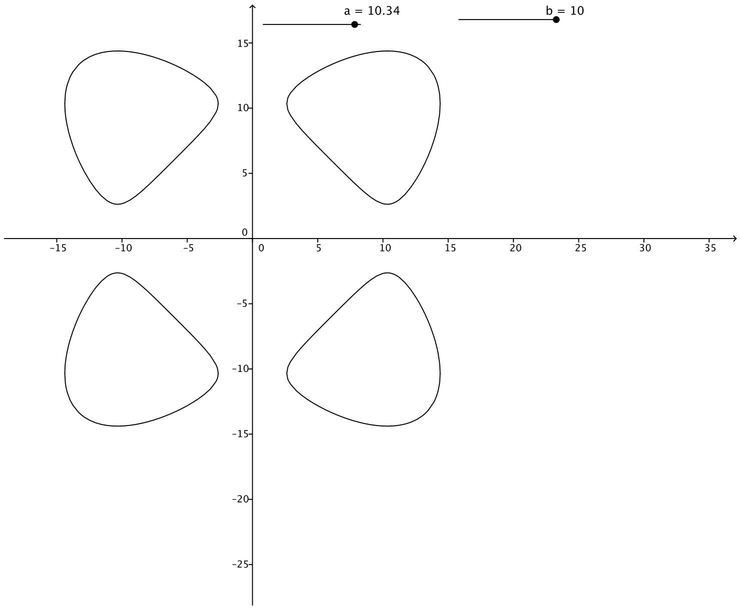

FIGURE 2 – Quatre composantes

On désignera cette zone de paramètres ($a > b$) comme la zone Z_4.

1.4.2 Le cas $a < b$

Ce cas est un peu plus difficile et le lecteur pointilleux en écrira les détails.

Cette fois, la seule condition sur x pour avoir $\Delta' \geq 0$ est $x^2 \leq a^2 + b^2$ donc $x \in [-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a la même formule donnant $Y = y^2$ mais les solutions Y ne sont pas toujours positives. C'est le cas si l'on a $x^4 - 2a^2x^2 + 2a^4 - b^4 \geq 0$ mais cette fois ce trinôme $(**)$ a deux racines $a^2 \pm \sqrt{b^4 - a^4}$. Il y a encore deux cas :

• Si l'on a $2a^4 < b^4$, seule l'une des racines de $(**)$ est positive et égale à β^2 avec $\beta = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 - a^4}}$. On a $-\alpha < -\beta < 0 < \beta < \alpha$ et il y a quatre y au-dessus d'un x général situé entre les α et les β et deux seulement entre les β (sauf en les β où y est nul. La courbe a une unique composante connexe, voir figure 3.

Cette zone de paramètres ($2a^4 < b^4$) est la zone Z_1.

• Si l'on a $a^4 < b^4 < 2a^4$, les deux racines de $(**)$ sont positives et égales à β^2 et $\gamma^3 2$ avec $\gamma = \sqrt{a^2 - \sqrt{b^4 - a^4}}$. On a $-\alpha < -\beta < -\gamma < 0 < \gamma < \beta < \alpha$ et il y a quatre y au-dessus d'un x général situé entre les α et les β, deux entre les β et les γ et quatre entre les γ. La courbe a deux composantes connexes emboîtées, voir figure 4.

