Avoir de l'idée dans les suites

Daniel PERRIN

1 La question

On considère trois suites arithmétiques (u), (v), (w), *finies, de raison* 2, *de premiers termes (entiers) impairs* u_1, v_1, w_1 *et de longueurs respectives* i, j, k *avec* $i < j < k$, i, j *impairs et* k *pair. On suppose que ces trois suites sont disjointes. Est-il possible que la somme des termes de* (w) *soit égale à la somme des termes de* (u) *et de* (v) *?*

2 Solution

On note $S(u)$ la somme des termes de la suite (u).

2.1 C'est possible !

Il suffit de fournir un exemple. En voici un, pris un peu au hasard, le lecteur en verra beaucoup d'autres ci-dessous : $k = 10$, $w_1 = 1$, ..., $w_{10} = 19$, $S(w) = 100$, $j = 3$, $v_1 = 21, v_2 = 23, v_3 = 25$, $S(v) = 69$, $i = 1$, $u_1 = 31 = S(u)$.

2.2 Une infinité d'exemples

Soit $k = 2k'$ un nombre pair ≥ 10. On prend pour (w) la suite des nombres impairs de 1 à $2k - 1$, de longueur k et de somme $k^2 = 4k'^2$. On distingue deux cas :

• Supposons k' pair. On prend pour (v) la suite de trois termes $k'^2 - 5, k'^2 - 3, k'^2 - 1$, on a $S(v) = 3v_2 = 3k'^2 - 9$. On prend pour (u) la suite formée de l'unique terme $k^2 - S(v) = 4k'^2 - (3k'^2 - 9) = k'^2 + 9$. On vérifie qu'on a $2k - 1 = 4k' - 1 < k'^2 - 5$ (car on a pris $k' \geq 5$) et $k'^2 - 1 < k'^2 + 9$ de sorte que ces suites conviennent.

Exemple : $k = 12$, $(w) = 1, \dots, 23$, $(v) = 31, 33, 35$, $(u) = 45$.

• Si k' est impair on prend pour (v) la suite $k'^2 - 4, k'^2 - 2, k'^2$ et pour (u) la suite réduite à $k'^2 + 6$. C'est le cas de l'exemple proposé au §2.1.

Si $k \geq 12$, $k = 2k'$, on a une variante de cet exemple en prenant la même suite (w), pour (v) la suite $k'^2 + a - 2, k'^2 + a, k'^2 + a + 2$ et pour (u) la suite $k'^2 - 3a$, où a est choisi ≥ 1, de la parité opposée à celle de k' et tel que $k'^2 - 3a > 4k' - 1$ (il existe de tels a, par exemple 1 ou 2).

Un exemple est donné par $k = 12$, $(w) = 1, 3, \dots, 23$, $(u) = 33$, $(v) = 35, 37, 39$. Ici, la suite (u) est intercalée entre (w) et (v).

2.3 Des questions

Suivant le vieil adage : *faire des mathématiques c'est poser des problèmes et, si possible, les résoudre*, voici quelques questions suggérées par cette situation.

2.3.1 Quelques remarques

Si (u) est une suite de longueur i on peut l'écrire $(u) = a, a+2, \dots, a+2i-2$, avec a impair positif et on a $S(u) = ia + i(i-1)$. On note que $S(u)$ est $\geq i(i-1)$, que i divise $S(u)$ et que $S(u)$ et i déterminent a, donc (u), par la formule $a = \dfrac{S(u)}{i} - i + 1$.

2.3.2 Trouver toutes les solutions

Il y en a sans doute trop pour que la question soit pertinente. On se contentera donc de questions plus précises.

2.3.3 Les longueurs minimales

Les longueurs vérifient $i \geq 1$*,* $j \geq 3$ *et* $k \geq 4$*. Existe-t-il une solution avec ces longueurs minimales ?*

La réponse est positive avec $w = 7, 9, 11, 13$, $v = 1, 3, 5$, $u = 31$.

2.3.4 Imposer (w)

On se donne une suite (w) *(arithmétique de raison* 2*, de premier terme impair et de longueur* $k \geq 4$*). Peut-on trouver* $(u), (v)$ *vérifiant les conditions de l'énoncé ?*

La réponse est donnée par la proposition suivante :

2.1 Proposition. *Soit* (w) *une suite arithmétique de raison* 2*, de premier terme impair et de longueur paire* $k \geq 4$*. Il existe des suites* (u)*,* (v) *vérifiant les conditions de l'énoncé si et seulement si on a* $w_1 = 1$ *et* $k \geq 10$*,* $w_1 = 3$ *et* $k \geq 10$*,* $w_1 = 5$ *et* $k \geq 6$ *ou enfin* $w_1 \geq 7$*.*

Démonstration. Le cas $w_1 = 1$ a été traité ci-dessus (il faut avoir $k \geq 10$, sinon on a $S(w) \leq 64$ et comme les termes de u et v valent au moins 17, on a $S(u) + S(v) \geq 80$).

