Thérapeutique

Daniel PERRIN

1 La question

Le docteur Victor Ticoli, médecin généraliste à Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne) a expérimenté sur ses patients atteints de fractionnite aigüe un traitement révolutionnaire (la prise de la pastille). Il a constaté que son traitement était efficace dans $52,05\%$ *des cas (pourcentage arrondi au centième). Sachant que la fractionnite est une maladie assez rare qui touche certainement moins de 100 des patients du docteur Ticoli, déterminer le nombre exact de patients atteints par la maladie et pour combien d'entre eux le traitement a été efficace.*

2 Solution

2.1 Position du problème

La question est un cas particulier du problème suivant. Quand on a un rationnel $r = a/b$, disons avec $0 < r < 1$, écrit sous forme de fraction irréductible, on sait qu'il admet un développement décimal illimité périodique que l'on calcule par l'algorithme de division euclidienne. De plus, on peut tronquer ce développement pour donner une valeur décimale approchée de r à 10^{-n} près. Il y a pour cela plusieurs possibilités. Si le développement de r est $r = 0.a_1a_2 \dots a_k \dots$ et si r n'est pas lui-même un nombre décimal, on peut choisir la valeur approchée à 10^{-n} près par défaut : $0.a_1 \dots a_n$, par excès : $0.a_1 \dots a_{n-1}(a_n + 1)$ (avec la convention que si a_n est égal à 9 on augmente de 1 le a_{n-1}, etc.) ou enfin, la valeur approchée à 10^{-n} près "la plus proche" qui est $0.a_1 \dots a_n$ si a_{n+1} est ≤ 5 ou $0.a_1 \dots a_{n-1}(a_n + 1)$ (toujours avec la même convention) si a_{n+1} est > 5. On note que deux fractions qui ont la même valeur décimale approchée à 10^{-n} près (en quelque sens que ce soit) diffèrent de moins de 10^{-n}.

La question est ici le chemin inverse : si l'on se donne une fraction décimale (ici elle est donnée sous la forme d'un pourcentage 52.05% ce qui signifie $0.5205 = 5205/10000 = 1041/2000$), il s'agit de trouver une fraction a/b dont le dénominateur est borné par un entier fixé (ici b est le nombre de patients atteints de la maladie, borné par 100, et a le nombre de patients guéris) dont le développement décimal est égal à 0.5205 à 10^{-4} près, en l'un des sens précédents. Avec la version[1] "la plus proche" on doit donc avoir

1. C'est cela qui est sous-entendu dans l'énoncé.

$0.52045 < a/b \leq 0.52055$

Notons qu'il n'est pas toujours possible de trouver un rationnel à dénominateur borné dont l'approximation décimale soit prescrite, par exemple 0.5207 n'est l'approximation décimale d'aucun rationnel de dénominateur < 100, voir remarque 2.3 ci-dessous. C'est bien naturel car les nombres décimaux de dénominateur 10^4 compris entre 0 et 1 sont au nombre de 9999 tandis que les fractions irréductibles de dénominateur < 100 comprises entre 0 et 1 sont au nombre de 3003 seulement.

En tous cas, s'il y a une solution, elle est unique en vertu du lemme suivant :

2.1 Lemme. *Soient $r = \dfrac{a}{b}$ et $s = \dfrac{c}{d}$ deux rationnels positifs distincts avec des dénominateurs < 100. Alors on a $|r - s| > 10^{-4}$ de sorte que les approximations décimales de r et s au dix-millième près sont distinctes.*

Démonstration. On a $r - s = \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$ avec $bd < 10000$ et $ad - bc \neq 0$.

Ce résultat assure que si l'on trouve, par n'importe quel moyen, une fraction qui admet la bonne approximation décimale, c'est l'unique solution du problème.

2.2 Le résultat

Nous allons montrer de plusieurs manières que, dans le cas de l'énoncé, il y avait 73 patients et que 38 sont guéris. La première méthode utilise l'outil informatique, les deux suivantes donnent deux approches théoriques distinctes, enfin la dernière fournit une solution artisanale et élémentaire du problème.

2.3 Avec l'outil informatique

Il y a une manière simple et brutale de trouver le résultat qui est d'écrire quelques lignes de programme : on cherche les fractions x/y avec $y < 100$ dont la valeur décimale approchée est 0.5205.

