Des parallélogrammes parfaits

Daniel PERRIN

1 La question

On appelle parfait un parallélogramme, qui n'est ni un losange ni un rectangle, et dont les côtés, les diagonales et l'aire sont mesurés par des entiers. En existe-t-il ?

1.1 *Remarque.* C'est une question non évidente ! En effet, elle contient la question classique des triangles de Héron, c'est-à-dire des triangles dont les côtés sont entiers ainsi que l'aire (cela revient, pour le parallélogramme, à demander que les côtés, l'aire et l'une des diagonales soient entiers) qui n'est déjà pas triviale, mais ici, il y a une condition supplémentaire avec la deuxième diagonale. Je donne ci-dessous une méthode, inspirée de celles de Héron [1] et Brahmagupta [2], pour trouver une infinité de solutions. La question de les trouver toutes semble beaucoup plus ardue, voir la discussion à la fin.

1.2 *Remarque.* Dans le cas d'un losange ou d'un rectangle, le fait que les longueurs des côtés et des diagonales soient entières implique que l'aire l'est aussi.

2 Préliminaires

2.1 Parallélogrammes

On considère un parallélogramme $ABCD$. On pose $a = AB = CD$, $b = BC = DA$, $c = AC$ et $d = BD$. Dire que ce parallélogramme n'est pas un losange (resp. un rectangle) signifie qu'on a $a \neq b$ (resp. $c \neq d$). On peut supposer, par exemple, $a < b < c$. La première remarque c'est que a, b, c déterminent d :

2.1 Proposition. *On a* $2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$.

Démonstration. On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ donc $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{BC})$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ donc $BD^2 = AB^2 + BC^2 - 2(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{BC})$. En additionnant les deux formules on a $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ donc $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

1. Héron d'Alexandrie, premier siècle de notre ère, a donné l'exemple d'un triangle de côtés $13, 14, 15$ et d'aire 84.
2. Brahmagupta (598-668), mathématicien indien, a donné un exemple d'une famille infinie de triangles de Héron.

2.2 *Remarque.* Une variante consiste à utiliser Al-Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ et $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ avec $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCD}$. Comme on a $\gamma = \pi - \beta$, les cosinus sont opposés et on a le résultat en additionnant.

2.3 Corollaire. *Soient a, b, c, d quatre longueurs positives. Il existe un parallélogramme de côtés a, b et de diagonales c, d si et seulement si on a $|a - b| < c < a + b$ (ou $|a - b| < d < a + b$) et $2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$.*

Démonstration. Avec l'inégalité triangulaire on a un triangle de côtés a, b, c et si on considère le parallélogramme bâti sur ce triangle avec la diagonale c, son autre diagonale vérifie la relation de 3.1, donc c'est d.

2.2 Aire

La formule de Héron donne l'aire du triangle de côtés a, b, c, donc aussi l'aire $\mathscr{A}$ de $ABCD$: $4\mathscr{A}^2 = (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$.

2.3 Existence de parallélogrammes parfaits

En écrivant quelques lignes de programme avec le logiciel SAGE (pour $a, b, c \leq 500$) on trouve beaucoup de parallélogrammes parfaits, par exemple $a = 17$, $b = 28$, $c = 39$, $d = 25$, $\mathscr{A} = 420$, ou encore $a = 25$, $b = 39$, $c = 56$, $d = 34$, $\mathscr{A} = 840$, voir figure 1. Cela donne une première réponse au problème proposé. Notre objectif est maintenant de montrer qu'il y a une infinité de parallélogrammes parfaits. Attention, si l'on détient un tel parallélogramme on en obtient une infinité de manière triviale en multipliant les longueurs a, b, c, d par un même entier n, l'aire étant alors multipliée par n^2. On montrera qu'il y a une infinité de parallélogrammes parfaits **primitifs** c'est-à-dire avec a, b, c, d premiers entre eux.