Si l'on a $w_1 \geq 7$ (donc $S(w) \geq 40$) on prend $(v) = 1, 3, 5$ et $(u) = S(w) - 9$. (On vérifie aisément qu'on a $S(w) - 9 > w_k$. En effet, $(w) = a, a+2, \dots, a+2k-2$, donc $S(w) = ka + k^2 - k$ et $k^2 + ka - k - 9 > a + 2k - 2$ dès que $k \geq 4$ comme on le voit en écrivant $k^2 + (k-1)a - 3k - 7 = (k^2 - 3k) + ((k-1)a - 7)$.

Dans le cas $w_1 = 3$, la suite (w) s'écrit $3, 5, \dots, 2k+1$ et sa somme vaut k^2+2k. On prend $(v) = 2k+3, 2k+5, 2k+7$ et $(u) = k^2-4k-15$ (on vérifie qu'on a $k^2 - 4k - 15 > 2k + 7$ pour $k \geq 10$). Pour $k \leq 8$ on a $S(w) \leq 80$ alors que $S(u) + S(v)$ est au moins égal à 88.

Enfin pour $w_1 = 5$, $(w) = 5, 7, \dots, 2k + 3$ a pour somme $k^2 + 4k$. On prend $(v) = 2k + 5, 2k + 7, 2k + 9$ et $(u) = k^2 - 2k - 21$. On vérifie qu'on a $k^2 - 2k - 21 > 2k + 9$ pour $k \geq 8$. Pour $k = 6$ on prend $(v) = 17, 19, 21$ et $(u) = 3$. Si $k = 4$, on a $S(w) = 32$ et $S(v) \geq 45$ et il n'y a pas de solution.

2.3.5 Imposer (u)

On se donne une suite (u) (arithmétique de raison 2, de premier terme impair et de longueur impaire $i \geq 1$). Peut-on trouver $(v), (w)$ vérifiant les conditions de l'énoncé ?

La réponse est positive. Soit i la longueur de u, $(u) = a, a+2, \dots, a+2i-2$ avec a impair. Posons $s = S(u) = ia+i(i-1)$. On prend $j = i+2 := 2j'+1$ et $k = j+1 = i+3$, puis $(w) = b, b+2, \dots, b+2k-2$. On a $S(w) = kb+k(k-1)$ donc $S(w) \equiv b \pmod{j}$. On choisit $b = s + jb'$ avec $b' > 3j'$. On a donc $S(w) - S(u) = jt$ avec $t = b + b' + j + 1$ et on prend pour (v) la suite de j termes centrée en t. On a $S(v) = jt$, donc $S(w) = S(u) + S(v)$ et on vérifie que le terme minimum de (v) (qui vaut $t - j' = b + b' + j' + 2$) est plus grand que $b + 2k - 2 = b + 4j' + 2$ (car on a pris $b' > 3j'$).

2.3.6 Imposer (v)

On se donne une suite (v) (arithmétique de raison 2, de premier terme impair et de longueur impaire $j \geq 3$). Peut-on trouver $(u), (w)$ vérifiant les conditions de l'énoncé ?

Là encore, la réponse est positive. On pose $(v) = a, a + 2, \dots, a + 2j - 2$. On prend $b > a + 2j - 2$, $k = j + 1$ et $(w) = b, b + 2, \dots, b + 2k - 2 = b + 2j$. On a $S(v) = ja + j(j - 1)$, $S(w) = (j + 1)b + j(j + 1)$ donc $S(w) - S(v) = 2j + b + j(b - a)$ et on prend pour (u) la suite réduite à cette seule valeur (qui est bien $> b + 2j$).

2.3.7 Imposer (v) et (w) avec $(v) < (w)$

On peut même parfois imposer deux des suites comme le montre le résultat suivant :

2.2 Proposition. *Soient (v) et (w) deux suites (arithmétiques de raison 2, de premier terme impair, (v) de longueur impaire $j \geq 3$ et (w) de longueur paire $k > j$). On suppose $(v) < (w)$ (c'est-à-dire que tous les termes de*

(v) sont strictement inférieurs à ceux de (w)). Alors il existe une suite (u) vérifiant les conditions de l'énoncé.