Voici un programme écrit avec le logiciel SAGE dans le cas de la valeur approchée la plus proche :

```
def APM5534() :
   for x in [1..53] :
      for y in [x+1..99] :
         if abs(x/y -0.5205)<=0.00005 :
            print (x,y)
```

Il y a une unique solution qui est $\frac{38}{73}\cdot$

On peut écrire des variantes de ce programme donnant 0.5205 comme valeur approchée par défaut : $0.5205 \leq x/y < 0.5206$ (on trouve encore 38/73) ou par excès : $0.5204 < x/y \leq 0.5205$ (là, on trouve $51/98 \sim 0.520408$).

2.4 Avec les suites de Farey

Nous ne faisons qu'effleurer ce thème. Pour des précisions, voir par exemple : D. Perrin, *Mathématiques d'école*, Cassini 2011, p. 96.

La suite de Farey d'ordre $n > 0$, notée F_n, est la suite ordonnée des rationnels p/q de $[0,1]$, écrits sous forme de fractions irréductibles, dont le dénominateur est $\leq n$. On s'intéresse ici à la suite de Farey d'ordre 99. La fraction cherchée étant plus grande que $\frac{52}{100} = \frac{13}{25}$, il s'agit de préciser les fractions qui lui succèdent dans la suite. La réponse est donnée par le lemme suivant :

2.2 Lemme. *Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible, plus petite que 1, de dénominateur $q \leq n$. Il existe deux entiers r, s uniques vérifiant $rq - sp = 1$ et $n - q < s \leq n$. La fraction $\frac{r}{s}$ est le successeur de $\frac{p}{q}$ dans la suite de Farey d'ordre n.*

Démonstration. Comme p et q sont premiers entre eux, ils vérifient une relation de Bézout $aq - bp = 1$ avec $a, b \in \mathbf{Z}$. On sait que toutes les autres relations de Bézout reliant p et q sont de la forme $(a + kp)q - (b + kq)p = 1$, avec $k \in \mathbf{Z}$, et il suffit de déterminer k de sorte que $s := b + kq$ vérifie $n - q < s \leq n$, soit $\frac{n-b}{q} - 1 < k \leq \frac{n-b}{q}$, mais comme cet intervalle est de largeur 1 il y a un unique entier k convenable.

On voit que r/s est dans F_n, qu'on a $\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{pq} > 0$ et il reste à voir que r/s est exactement le successeur de p/q dans F_n. Sinon, on aurait un intermédiaire $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$ avec $b \leq n$. Les inégalités donnent $rb - as > 0$ (donc ≥ 1) et $aq - pb > 0$ (idem) et, comme on a $b = (rb - as)q + (aq - pb)s$, on en déduit $b \geq q + s > n$ par construction de s et c'est absurde.

Ce lemme permet de déterminer les successeurs de 13/25 dans F_{99}. On part de la relation de Bézout $2 \times 13 - 1 \times 25 = 1$. Les relations de Bézout avec 13 et 25 s'écrivent $(2 - 25k) \times 13 + (-1 + 13k) \times 25 = 1$ et il s'agit de trouver $s = 25k - 2$ entre 75 et 100. L'unique solution est $k = 4$ et on a $r = 51$ et $s = 98$, pour une valeur approchée $\frac{51}{98} = 0.520408$. On trouve les termes suivants de la suite par la même méthode (à chaque pas on repart de la relation de Bézout précédente), il s'agit des fractions $\frac{38}{73} \sim 0.520547$, puis $\frac{25}{48} \sim 0.520833$. On voit que la seule fraction dont l'approximation décimale à 10^{-4} près est 0.5205 est 38/73 ce qui donne le résultat annoncé.

2.3 *Remarque.* Comme la suite de Farey au voisinage de 0.52 est :

$$\cdots \frac{13}{25} < \frac{51}{98} < \frac{38}{73} < \frac{25}{48} < \cdots$$

il s'ensuit que 0.5207 n'est l'approximation décimale d'aucun rationnel de dénominateur < 100 et ce, quel que soit le type d'approximation choisi (par défaut, par excès, la plus proche).