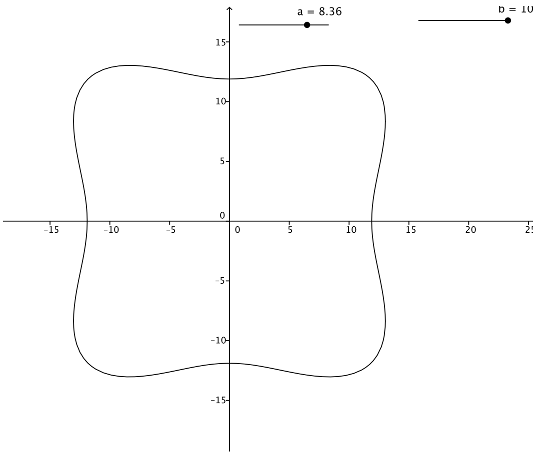

FIGURE 3 – Une seule composante

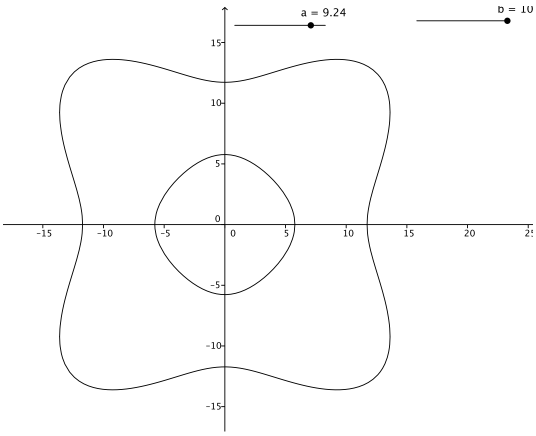

FIGURE 4 – Deux composantes

Cette zone de paramètres ($a^4 < b^4 < 2a^4$) est la zone Z_2.

2 Un lemme sur les polynômes de degré 4

Lorsqu'on coupe une quartique par une droite, l'équation aux abscisses (ou aux ordonnées) des points d'intersection est de la forme $P(x) = 0$ où P est un polynôme de degré 4 et la droite est une bitangente si et seulement si cette équation admet deux racines doubles, c'est-à-dire si $P(x)$ est un carré.

2.1 Le cas complexe

On a le résultat suivant :

2.1 Lemme. *On considère le polynôme $P(X) = AX^4+BX^3+CX^2+DX+E$ à coefficients complexes. Ce polynôme est le carré d'un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) On a $A \neq 0$, $B \neq 0$ et les deux relations $4ABC = B^3 + 8A^2D$ et $EB^2 = AD^2$.

2) On a $A \neq 0$, $B = D = 0$ et $C^2 = 4AE$.

3) On a $A = B = 0$ et $D^2 = 4CE$.

Démonstration. Si $P(X) = Q(X)^2 = (\alpha X^2 + \beta X + \gamma)^2$, on a $A = \alpha^2$, $B = 2\alpha\beta$, $C = \beta^2 + 2\alpha\gamma$, $D = 2\beta\gamma$ et $E = \gamma^2$. On vérifie que les deux égalités de 1) sont vérifiées. Si A et B sont non nuls, on voit que la condition 1) est réalisée. Si B est nul mais A non nul on a $\beta = 0$ donc $D = 0$ et les conditions de 2) sont réalisées. Enfin, si A est nul, B l'est aussi et on a les conditions de 3).

Inversement, supposons l'une des conditions ci-dessus réalisées. Dans le cas 1) on pose $\alpha = \sqrt{A}$, $\gamma = \sqrt{E}$ en choisissant les racines de telle sorte qu'on ait $\sqrt{A}\, D = \sqrt{E}\, B$. Comme A est non nul, on peut définir $\beta = \dfrac{B}{2\sqrt{A}}\cdot$ On vérifie qu'on a $P(X) = (\alpha X^2 + \beta X + \gamma)^2$. C'est immédiat pour les coefficients A, B, E, D et pour C on utilise le fait que A, B sont non nuls donc aussi α, β.

Dans le cas 2), on pose $\beta = 0$, $\alpha = \sqrt{A}$ et $\gamma = \sqrt{E}$ en choisissant les signes de telle sorte qu'on ait $C = 2\sqrt{A}\sqrt{E}$. On vérifie que P est le carré de $\alpha X^2 + \gamma$. Enfin, dans le cas 3), on pose $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{C}$, $\gamma = \sqrt{E}$ avec $2\sqrt{C}\sqrt{E} = D$ et on vérifie que P est le carré de $\beta X + \gamma$.

