Les fractions de Richard Latan

Daniel PERRIN

1 La question

Seul Richard Latan, le sorcier de Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), est capable de fabriquer une fraction magique dont les premiers chiffres du développement décimal sont les chiffres du dénominateur comme par exemple : $\dfrac{57851}{240522} = 0.240522\ldots$ *Et le lecteur ?*

2 Solution

2.1 Le résultat général

2.1 Notations. 1) On note $[x]$ la partie entière d'un réel x, c'est-à-dire l'unique $n \in \mathbf{Z}$ vérifiant $n \leq x < n+1$ et $\lceil x \rceil$ le plus petit entier p supérieur ou égal à x, c'est-à-dire vérifiant $p-1 < x \leq p$.

2) On note[1] $0.a_1 \ldots a_n \ldots$ le développement décimal illimité d'un réel compris entre 0 et 1, avec des a_i compris entre 0 et 9 (et non tous égaux à 9 à partir d'un certain rang).

2.2 Théorème. *Soient n, k, q trois entiers positifs. On suppose que k et q sont premiers entre eux et que l'écriture en base 10 de q est $q = a_1 \ldots a_n$ où les a_i sont des chiffres (donc des entiers compris entre 0 et 9), avec $a_1 \neq 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Le développement décimal illimité de la fraction (irréductible) k/q est $k/q = 0.a_1 \ldots a_n \ldots$.

2) On a $10^{n-2} \leq k < 10^n$ et $q^2 \leq 10^n k < q^2 + q$.

Sous ces conditions on a $q = [\sqrt{10^n k}]$ et on dit que la fraction k/q est **latanienne**.

Démonstration. Supposons la condition 1) vérifiée. Comme a_1 est non nul, on a $0.1 \leq \dfrac{k}{q} < 1$, donc $q \leq 10k < 10q$. En particulier on a $k < q < 10^n$. Comme la partie entière de $10^n \dfrac{k}{q}$ est $q = a_1 \ldots a_n$, on a aussi $q \leq \dfrac{10^n k}{q} < q+1$, soit encore $q^2 \leq 10^n k < q^2 + q$. En reprenant la condition de taille on trouve, avec $q \leq 10k$ et $10^n k < q^2 + q$, qu'on a $10^{n-2} < k + \frac{1}{10}$, donc $10^{n-2} \leq k$. On a prouvé ainsi que 1) implique 2).

1. Je note les décimaux avec un point comme les anglo-saxons pour une raison de typographie, la notation avec une virgule étant un peu plus compliquée à rendre de manière satisfaisante en LateX. Cela ne m'empêchera pas de parler des chiffres après la virgule ...

Inversement, si l'on a 2), on a $10^{-n}q \leq \frac{k}{q} < 10^{-n}q + 10^{-n}$, donc $0.a_1 \dots a_n \leq \frac{k}{q} < 0.a_1 \dots a_n + 10^{-n}$ ce qui signifie exactement que le développement décimal de k/q commence par $0.a_1 \dots a_n$.

Dire que q est la partie entière de $\sqrt{10^n k}$ est équivalent à la double inégalité : $q \leq \sqrt{10^n k} < q + 1$ ou encore à $q^2 \leq 10^n k < q^2 + 2q + 1$ qui est évidemment vérifiée si l'on a 2).

2.3 Corollaire. *On se place sous les hypothèses de 2.2 et on suppose de plus qu'on a* $(n, k, q) \neq (1, 3, 5)$. *Alors les conditions sont encore équivalentes à la suivante :*

3) On a $10^{n-2} \leq k < 10^n$ *et* $q \leq \sqrt{10^n k} < q + \frac{1}{2}$.

Démonstration. La condition 2) donne $q \leq \sqrt{10^n k} < \sqrt{q^2 + q}$ et on conclut grâce à l'inégalité $\sqrt{q^2 + q} < q + \frac{1}{2}$ (qui s'obtient en élevant au carré). Inversement, si l'on a $\sqrt{10^n k} < q + \frac{1}{2}$, on a $10^n k < q^2 + q + \frac{1}{4}$ donc $10^n k \leq q^2 + q$ et on a 2), sauf dans le cas $10^n k = q^2 + q$. Il reste à montrer le lemme suivant :

2.4 Lemme. *Soient* n, k, q *des entiers positifs avec* $k < q$, k, q *premiers entre eux et* $10^n k = q^2 + q$. *Alors on a* $n = 1$, $k = 3$ *et* $q = 5$.