Démonstration. On écrit $(v) = a, a+2, \dots, a+2j-2$ et $(w) = b, b+2, \dots, b+2k-2$ avec $a+2j-2 < b$. On a $S(v) = ja + j(j-1)$, $S(w) = kb + k(k-1)$. Or on a le lemme suivant :

2.3 Lemme. *On a $S(w) - S(v) > b + 2k - 2$.*

Avec ce lemme on a la conclusion en prenant pour (u) la suite de longueur 1 d'unique terme $S(w) - S(v)$.

Il reste à montrer le lemme c'est-à-dire l'inégalité $kb+k^2-k-ja-j^2+j > b+2k-2$. Comme on a $(k-1)b > ja$ il reste à voir $k^2 - 3k - j^2 + j + 2 \geq 0$. Mais la plus grande racine de ce trinôme en k étant $j+1$, on a gagné.

2.3.8 Les ordres

Les trois suites étant disjointes on peut parler de l'ordre dans lequel elles apparaissent. La question est alors : y a-t-il des suites avec tous les ordres possibles pour u, v, w ?

Les six ordres sont possibles, voici un exemple pour chaque cas.

- Ordre $u < v < w$, $(u) = 45, 47, 49$, $(v) = 59, 61, 63, 65, 67$, $(w) = 71, 73, 75, 77, 79, 81$.
- Ordre $u < w < v$, $(u) = 1$, $(w) = 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$, $(v) = 35, 37, 39$.
- Ordre $v < u < w$, $(v) = 47, 49, 51, 53, 55$, $(u) = 65, 67, 69$, $(w) = 71, 73, 75, 77, 79, 81$.
- Ordre $v < w < u$, $(v) = 1, 3, 5$, $(w) = 7, 9, 11, 13$, $(u) = 31$.
- Ordre $w < u < v$, $(w) = 1, 3, \dots, 23$, $(u) = 33$, $(v) = 35, 37, 39$.
- Ordre $w < v < u$, $(w) = 3, 5, \dots, 21$, $(v) = 23, 25, 27$, $(u) = 45$.

2.3.9 Imposer i, j, k

Soient i, j, k trois entiers vérifiant $1 \leq i < j < k$, avec i, j impairs et k pair. Existe-t-il trois suites (u), (v), (w) convenables admettant ces longueurs ?

La question ne semble pas évidente. La conjecture naturelle et optimiste c'est que la réponse est toujours positive. Pour le cas général, on pose $a = u_1$, $b = v_1$, $c = w_1$. L'équation à résoudre est $ia + jb - kc = k(k-1) - i(i-1) - j(j-1)$. Le second membre peut être positif ($i = 1$, $j = 3$, $k = 4$), négatif ($j = k-1$, $i = k-3$ avec $k > 7$) ou nul ($k = 14$, $i = 9$, $j = 11$). Trouver a, b, c revient à résoudre une équation diophantienne linéaire, ce qui ne pose pas de problème, en revanche assurer le fait que les suites soient disjointes est nettement plus compliqué et nécessite sans doute de distinguer de nombreux cas de figures.

On se contente ici de traiter un exemple pour montrer comment on peut aborder cette question.

2.3.10 Le cas $j = k - 1, i = k - 3$

On choisit de prendre $(v) < (u) < (w)$. On pose $(v) = b, b + 2, \ldots, b + 2k - 4$, $(u) = a, a + 2, \ldots, a + 2k - 8$, $(w) = c, c + 2, \ldots, 2k - 2$ et on pose $a = b + 2k - 2 + \alpha$ avec $\alpha \geq 0$ et $c = a + 2k - 6 + \gamma$ avec $\gamma \geq 0$, donc $c = b+2k-2+\alpha+2k-6+\gamma = b+4k-8+\alpha+\gamma$. L'équation à résoudre est $S(w) = S(u) + S(v)$, c'est-à-dire $(k-3)a + (k-1)b - kc = -k^2 + 9k - 14$, soit encore $(k-4)b = k^2 + 9k - 20 + 3\alpha + k\gamma$ et il faut choisir α et γ pour avoir $3\alpha + 4\gamma \equiv -32 \pmod{k-4}$, ce qui est toujours possible.

Par exemple, avec $k = 30$, donc $j = 29$ et $i = 27$, on peut prendre $\alpha = 4$, $\gamma = 2$ et on obtient $b = 47$, puis $a = 109$ et $c = 165$. On vérifie qu'on a bien les propriétés attendues.