2.2 Le cas réel

2.2 Corollaire. *On suppose que le polynôme $P(X) = AX^4 + BX^3 + CX^2 + DX + E$ est à coefficients réels. Ce polynôme est le carré d'un polynôme $Q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbf{R}[X]$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) On a $A > 0$, $B \neq 0$ et les deux relations $4ABC = B^3 + 8A^2D$ et $EB^2 = AD^2$.

2) On a $A > 0$, $B = D = 0$ et $C^2 = 4AE$.

3) On a $A = B = 0$, $C > 0$ et $D^2 = 4CE$.

De plus, le polynôme Q admet deux racines réelles si et seulement si on a $B^4 > 16A^2BD$ dans le cas 1) et $C < 0$ dans le cas 2).

Démonstration. La première assertion résulte essentiellement du lemme précédent. Pour l'autre, il s'agit de voir à quelle condition on a $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. Mais on a $\alpha^2 = A$, $\alpha D = \gamma B$ d'où $\gamma = \frac{\alpha D}{B}$ et $\beta = \frac{B}{2\alpha}$ ce qui donne $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \dfrac{B^3 - 16A^2D}{4AB}$ et, comme A est positif, cette quantité est positive si et seulement si $B^4 - 16A^2BD$ l'est. Le cas 2) est immédiat.

3 Recherche des bitangentes

On considère les droites de $\mathbf{P}^2$. Elles ont pour équations $\alpha x + \beta y + \gamma t = 0$ avec α, β, γ non tous trois nuls. Pour faciliter les calculs, on peut les séparer en trois types : les droites d'équations affines $y = ux + v$, les droites d'équations $x = k$ et la droite $t = 0$. On note tout de suite que celle-ci coupe C en les quatre points distincts $(1, \zeta, 0)$ où ζ parcourt l'ensemble des racines primitives huitièmes de l'unité (qui vérifient $\zeta^4 = -1$). La droite à l'infini n'est pas tangente à C et peut être écartée.

Dans ce qui suit on suppose $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ et $2a^4 - b^4 \neq 0$ donc C non singulière.

3.1 Les droites $x = k$

Si on coupe C par $x = k$, il reste l'équation en y :

$$y^4 - 2a^2y^2 + k^4 + 2a^4 - 2a^2k^2 - b^4 = 0.$$

Dire que $x = k$ est bitangente signifie que cette équation admet deux racines doubles, autrement dit que le polynôme ci-dessus est un carré. En vertu de 2.1.2, cela signifie qu'on a $(a^2 - k^2)^2 = b^4$, donc $k^2 = a^2 + b^2$ ou $k^2 = a^2 - b^2$. Comme a est différent de b on obtient ainsi quatre valeurs de k, donc quatre bitangentes $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ et $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, les deux dernières n'étant réelles que si l'on a $a > b$. De plus, les contacts de ces bitangentes sont donnés par l'équation $y^4 - 2a^2y^2 + a^4 = 0$ dans les deux cas et les solutions $y = \pm a$ sont réelles [7]. On note que chacune de ces tangentes est invariante par la symétrie d'axe Ox, de sorte que leur orbite contient 4 éléments (l'orbite de la droite $x = k$ contient la droite $x = -k$ mais aussi les droites $y = \pm k$ que nous retrouverons ci-dessous). On trouvera ces tangentes sur la figure 8, celles avec le signe $+$ sont en bleu, les autres en vert.

3.2 Les droites $y = ux + v$

Les abscisses des points d'intersection de la droite $y = ux + v$ avec la courbe C sont données par l'équation $P(x) := Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ avec $A = u^4 + 1$, $B = 4u^3v$, $C = 6u^2v^2 - 2a^2u^2 - 2a^2$, $D = 4uv^3 - 4a^2uv$ et $E = v^4 - 2a^2v^2 + 2a^4 - b^4$. Les bitangentes correspondent aux u, v qui sont tels que P soit un carré. On peut donc appliquer 2.1. Si u est réel, A est non nul, s'il est imaginaire, on vérifie que la solution $u^4 = -1$, $v = 0$ ne donne pas de bitangente. On peut donc supposer $A \neq 0$. En revanche, on doit distinguer le cas $B = 0$ donc u ou v nul.