2.4 Quelques remarques

2.4 Proposition. *Soit a, b, c, d un parallélogramme parfait primitif. Alors, deux des entiers a, b, c sont impairs et le dernier pair. L'aire $\mathscr{A}$ est paire.*

Démonstration. Comme la solution est primitive, a, b, c ne sont pas tous pairs (sinon d le serait aussi). On note ensuite que a, b, c ne peuvent être tous trois impairs. En effet, dans ce cas $2(a^2+b^2)$ serait multiple de 4, tandis que c^2+d^2 serait congru à 1 ou 2. La même méthode montre aussi que deux des entiers a, b, c ne peuvent être pairs et le troisième impair.

Il en résulte que les quatre termes du produit de la formule de Héron sont pairs, donc que $4\mathscr{A}^2$ est multiple de 16, donc que $\mathscr{A}$ est pair.

2.5 *Remarque.* En examinant les solutions fournies par SAGE (pour $a, b, c \leq 500$) on constate que toutes[3] les aires en question, sauf trois d'entre elles sont des entiers multiples de 5. Les exceptions sont $20, 175, 183, 169, 3276$; $145, 240, 337, 209, 30096$ et $165, 183, 350, 40, 6552$.

3 Une infinité de solutions

3.1 Rappel : les triangles pythagoriciens

Il s'agit de triangles rectangles à côtés entiers. On sait en produire une infinité d'exemples en prenant deux entiers positifs α, β avec $\alpha > \beta$ et le triangle rectangle de côtés $\alpha^2 - \beta^2, 2\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2$ que nous noterons $pyt(\alpha, \beta)$. À partir de ce triangle on en a d'autres en multipliant toutes les longueurs par un entier p. On obtient le triangle noté $p \times pyt(\alpha, \beta)$.

3.2 Analyse de l'exemple $25, 39, 56, 34$

On peut voir cet exemple comme une application de la méthode de Héron ou de Brahmagupta, méthode qui leur a permis de donner des exemples de triangles à côtés et aire entiers. Le principe est le suivant[4]. On fabrique deux triangles pythagoriciens $T_1 = ABE = p \times pyt(\alpha, \beta)$ (ici avec $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $p = 5$) et $T_2 = BCE = q \times pyt(\gamma, \delta)$ (ici avec $\gamma = 3$, $\delta = 2$ et $q = 3$) que l'on accole par leur côté commun $[BE]$ de longueur $p(\alpha^2 - \beta^2) = q(\gamma^2 - \delta^2) = 15$. On obtient un triangle ABC dont les côtés sont entiers. Comme la hauteur de ABC issue de B est BE, le double de l'aire de ABC (qui sera l'aire du parallélogramme $ABCD$ cherché) est aussi un entier. La seule condition manquante pour résoudre le problème posé ci-dessus est le fait que l'autre diagonale BD soit aussi entière. Si M est le milieu de $[AC]$ il suffit pour cela que BM le soit. Dans le cas de l'exemple considéré c'est vrai parce que le triangle $T_3 = BEM = pyt(\epsilon, \eta)$ est lui aussi pythagoricien (avec $\epsilon = 4$ et $\eta = 1$). Pour construire de tels exemples on va donc tenter de fabriquer trois tels triangles pythagoriciens, avec un côté commun, sans oublier de vérifier la condition assurant que M est milieu de $[AC]$: $AE + EM = CE - EM$.

3. On vérifie que toutes les solutions données en 3.3 sont multiples de 5.

4. Nombre des exemples de parallélogrammes parfaits fournis par SAGE que j'ai regardés sont plus ou moins fabriqués avec des constructions similaires, avec des triangles pythagoriciens. Mais ce n'est sans doute pas le cas de tous, voir la discussion plus bas.