Démonstration. (du lemme) Comme q et k sont premiers entre eux, q divise 10^n et on a donc $q = 2^\alpha 5^\beta$ avec $0 \leq \alpha \leq n$ et $0 \leq \beta \leq n$. De plus, comme k est premier avec q, k divise $q + 1 = 2^\alpha 5^\beta + 1$ et on a $2^\alpha 5^\beta + 1 = kr$ et avec $10^n k = q(q+1) = 2^\alpha 5^\beta kr$ on obtient $r = 2^{n-\alpha} 5^{n-\beta}$. L'égalité $2^\alpha 5^\beta + 1 = 2^{n-\alpha} 5^{n-\beta} k$ implique que $2^\alpha 5^\beta$ et $2^{n-\alpha} 5^{n-\beta}$ sont premiers entre eux, ce qui n'est possible que si α et β valent 0 ou n. Pour des raisons de taille on voit que la seule possibilité est $\alpha = 0$, $\beta = n$ et on a l'équation $5^n + 1 = 2^n k$. Si n est ≥ 2, cette relation est impossible comme on le voit en réduisant modulo 4. Il reste le cas $n = 1$ qui donne $k = 3$ et $q = 5$.

2.5 *Remarques.* 1) Dans le cas $n = 1$, $k = 3$, $q = 5$, on a $\frac{3}{5} = 0.6$ et la condition du théorème n'est pas réalisée.

2) Le théorème montre que q est déterminé par k grâce à la formule $q = [\sqrt{10^n k}]$. Attention il y a deux expressions différentes pour $\sqrt{10^n k}$ selon la parité de n. Si n est pair, $n = 2m$, on a $\sqrt{10^n k} = 10^m \sqrt{k}$. Si n est impair, $n = 2m + 1$, on a $\sqrt{10^n k} = 10^m \sqrt{10k}$.

3) Il est prudent de se débarrasser une fois pour toutes du cas $n = 1$. Les solutions avec k et q premiers entre eux sont $k = 1$, $q = 3$, $1/3 = 0.33...$, $k = 5$, $q = 7$, $5/7 = 0.714285...$ et $k = 7$, $q = 8$, $7/8 = 0.875$. Si l'on autorise k et q à avoir des facteurs communs on a en plus $k = 4$, $q = 6$, $4/6 = 2/3 = 0.66....$

On peut maintenant énoncer une règle qui permet de construire des fractions lataniennes à partir de k :

2.6 Règle. *Soit $n = 2m$ (resp. $n = 2m+1$) un entier ≥ 2. Un entier k de n ou $n-1$ chiffres donne une fraction latanienne $\dfrac{k}{q}$ en prenant $q = [\sqrt{10^n k}]$ si et seulement si le $m+1$-ième chiffre après la virgule de $\sqrt{k}$ (resp. de $\sqrt{10k}$) est < 5 et si k est premier avec q.*

2.7 *Remarque.* La condition qui stipule que k et q sont premiers entre eux n'est pas essentielle et on peut traiter la question en l'omettant. Cependant on rencontre alors des cas triviaux. Par exemple avec $n = 2m$, si k est le carré d'un nombre de m chiffres, $k = a^2$, avec $a = a_1 \dots a_m$ on a $q = 10^m a = a_1 \dots a_m 0 \dots 0$ (avec m chiffres 0) et $\dfrac{k}{q} = \dfrac{a}{10^m} = 0.a_1 \dots a_m 0 \dots 0$. Si $n = 2m+1$ et si $k = 10a^2$, où a est un nombre de m chiffres, on a $q = 10^{m+1}a$ et $\dfrac{k}{q} = \dfrac{a}{10^m}$ comme ci-dessus.