3.2.1 Le cas $u = 0$

Le calcul, avec 2.1, donne $v^2 = a^2 + b^2$ ou $v^2 = a^2 - b^2$. On trouve quatre bitangentes horizontales $y = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ et $y = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, qui complètent les orbites des bitangentes verticales. Les tangentes avec le signe $-$ sont réelles

7. C'est le cas 2) de 2.2 : $C < 0$.

si et seulement si a est supérieur à b et les contacts, donnés par $x = \pm a$, sont réels. Voir figure 8 avec les mêmes conventions de couleurs.

3.2.2 Le cas $v = 0$

Il s'agit des tangentes passant par l'origine. La condition $C^2 = 4AE$ mène à l'équation en u :

$$(a^4 - b^4)u^4 - 2a^4u^2 + a^4 - b^4 = 0$$

dont le discriminant $b^4(2a^4 - b^4)$ est $\neq 0$. Le discriminant est négatif dans la zone Z_1 ($2a^4 < b^4$) et dans ce cas il n'y a pas de bitangente réelle passant par l'origine. Il est positif dans les zones Z_4 et Z_2, mais, dans la zone Z_2, comme $a^4 - b^4$ est < 0 les racines $u^2 = \dfrac{a^4 \pm b^2\sqrt{2a^4 - b^4}}{a^4 - b^4}$ sont négatives et il n'y a pas non plus de bitangentes réelles [8].

Dans la zone Z_4 en revanche, les racines u^2 sont réelles et positives et on a quatre bitangentes réelles distinctes $y = \pm ux$ avec les deux valeurs de u^2 données par la formule ci-dessus. Pour trouver les contacts de ces bitangentes avec C il suffit de trouver le polynôme $Q(x) := \alpha x^2 + \gamma$ tel que $Q(x)^2 = P(x)$. On a $\alpha^2 = 1 + u^4$, $\gamma^2 = 2a^4 - b^4$ et $\alpha\gamma = -a^2(u^2 + 1) < 0$. Les abscisses des points de contact sont données par $x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ et elles sont réelles [9], ainsi que les ordonnées $y = ux$.

Ces quatre bitangentes, invariantes par la symétrie de centre l'origine, forment une orbite sous le groupe $\mathbf{D}_4$, elles sont en rose sur la figure 8.

3.2.3 Les cas u, v non nuls

Dans le cas $B \neq 0$, on écrit les deux relations de 2.1 : $4ABC - B^3 - 8A^2D = 0$ et $EB^2 - AD^2 = 0$ en les divisant par les termes en u, v. Il reste deux équations :

$$(*) \quad (1-u)(1+u)(a^2u^4 - u^2v^2 + a^2 - v^2) = 0 \text{ et } (a^4 - b^4)u^4 - v^4 + 2a^2v^2 - a^4 = 0.$$

On voit ainsi apparaître les cas $u = \pm 1$ que l'on traite en premier.

3.2.4 Les cas $u = \pm 1$

Dans les deux cas on a l'équation en v, $v^4 - 2a^2v^2 + b^4 = 0$ de discriminant $a^4 - b^4$. Si a est plus petit que b (donc dans les zones Z_1 et Z_2) il n'y a pas

8. Il est clair sur la figure que les droites passant par l'origine coupent transversalement la courbe.

9. C'est encore le cas 2) de 2.2.

de bitangentes réelles. Dans le cas $a > b$, l'équation en v^2 a deux solutions réelles positives $v_1^2 = a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}$ et $v_2^2 = a^2 - \sqrt{a^4 - b^4}$. On a ainsi huit bitangentes réelles se répartissant en deux orbites : $y = x \pm v_1$ et $y = -x \pm v_1$ pour l'une et $y = x \pm v_2$ et $y = -x \pm v_2$ pour l'autre. Pour déterminer si les contacts sont réels on revient aux notations de 2.1.

