Une suite universelle ?

Daniel PERRIN

1 La question

On dit qu'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ *de réels positifs est* **universelle** *si elle vérifie la propriété suivante :*

Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ *il faut et il suffit que* (u_n) *soit bornée pour que la série* $\sum a_n u_n$ *soit convergente.*

2 Solution

2.1 Théorème. *Les suites universelles, c'est comme les fourmis de dix-huit mètres*[1]*, ça n'existe pas.*

Démonstration. Le résultat vient de trois lemmes. Le premier donne une condition nécessaire sur la suite (a_n) :

2.2 Lemme. *Si la suite* (a_n) *est universelle, la série* $\sum a_n$ *est convergente (et, en particulier, la suite* (a_n) *tend vers* 0*).*

Démonstration. (de 2.2) On considère la suite (u_n) constante et égale à 1. Elle est bornée. Comme (a_n) est universelle la série $\sum a_n u_n = \sum a_n$ est convergente.

Il s'agit de voir si cette condition nécessaire est aussi suffisante. Le second lemme semble aller dans ce sens, assurant la convergence de la série $\sum a_n u_n$:

2.3 Lemme. *Si la série* $\sum a_n$ *est convergente, alors, pour toute suite* (u_n) *bornée, la série* $\sum a_n u_n$ *est convergente.*

Démonstration. (de 2.3) Il existe M tel que l'on ait, pour tout n, $|u_n| \leq M$. La série $a_n u_n$ est majorée, en valeur absolue, par Ma_n, donc convergente.

Attention, l'énoncé demande non seulement que la série $\sum a_n u_n$ converge pour toute suite (u_n) bornée, mais aussi que le fait d'être bornée soit nécessaire. C'est là que le bât blesse comme on va le voir.

2.4 Lemme. *Soit* (a_n) *une suite de nombres positifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) La suite (a_n) *n'est pas minorée par un nombre* > 0 *(i.e.* $\forall \epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $a_n < \epsilon$*).*

1. Avec un chapeau sur la tête ...

2) La suite (a_n) contient une sous-suite décroissante a_{n_k} vérifiant $a_{n_k} < \dfrac{1}{3^k}$ pour tout k.

3) Il existe une suite (u_n) non bornée telle que la série $\sum a_n u_n$ soit convergente.

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) On construit la suite a_{n_k} par récurrence sur k en prenant $a_{n_{k+1}} < \mathrm{Min}\,(a_{n_k}, 1/3^{k+1})$.

2) $\Longrightarrow$ 3) On pose $u_n = 0$ si $n \neq n_k$ et $u_{n_k} = 2^k$. La suite des sommes partielles de $a_n u_n$ est majorée par $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3^k}$ de sorte que la série converge.

3) $\Longrightarrow$ 1) Soit (u_n) une suite non bornée telle que $\sum a_n u_n$ converge. Pour tout $k > 0$ il existe n_k tel que $|u_{n_k}| \geq k$. Mais comme la série $\sum a_n u_n$ converge, la suite $(a_n u_n)$ tend vers 0 donc est majorée par 1 en valeur absolue, de sorte que a_{n_k} est $\leq 1/k$ et la suite est non minorée.

On a alors la conclusion du théorème : si (a_n) est une suite universelle, la série $\sum a_n$ est convergente en vertu de 2.2, donc (a_n) converge vers 0, donc est non minorée et, par 2.4, il existe une suite (u_n) non bornée telle que $\sum a_n u_n$ converge, contradiction.