2.2 Construction à partir de k : quelques exemples

Il est très facile d'écrire un programme avec le logiciel SAGE (qui utilise le langage python) pour trouver des solutions dont le numérateur est k. Prenons par exemple $n = 2$. Vu 2.3, il s'agit de trouver k entre 1 et 99 tel que le deuxième chiffre après la virgule de $\sqrt{k}$ soit < 5. Une heuristique naturelle consiste à penser que, si ces décimales sont équiréparties[2], il y a autant d'entiers où la décimale en question est < 5 (donc $0, 1, 2, 3, 4$) que ≥ 5 (donc $5, 6, 7, 8, 9$). De fait, le programme montre qu'il y a 56 entiers sur 99 qui vérifient la condition. On note cependant qu'il y a des différences sensibles dans la répartition puisqu'aucun entier entre 20 et 30 (à l'exception triviale de 25) ne la vérifie. De plus, si l'on impose à k et q d'être premiers entre eux il ne reste que 29 solutions.

La même expérience avec $n = 3$ donne 484 solutions pour k entre 10 et 999 dont 299 avec $k \wedge q = 1$. Avec $n = 4$ on a 4910 solutions pour k entre 100 et 9999 dont 2062 avec $k \wedge q = 1$.

Pour des exemples avec plus de chiffres, il est plus commode de partir de q, voir 2.14.

2. Il y a une conjecture de Borel qui stipule que les décimales d'un nombre irrationnel algébrique (ce qui est le cas de $\sqrt{k}$ si k n'est pas un carré parfait) sont équiréparties, mais ce n'est qu'une conjecture et ce genre de choses est terriblement difficile à prouver.

2.3 Une famille de solutions

La question est de donner des exemples de toutes les tailles possibles. Voici un résultat en ce sens :

2.8 Proposition. *Soit* n *un entier* ≥ 2, b *un entier tel que* $2 \leq b \leq 10^{\frac{n}{2}}$ *et que* $b-1$ *et* $10^n - 1$ *soient premiers entre eux. On pose* $a = 2b - 1$. *Alors,* $k = 10^n - a$ *et* $q = 10^n - b$ *vérifient les conditions de 2.2, de sorte que* $\frac{k}{q}$ *est une fraction latanienne.*

Démonstration. On vérifie facilement que la condition sur la taille de k est satisfaite. Le fait que $b-1$ et $10^n - 1$ soient premiers entre eux montre que k et q le sont aussi (si p divise k et q il divise $a-b = b-1$ et $q+b-1 = 10^n - 1$). Enfin, l'inégalité $q^2 \leq 10^n k < q^2 + q$ s'écrit :

$$2b10^n - b^2 \geq a10^n > (2b-1)10^n + b - b^2$$

et elle est conséquence, à gauche, de $b \leq 10^{\frac{n}{2}}$ et, à droite, de $b < b^2$.

2.9 *Remarques.* 1) Parmi les entiers b qui vérifient les conditions de 2.8 il y a au moins l'entier 2 qui donne le développement :

$$\frac{999\ldots997}{999\ldots998} = 0.999\ldots998\ldots$$

2) On obtient d'autres exemples en choisissant b tel que $2 \leq b \leq 10^{\frac{n}{2}}$ et que $q = 10^n - b$ soit premier. Encore faut-il qu'il en existe. La conjecture de Cramer affirme que l'écart entre deux nombres premiers consécutifs p_{n+1} et p_n est de l'ordre de $(\ln p_n)^2$ donc au voisinage de 10^{2m} de l'ordre de $21m^2$ qui, pour m grand, est bien plus petit que la largeur (10^m) de l'intervalle considéré, mais ce n'est qu'une conjecture et elle n'affirme pas avec certitude la présence d'un nombre premier dans un intervalle donné.

2.10 *Remarque.* Si l'on oublie la condition d'irréductibilité de la fraction, on voit que, pour tout q compris entre $10^n - 10^{\frac{n}{2}}$ et $10^n - 2$, il existe un k (unique) convenable. En fait, on peut diminuer q en trouvant encore des k convenables. Par exemple, pour $n = 2$, en posant $q = 100 - b$ et $k = 100 - a$, la condition sur b est qu'il existe un entier a vérifiant $2b - \frac{b^2}{100} - 1 + \frac{b}{100} < a \leq 2b - \frac{b^2}{100}$. Une tabulation montre que c'est le cas pour tous les b vérifiant $2 \leq b \leq 31$ (au lieu de $b \leq 10$ dans 2.8).