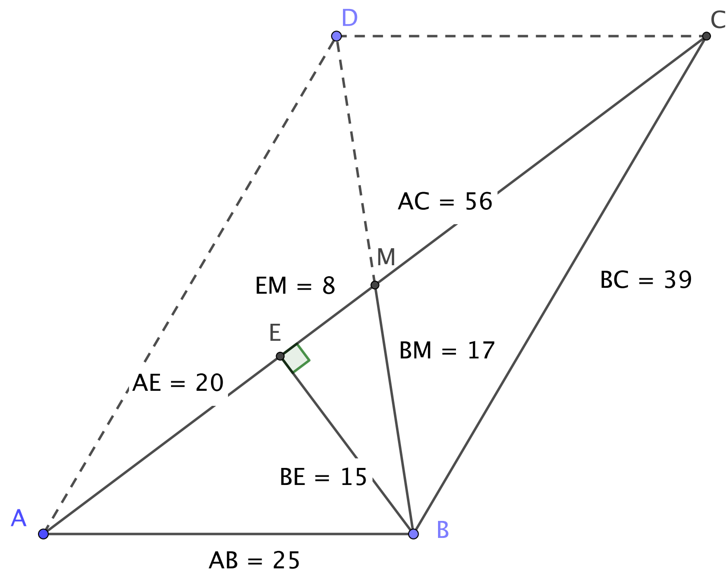

FIGURE 1 –

3.3 Construction de triangles pythagoriciens vérifiant la condition précédente

Pour reproduire la figure précédente il suffit de trouver des entiers α, β, γ, δ, ϵ, η, p et q (avec $\alpha > \beta$) vérifiant $\epsilon^2 - \eta^2 = q(\gamma^2 - \delta^2) = p(\alpha^2 - \beta^2)$ et $p\alpha\beta + 2\epsilon\eta = q\gamma\delta$. En effet, cette donnée permet de construire les triangles $T_3 = BEM = pyt(\epsilon, \eta)$, $T_1 = ABE = p \times pyt(\alpha, \beta)$ et $T_2 = BEC = q \times pyt(\gamma, \delta)$, avec le côté commun $BE = \epsilon^2 - \eta^2 = q(\gamma^2 - \delta^2) = p(\alpha^2 - \beta^2)$. De plus la condition $4\epsilon\eta + 2p\alpha\beta = 2q\gamma\delta$, qui signifie $AE + EM = CE - EM$, montre que M est le milieu de $[AC]$. On reconstitue ainsi la figure ci-dessus et on obtient un parallélogramme parfait [5].

Pour trouver une solution on procède comme suit. On prend [6] $p = \gamma^2 - \delta^2$ et $q = \alpha^2 - \beta^2$. Il faut avoir $\epsilon^2 - \eta^2 = (\epsilon - \eta)(\epsilon + \eta) = (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2)$ ce que l'on réalise en prenant [7] $\epsilon - \eta = \alpha^2 - \beta^2$ et $\epsilon + \eta = \gamma^2 - \delta^2$ et on obtient :

$$\epsilon = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2}{2} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \delta^2}{2}.$$

5. Rappelons que dans l'exemple ci-dessus, les valeurs sont les suivantes : $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$, $\delta = 2$, $\epsilon = 4$, $\eta = 1$, $p = 5$, $q = 3$.

6. Ce n'est sans doute pas la seule solution possible.

7. Ici on s'inspire de la figure ci-dessus pour faire ce choix. On pourrait aussi prendre $\epsilon = \alpha\gamma + \beta\delta$ et $\eta = \alpha\delta + \beta\gamma$, mais le lecteur vérifiera que cette option n'aboutit pas.

La condition $p\alpha\beta + 2\epsilon\eta = q\gamma\delta$ devient :

$$(*) \qquad (\gamma^2-\delta^2)(\gamma^2-\delta^2+2\alpha\beta) = (\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2+2\gamma\delta).$$

La proposition suivante résume les résultats :

3.1 Proposition. *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des entiers positifs avec $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$ et vérifiant l'équation $(*)$. On pose :*

$$a = (\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2-\delta^2), \quad b = (\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)$$

$$c = 2\alpha\beta(\gamma^2-\delta^2) + 2\gamma\delta(\alpha^2-\beta^2),$$

$$d = \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4-2\alpha^2\beta^2-2\gamma^2\delta^2 = (\alpha^2-\beta^2)^2+(\gamma^2-\delta^2)^2.$$

