Une étonnante approximation

Daniel PERRIN

1 La question

Soient deux réels A et B avec $0 \leq A \leq B$. Montrer que $0.4A + 0.96B$ est une approximation de $\sqrt{A^2+B^2}$ avec une erreur relative inférieure à 4%.

2 Solution

2.1 Réduire le problème à une variable

On pose $A = Bx$ avec $0 \leq x \leq 1$. On a $0.4A + 0.96B = B(0.4x + 0.96)$ et $\sqrt{A^2+B^2} = B\sqrt{1+x^2}$. Posons $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = 0.4x + 0.96$. L'erreur (relative à $\sqrt{A^2+B^2}$) entre $\sqrt{A^2+B^2}$ et $0.4A + 0.96B$ est égale à l'erreur (relative à $\sqrt{1+x^2}$) entre $\sqrt{1+x^2}$ et $0.4x + 0.96$.

2.2 Déterminer l'erreur relative

L'erreur relative cherchée est $\dfrac{|f(x) - g(x)|}{f(x)}$, c'est-à-dire $|\epsilon(x)|$ avec $\epsilon(x) := \dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 1 - \dfrac{0.4x + 0.96}{\sqrt{1+x^2}}$ pour $x \in [0,1]$.

On calcule la dérivée $\epsilon'(x) = \dfrac{0.96x - 0.4}{(1+x^2)^{3/2}}\cdot$ On voit que $\epsilon'(x)$ est négative de 0 à $5/12$ et positive au-delà. Le maximum de $\epsilon(x)$, en valeur absolue, est donc atteint en 0, en $5/12$ ou en 1. Or on a $\epsilon(0) = 0.04$, $\epsilon(5/12) = -0.04$ et $\epsilon(1) \sim 0.0383$. On voit que l'erreur relative est bien $\leq 0.04 = 4\%$.

3 Généralisation

On peut se demander comment trouver une bonne approximation affine de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ sur $[0,1]$, comme celle proposée ci-dessus. Si l'on prend $g(x) = ax + b$ avec $a, b > 0$, l'erreur relative est $\epsilon(x) = 1 - \dfrac{ax+b}{\sqrt{1+x^2}}$. On va chercher à minimiser $|\epsilon(x)|$ en essayant de faire au moins aussi bien que l'énoncé. En particulier on imposera à l'erreur relative d'être ≤ 1.

3.1 Théorème. *Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et soit ϵ vérifiant $0 < \epsilon < 1$. On pose $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $g(x) = ax+b$ et on suppose que l'on a, pour tout $x \in [0,1]$,*

$\left|1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| \leq \epsilon$. *Alors on a* $\epsilon \geq \epsilon_0 := \dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}+1} \sim 0.039566129897$. *Pour chaque valeur* $\epsilon > \epsilon_0$ *il existe une infinité de valeurs de* a, b *qui donnent une approximation affine de* f *avec une erreur relative* $\leq \epsilon$.

Démonstration. On pose $\epsilon(x) = 1 - \dfrac{ax+b}{\sqrt{1+x^2}}$ et on étudie cette fonction (et sa valeur absolue) sur $[0,1]$. On a $\epsilon'(x) = \dfrac{bx-a}{(1+x^2)^{3/2}}$. La fonction est monotone pour $x \leq a/b$ et $x \geq a/b$. Le maximum de la valeur absolue de ϵ est donc atteint soit en 0, soit en 1, soit en a/b si $a/b \in [0,1]$.

On a $\epsilon(0) = 1-b$, $\epsilon(1) = 1 - \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\epsilon(a/b) = 1 - \sqrt{a^2+b^2}$.

