Construction du milieu

Daniel PERRIN

1 La question

Soient A et B deux points distincts du plan et $\mathscr{D}$ une droite parallèle à (AB). Construire, à la règle non graduée, le milieu de $[AB]$.

2 Solution

2.1 Variante projective

Les anciens géomètres savaient que le milieu C d'un segment $[AB]$ n'est autre que le conjugué harmonique du point à l'infini de (AB). En effet, dire que C est conjugué harmonique de D par rapport à A, B signifie que le birapport $[\![A, B, C, D]\!] = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ est égal à -1. Lorsque D est à l'infini ce birapport se réduit à $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ et il vaut donc -1 si et seulement si on a $\overline{CA} = -\overline{CB}$ c'est-à-dire si C est milieu de $[AB]$.

Les mêmes connaissaient aussi une construction à la règle du conjugué harmonique, ou de la polaire, c'est la construction suivante :

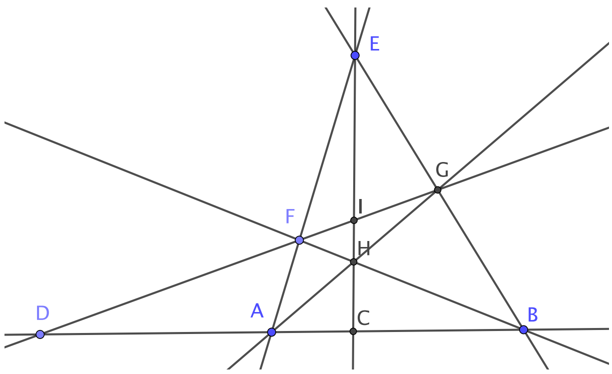

FIGURE 1 –

Dans cette figure A, B, D sont donnés et on construit C (à la règle) tel que $[\![A, B, C, D]\!] = -1$.

La preuve de ce fait est immédiate si l'on sait qu'une perspective de centre O conserve le birapport ce qui signifie que si quatre droites concourantes (en O) coupent deux sécantes en A, B, C, D et A', B', C', D' respectivement, on a $[\![A, B, C, D]\!] = [\![A', B', C', D']\!]$.

En appliquant cela avec la perspective de centre E on a $r := [\![A, B, C, D]\!] = [\![F, G, I, D]\!]$, avec celle de centre H on a $[\![F, G, I, D]\!] = [\![B, A, C, D]\!]$. Mais on a aussi, par permutation, $[\![B, A, C, D]\!] = r^{-1}$, d'où $r = r^{-1}$ et $r = -1$.

Pour appliquer cela à la construction du milieu, il faut une donnée supplémentaire pour passer de la géométrie projective à la géométrie affine, celle d'une droite à l'infini, qui permet de parler de parallèle. Si l'on dispose d'une parallèle à (AB), donc d'une droite passant par le point à l'infini D de (AB), on reconstitue la figure précédente en prenant les points F, G sur cette parallèle, de sorte que (AF) et (BG) se coupent en E et (BF) et (AG) en H. Le milieu cherché est alors l'intersection de (AB) et de (EH).

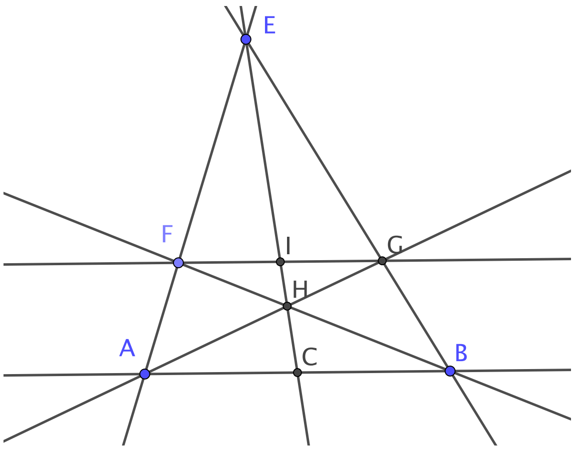

FIGURE 2 –

Sur ces questions on pourra consulter, sur ma page web :

Perrin Daniel, *Géométrie projective et applications aux géométrie euclidienne et non euclidiennes, Partie I, La géométrie projective linéaire*, `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livregeometrie/DPPartie1.pdf`

2.2 Preuve élémentaire

Reprenons la figure ci-dessus et montrons que C est bien le milieu de $[AB]$. C'est une jolie application de Thalès (qui est en vérité une variante de la preuve avec les perspectives). En effet, on a $\dfrac{FI}{AC} = \dfrac{EI}{EC} = \dfrac{IG}{BC}$, ce qui s'écrit encore $\dfrac{FI}{IG} = \dfrac{AC}{BC}$. Mais on a aussi $\dfrac{FI}{BC} = \dfrac{HI}{HC} = \dfrac{IG}{AC}$ qui donne $\dfrac{FI}{IG} = \dfrac{BC}{AC}$ et on en déduit $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$ donc $BC^2 = AC^2$ et le résultat.