Alors il existe un parallélogramme de côtés a, b et de diagonales c, d et ce parallélogramme est parfait. Son aire est égale à :

$$\mathscr{A} = (\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2-\delta^2)[2\alpha\beta(\gamma^2-\delta^2)+2\gamma\delta(\alpha^2-\beta^2)].$$

Démonstration. Le lecteur vérifiera que, si l'on note P le polynôme $P = (\gamma^2-\delta^2)(\gamma^2-\delta^2+2\alpha\beta) - (\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2+2\gamma\delta)$ (de sorte que la relation $(*)$ signifie $P=0$), on a, dans l'anneau de polynômes $\mathbf{Q}[\alpha,\ \beta,\gamma,\delta]$, $c^2+d^2-2(a^2+b^2) = P^2 - 4P(\beta\gamma-\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)$ ce qui montre qu'avec $(*)$ on a $2(a^2+b^2) = c^2+d^2$.

3.2 *Remarque.* Le fait de vérifier $(*)$ et d'avoir $\alpha > \beta$ n'implique pas en général qu'on ait $\gamma > \delta$, voir par exemple $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 9$, $\delta = 12$.

3.4 Résolution de l'équation $(*)$ avec $\alpha - \beta = \gamma - \delta$

Il reste à résoudre l'équation diophantienne $(*)$. Le logiciel SAGE en donne une foule de solutions, de sorte que l'on peut espérer qu'il y en a une infinité. De plus, on constate que nombre d'entre elles [8] vérifient $\alpha - \beta = \gamma - \delta$, de sorte qu'on peut conjecturer qu'il y en a une infinité vérifiant cette condition et c'est ce que l'on va chercher à prouver.

Si l'on suppose $\alpha - \beta = \gamma - \delta$, on peut simplifier l'équation par $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ et on remplace γ par $\delta + \alpha - \beta$. Il reste seulement l'équation [9] $(\beta-\delta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\delta - 3\beta\delta) = 0$.

On a donc à résoudre l'équation $\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\delta - 3\beta\delta = 0$ qui est celle d'une conique projective dont on détient des points entiers (par exemple $(1,1,0)$).

8. Mais pas toutes, par exemple $(13, 1, 19, 9)$ ne vérifie pas cette propriété.

9. La présence de $\beta - \delta$ en facteur est évidente car si l'on a à la fois $\beta = \delta$ et $\gamma - \delta = \alpha - \beta$ on a $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$ et l'équation est évidemment satisfaite.

On trouve une infinité de points à coordonnées entières de cette conique de la manière suivante. On passe en affine avec $\alpha = 0$ comme droite à l'infini. La conique affine est $1 - \beta + \delta - 3\beta\delta = 0 = 0$, qui se résout en $\delta = \dfrac{1-\beta}{3\beta - 1}$ ce qui donne, en posant $\beta = v/u$ et en homogénéisant, un paramétrage en $u, v \in \mathbf{Z}$ (et on calcule $\gamma = \delta + \alpha - \beta$) :

$$(**) \qquad \alpha = u(3v-u),\ \beta = v(3v-u),\ \gamma = 3v(u-v),\ \delta = u(u-v).$$

Le lecteur vérifiera que ces valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfont l'équation $(*)$. De plus, pour $0 < v < u < 3v$ on obtient des valeurs positives avec $\alpha > \beta$ et si l'on choisit u, v premiers entre eux et u non multiple de 3, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont premiers entre eux. Il y a évidemment une infinité de couples u, v vérifiant ces conditions.