Les conditions pour que $|\epsilon(x)|$ soit $\leq \epsilon$ sur $[0,1]$ sont donc les suivantes : $1-\epsilon \leq b \leq 1+\epsilon$, $(1-\epsilon)\sqrt{2} \leq a+b \leq (1+\epsilon)\sqrt{2}$ et $(1-\epsilon)^2 \leq a^2+b^2 \leq (1+\epsilon)^2$. Géométriquement il s'agit de l'intersection du parallélogramme $ABCD$ et de la portion de couronne $MNPQ$, si cette intersection est non vide, voir figure 1. Pour cela, il faut et il suffit que $A = ((\sqrt{2}-1)(1-\epsilon), 1-\epsilon)$ soit à l'intérieur de la couronne, ce qui se traduit par l' inégalité $((\sqrt{2}-1)^2+1)(1-\epsilon)^2 \leq (1+\epsilon)^2$ soit encore $\sqrt{4-2\sqrt{2}} \leq \dfrac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$ ou enfin $\epsilon \geq \dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}+1} \sim 0.039566129897$.

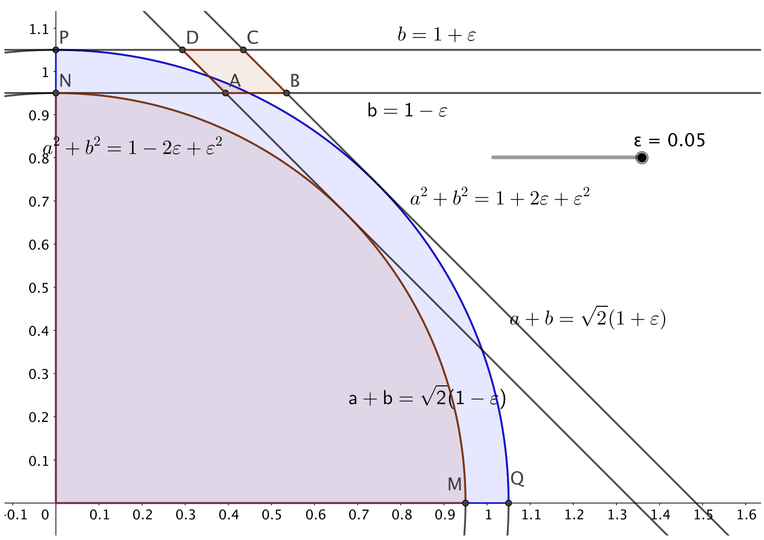

FIGURE 1 –

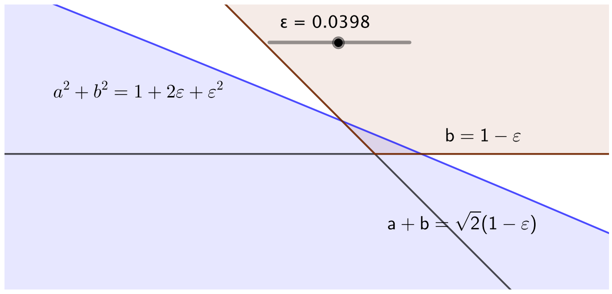

FIGURE 2 –

Pour chaque valeur de $\epsilon \geq \epsilon_0$ il y a des valeurs de a et b qui donnent une approximation convenable, celles situées dans le triangle (curviligne) intersection des deux zones de la figure 2. On peut prendre par exemple les coordonnées de A : $a = (\sqrt{2} - 1)(1 - \epsilon)$, $b = 1 - \epsilon$, ou encore celles du point d'intersection de $b = 1 - \epsilon$ avec le cercle $a^2 + b^2 = (1 + \epsilon)^2$, c'est-à-dire $a = 2\sqrt{\epsilon}$ et $b = 1 - \epsilon$. Dans le cas $\epsilon = 0.04$ de l'énoncé ce sont ces dernières valeurs ($a = 0.04$ et $b = 0.96$) qui sont proposées.

3.2 *Remarque.* On voit que l'énoncé, avec la valeur $\epsilon = 0.04$, est quasiment optimal et qu'il l'est si l'on se limite à des valeurs faciles à calculer [1] . Il donne une excellente approximation. Ainsi pour $x = 0.8$ on a $0.4 \times 0.8 + 0.96 = 1.28$ alors que la valeur de $f(x)$ est $\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1.64} = 1.280624$.

1. Si l'on tient absolument à faire mieux que l'énoncé, on peut prendre $a = 0.39784$, $b = 0.9604308336$ et on aura une erreur relative ≤ 0.039566129897.