Il suffit de traiter le cas $u = 1$, le cas $u = -1$ s'en déduisant par les symétries par rapport aux axes. On pose $v^2 = a^2 + \epsilon\sqrt{a^4 - b^4}$ avec $\epsilon = \pm 1$. On a $A = 2$, $B = 4v$ et $E = 2(a^4 - b^4)$ et on trouve le polynôme $Q(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ tel que $P(X) = Q(X)^2$ en posant $\alpha = \sqrt{A}$, $\gamma = \sqrt{E}$ (avec la condition $\alpha D = \gamma B$) puis $\beta = \frac{B}{2\alpha}$. Le calcul donne $\alpha = \sqrt{2}$, $\gamma = \epsilon\sqrt{2}\sqrt{a^4 - b^4}$ et $\beta = \sqrt{2}v$. Les contacts sont réels si et seulement si $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ est > 0 ou encore $B^4 > 16A^2BD$, voir 2.2. En explicitant on trouve la condition $v^2 > 4\epsilon\sqrt{a^4 - b^4}$. Dans le cas de v_2 (le plus petit v) les contacts sont toujours réels, mais pour v_1 on a la condition $8a^4 < 9b^4$. Si a est compris entre b et $\omega = (9/8)^{1/4}\, b \simeq 1,029b$, il y a donc huit bitangentes réelles de pentes ± 1 avec des contacts réels (le lecteur notera la présence de creux dans chaque composante) mais si a est plus grand que cette valeur, huit seulement des contacts sont réels et les autres sont imaginaires, voir figures 5 et 6.

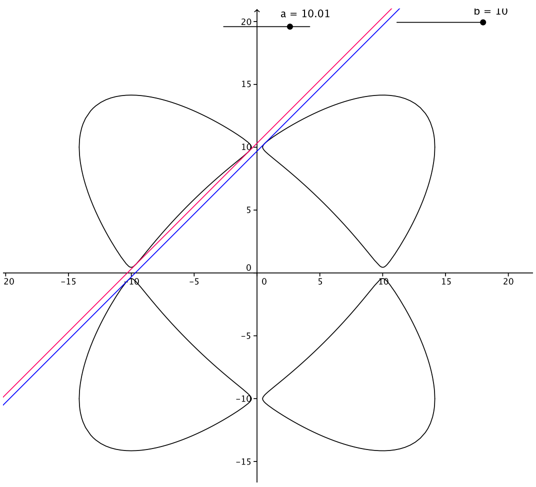

FIGURE 5 – Le cas $b < a < \omega$: seize contacts réels

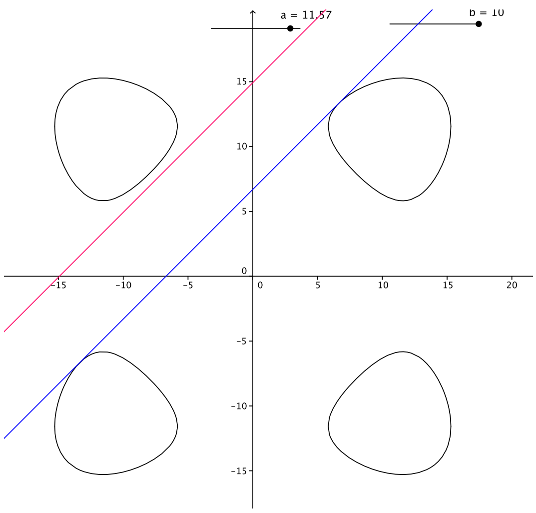

FIGURE 6 – Le cas $a > \omega$: huit contacts imaginaires, la tangente rouge correspond à v_1, la bleue à v_2