3.5 Un théorème

Tout ce qui précède permet de montrer le résultat suivant :

3.3 Théorème. *Soient u, v des entiers vérifiant $0 < v < u < 3v$, avec u, v premiers entre eux, de parités différentes et u non multiple de 3. Alors il existe un parallélogramme parfait primitif dont les côtés et les diagonales sont donnés par les formules suivantes :*

$$a = (u^2+v^2)(3v-u)(3v+u),$$

$$b = (u+v)(u-v)(u^2+9v^2),$$

$$c = 2uv[(3v-u)(3v+u) + 3(u-v)(u+v)],$$

$$d = (u+v)^2(3v-u)^2 + (u-v)^2(3v+u)^2.$$

Il y a une infinité de tels parallélogrammes. Leur aire est donnée par la formule :

$$\mathscr{A} = uv(u-v)(u+v)(3v-u)(3v+u)(u^2+3v^2).$$

Démonstration. Cela résulte de ce qui précède. On définit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par les formules $(**)$ ci-dessus, puis a, b, c, d par celles de la proposition 3.1. Les entiers en question ont tous en facteur $\alpha - \beta = \gamma - \delta$. On simplifie par ces nombres et aussi par $u - v$ et $3v - u$ qui sont aussi en facteur. On obtient les formules données dans le théorème.

Pour voir que la solution est primitive, on suppose qu'un nombre premier p divise a, b, c, d et on distingue selon qu'il divise $u^2 + v^2$, $3v - u$ ou $3v + u$. Dans tous les cas les hypothèses faites mènent à une contradiction.

3.4 *Remarque.* On obtient une infinité de parallélogrammes parfaits, mais on est loin d'en épuiser la liste. En effet, hormis celui qui nous a servi de modèle, à savoir $(25, 39, 56, 34)$, les autres ont des valeurs de a, b, c, d beaucoup plus grandes (le suivant est $321, 1281, 1480, 1138$) et un programme systématique donne beaucoup de parallélogrammes qui ne relèvent pas de ces formules. Avec des valeurs de a, b, c, d plus petites que 100 et les conditions $b < a < c$ et $d < c$, en voici la liste : $17, 28, 39, 25$; $25, 39, 56, 34$; $26, 51, 73, 35$; $26, 73, 97, 51$; $33, 58, 85, 41$; $41, 50, 89, 21$.

4 Discussion

La méthode de construction utilisée ici n'est évidemment pas la seule possible.

4.1 Des variantes

Il y a nombre d'exemples qui, sans être exactement du type ci-dessus, s'obtiennent toutefois avec l'idée de Héron et Brahmagupta, qui consiste à accoler deux triangle pythagoriciens. En voici deux :

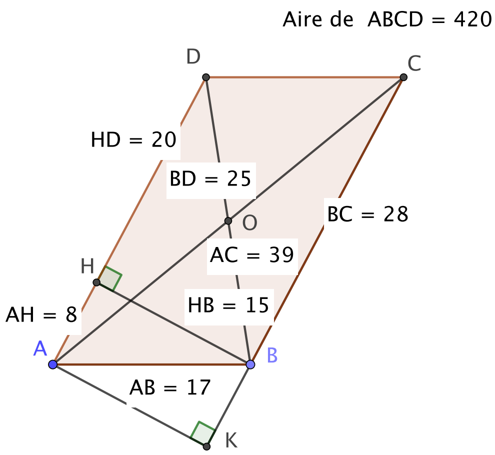

Figure 2 –

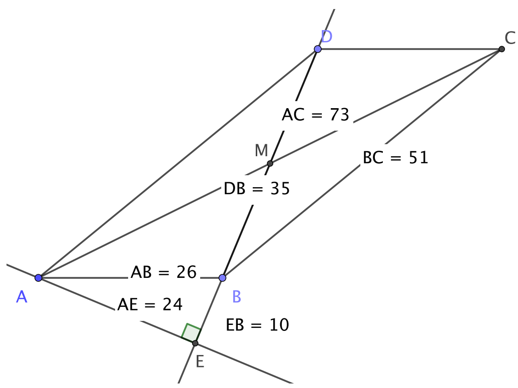

Figure 3 –

4.1.1 L'exemple $17, 28, 39, 25$

Voir la figure 2. Ici on a deux triangles pythagoriciens $BHD = 15, 20, 25$ et $AKC = 15, 36, 39$, on ajoute au premier le triangle pythagoricien AHB, $8, 15, 17$ et on retranche ce même triangle, en position ABK, au second. On obtient un parallélogramme parfait $17, 28, 39, 25$ d'aire 420.