2.5 Avec les fractions continues

On part de l'inégalité $0.52045 < \frac{a}{b} \leq 0.52055$. Comme b est ≤ 99, on en déduit $a \leq 0.52055 \times 99 \sim 51.53445$ donc $a \leq 51$.

On passe à l'inverse, obtenant $1.921045 \leq \frac{b}{a} < 1.921414$. Cela montre que la partie entière de la fraction b/a est 1, on la retranche et il reste $0.921045 \leq \frac{b-a}{a} < 0.921414$. Comme on a $a \leq 51$ on en déduit $b - a \leq 46$.

On continue le processus en prenant l'inverse et en retranchant les parties entières et on obtient successivement les inégalités :

$$0.0852 < \frac{2a-b}{b-a} \leq 0.08572$$

$$0.6654 \leq \frac{12b-23a}{2a-b} < 0.7249$$

$$0.3794 < \frac{25a-13b}{12b-23a} \leq 0.5027$$

et ces inégalités donnent $2a - b \leq 3$, $12b - 23a \leq 2$ et $25a - 13b \leq 1$. Mais comme cette dernière quantité est entière on a $25a - 13b = 1$ et il s'ensuit $12b - 23a = 2$. On a donc un système de deux équations linéaires en a, b qui donne $a = 38$, $b = 73$ comme annoncé.

Cette méthode peut sembler un peu mystérieuse. En fait elle revient à calculer le développement en fraction continue de 0.5025.

Rappelons que tout rationnel $r = \frac{p}{q}$, compris entre 0 et 1, admet un développement (fini) en fraction continue :

$$r = \frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

où les a_i sont des entiers positifs. Le calcul des a_i à partir de r se fait par récurrence. On part de $x_1 = 1/r$. La forme de la fraction continue donne $a_1 = [x_1]$, on pose $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ et, pour tout i, $a_i = [x_i]$ et $x_i = a_i + \frac{1}{x_{i+1}}\cdot$ On voit qu'apparaissent ici les deux ingrédients des calculs effectués ci-dessus : partie entière et passage à l'inverse.

De fait, si l'on applique cette méthode au rationnel 0.5205 on trouve le développement :

$$0.5205 = \frac{1041}{2000} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}}}}}$$

La fraction 38/73 cherchée apparaît alors comme tronquée de la fraction continue précédente avec seulement les a_i apparus dans le calcul ci-dessus :

$$\frac{38}{73} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

On n'a là qu'un mince aperçu des possibilités de cette méthode. Sur cet immense et magnifique sujet des fractions continues on renvoie le lecteur au livre de G. H. Hardy et E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford Clarendon Press, 6-ième edition, 2008.

2.6 Une méthode artisanale

Les deux méthodes précédentes ont le mérite de fournir une réponse générale à la question posée. Face à un exemple concret on peut souvent s'en tirer de manière plus économique avec un peu d'astuce, par exemple comme suit.

On cherche une fraction $r := \frac{a}{b}$ voisine de 0.52, avec un dénominateur $b < 100$. On voit que b est plus petit que $2a$ qui donnerait la valeur 0.5, mais pas beaucoup. On essaie d'abord $b = 2a - 1$ qui donne $r = \frac{a}{2a-1}$ dont l'inverse est $2 - \frac{1}{a}$ qui doit être voisin de $0.5205^{-1} \sim 1.92122$. L'entier a doit donc être voisin de l'inverse de $s := 2 - 1.92122 = 0.0788$, qui vaut $s^{-1} = 12.69$, donc a est voisin de 13. On obtient ainsi la fraction $\frac{13}{25} = 0.52$ qui n'est autre que notre point de départ et on n'est pas avancé.

On essaie ensuite $b = 2a - 2$. Cette fois $\frac{2}{a}$ est voisin de $s = 2 - \frac{1}{r}$, a est voisin de $2s^{-1} \sim 2 \times 12.69 = 25.38$ et on obtient la fraction $\frac{25}{48} \sim 0.5208$, un peu trop grande par rapport à l'objectif. Avec $b = 2a - 3$, a est voisin de $3 \times 12.69 \sim 38.07$ et cette fois la fraction 38/73 donne le résultat escompté ! Comme on sait qu'il y a au plus une solution, on a gagné.