3.2.5 L'orbite à 8 éléments

Il reste à résoudre les équations $(*)$ lorsque u est différent de ± 1. On peut poser $U = u^2$ et $V = v^2$ et la première équation se résout en V : $V = a^2 \frac{1+U^2}{1+U}\cdot$ En reportant dans la seconde équation et en simplifiant par U^2, on trouve :

$$b^4U^2 - 2(2a^4 - b^4)U + b^4 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $4a^4(a^4 - b^4)$. Si a est plus petit que b il est < 0 et les bitangentes sont imaginaires. Si $a > b$, on a deux solutions positives $U_1 = u_1^2$ et $U_2 = u_2^2$, $U_i = \frac{2a^4 - b^4 \pm 2a^2\sqrt{a^4 - b^4}}{b^4}\cdot$ On en déduit deux valeurs positives pour V, $V_1 = v_1^2$ et $V_2 = v_2^2$ et on obtient 8 bitangentes réelles $y = (\pm u_i)x + (\pm v_i)$ pour $i = 1, 2$, qui forment une orbite sous $\mathbf{D}_4$.

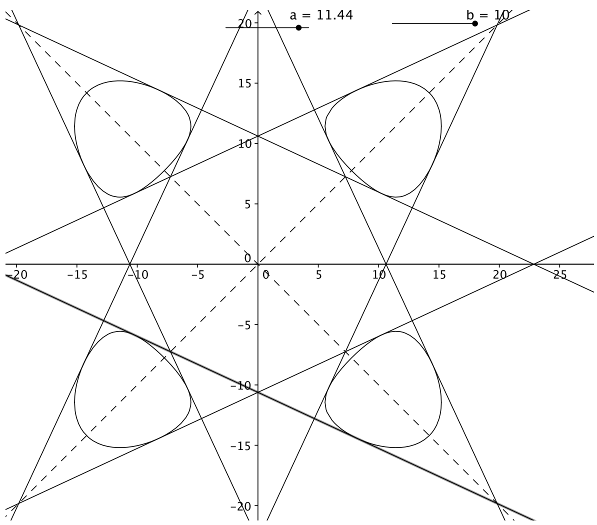

FIGURE 7 – L'orbite à huit éléments

De plus, les contacts des bitangentes sont réels. En effet, en vertu de 2.2 il suffit de montrer qu'on a $B^4 > 16A^2BD$, soit, après simplification par u^4v^2, $u^8v^2 > (1 + u^4)^2(v^2 - a^2)$. En remplaçant v^2 par $a^2\frac{1+u^4}{1+u^2}$, il reste $u^6 > (1 + u^4)(u^2 - 1)$ ou encore $u^4 - u^2 + 1 > 0$, ce qui est toujours vrai.

4 Bilan

Ce qui précède montre que la quartique de Salmon admet bien 28 bitangentes sur $\mathbf{C}$. Dans le cas $a < b$, quatre seulement sont réelles, mais pour $a > b$, elles le sont toutes. Dans le cas $b < a < (9/8)^{1/4}\, b \simeq 1,03\, b$ (donc une zone de paramètres très étroite) les points de contact sont tous réels, mais pour $a > (9/8)^{1/4}\, b$, quatre bitangentes (réelles) ont des contacts imaginaires (il s'agit des tangentes qui correspondent aux jaunes sur la figure suivante). La figure[10] de la page suivante correspond au cas où toutes les tangentes et tous les contacts sont réels. Il y a 6 orbites sous le groupe $\mathbf{D}_4$: les tangentes horizontales et verticales se répartissent en deux orbites (bleues et vertes), celles qui passent par l'origine forment une orbite (rose), les tangentes de pentes ± 1 constituent deux orbites (noires et jaunes), enfin il reste l'unique orbite à 8 éléments (en rouge).