4.1.2 L'exemple $26, 51, 73, 35$

Dans cet exemple, voir figure 3, il faut chercher un peu mais on finit par trouver des pythagoriciens. Avec E projeté de A sur (BD) on a ABE, $10, 24, 26$, double du $5, 12, 13$, AED, $24, 45, 51$, triple du $8, 15, 17$.

4.2 Des exemples rétifs ?

À côté de ces exemples, tous justiciables d'une approche fondée sur les triangles pythagoriciens, il semble y avoir des exemples qui ne relèvent pas de ce point de vue, tel $(20, 175, 183, 169)$, d'aire $\mathscr{A} = 3276$. En effet, aucun des quotients de $\mathscr{A}$ par a, b, c, d n'est un entier ce qui indique qu'aucune des hauteurs des triangles n'est entière et la méthode utilisant les triangles pythagoriciens semble bien compromise.

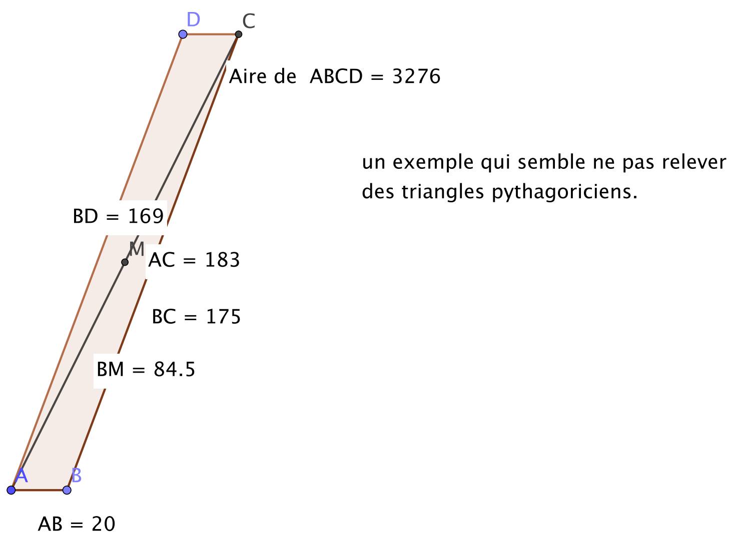

FIGURE 4 –

4.1 *Remarque.* Pour aborder le problème général, une autre méthode consiste à résoudre l'équation diophantienne $2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$. Attention, toutefois, cette condition n'assure pas que l'aire est entière comme le montre l'exemple $7, 4, 9, 7$.

4.3 Dans la littérature

Je n'avais pas regardé la littérature avant d'étudier la question, mais je connaissais depuis longtemps les triangles de Héron, sur lesquels il y a une profusion d'articles. La question des parallélogrammes parfaits apparaît dans certains d'entre eux sous la forme suivante :

existe-t-il des triangles de Héron dont les médianes soient rationnelles ?

(Bien entendu les médianes du triangle deviennent les (demi)-diagonales du parallélogramme.)

Voir par exemple [BR] et [Hone] où une infinité d'exemples avec ces propriétés sont produits. Les méthodes utilisent notamment la théorie des courbes elliptiques. Pour une question (posée dans le numéro 152 de la revue *Chantiers* de l'APM) qui n'est pas sans rapport, voir :
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Conferences/APM-aire-perimetre9.pdf`

Références

[BR] R.H. Buchholz and R.L. Rathbun, *An infinite set of Heron triangles with two rational medians*, Amer. Math. Monthly 104 (1997) 107–115.

[Hone] Andrew N.W. Hone *Heron triangles with two rational medians and Somos-5 sequences* arXiv : 2107.03197