10. Toutes les figures de ce texte ont été réalisées avec le logiciel GeoGebra.

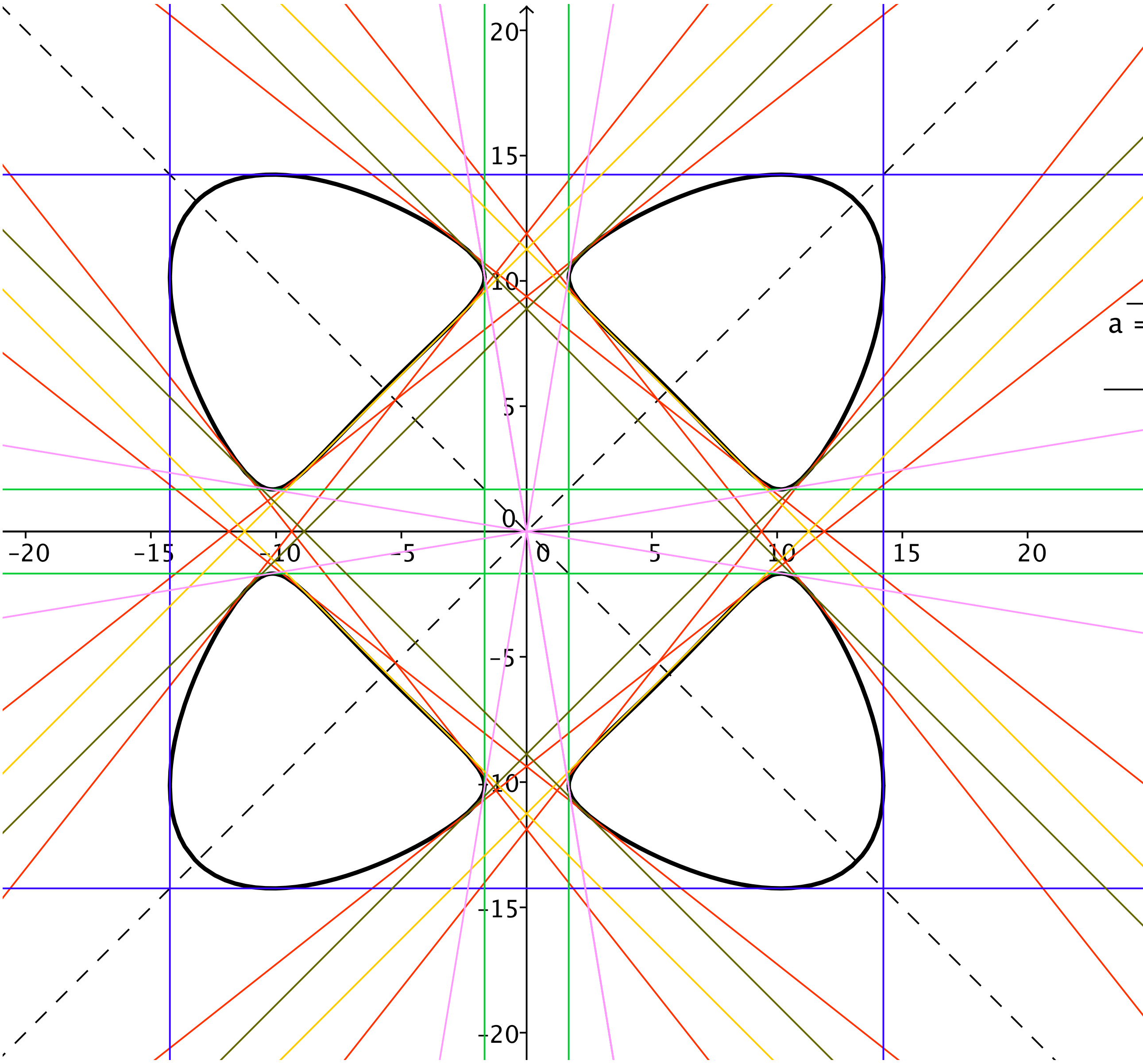

Figure 8 – Les 28 bitangentes dans le cas $a = 10{,}14$ et $b = 10$