Précisément, dans le cas $n = 2m$, on voit que $a = 2b - 2$ convient pour $10^m < b < 10^m(\sqrt{2} - 1)$, etc.

2.4 L'approche par le dénominateur

Dans ce paragraphe on part d'une valeur arbitraire du dénominateur q en essayant de trouver un k convenable pour fabriquer une fraction latanienne en augmentant q au besoin. On se contente de traiter le cas n pair, mais le cas impair est analogue.

2.11 Définition. *Un entier q de n chiffres est dit* **latanien** *s'il existe k vérifiant $q^2 \leq 10^n k < q^2 + q$.*

2.12 Proposition. *Soit $n = 2m$ un entier pair et soit q_0 un entier vérifiant $10^n/2 \leq q_0 < 10^n - 10^m$, non latanien. Alors, il existe q avec $q_0 < q \leq q_0 + 10^m$ tel que q soit latanien.*

Démonstration. Soit k_0 le plus petit entier tel que $q_0^2 \leq 10^n k_0$, autrement dit, $k_0 = \lceil \frac{q_0^2}{10^n} \rceil$. On a donc $10^n k_0 < q_0^2 + 10^n$ et on vérifie qu'on a $q_0 = [\sqrt{10^n k_0}]$. Comme q_0 n'est pas latanien, on a $q_0^2 + q_0 \leq 10^n k_0$. On raisonne par l'absurde en supposant que, pour tout entier $a \in [1, 10^m]$, $q := q_0 + a$ ne soit pas latanien. On montre alors, par récurrence sur a, qu'on a, pour tout a, $k := \lceil \frac{q^2}{10^n} \rceil = k_0 + a$. Comme q n'est pas latanien, on a $q^2 + q \leq 10^n k < q^2 + q + 10^n$ ce qui équivaut à $a^2 + a(2q_0 - 10^n + 1) - 10^n < 0$. Mais, pour $a = 10^m$ on a $a^2 = 10^n$ et une contradiction car $2q_0 - 10^n + 1$ est positif.

2.13 *Remarque.* Ce résultat permet de trouver une valeur convenable à partir d'une valeur qui ne l'est pas en bornant le nombre d'essais à effectuer. L'expérience montre d'ailleurs que la borne donnée ici (10^m) est souvent beaucoup trop pessimiste. Attention cependant, au voisinage du point de départ ($q_0 = 10^n/2$), tous les $q_0 + a$ sont à rejeter pour $a < \frac{10^m}{\sqrt{2}}\cdot$ Par exemple, pour $n = 4$, aucun q n'est convenable entre 5001 et 5070.

2.14 *Exemple.* Avec cette méthode on peut fabriquer des fractions lataniennes avec n grand. Voici un programme sur SAGE :

```
def APM511c(n,Q,d) :
   for q in [Q..Q+d]:
      k=ceil(q^2/10^n);
      if 10^n*k < q^2+q and gcd(k,q)==1 :
         print(k,q)
```

Avec $n = 20$, $Q = 50078651245673589765$ (choisi aléatoirement) il suffit de prendre $d = 10$ pour avoir une solution :

$$\frac{25078713105858049841}{50078651245673589767} = 0.50078651245673589767\,53833.$$

2.5 Une conjecture

Étant de nature un peu téméraire, je propose la conjecture suivante :

2.15 Conjecture. *La limite quand n tend vers l'infini de la proportion $P(n)$ d'entiers k compris entre 10^{n-2} et 10^n qui vérifient les conditions de 2.2 est égale à* $\dfrac{3}{\pi^2} \sim 0.3039635\cdot$

La justification de cette conjecture est le raisonnement probabiliste très aventureux suivant. Il est naturel de penser que les décimales des racines des entiers sont équiréparties, de sorte que la probabilité que $\sqrt{k}$ ait sa m-ième décimale[3] < 5 est de $1/2$. Par ailleurs, on sait que la probabilité que deux entiers soient premiers entre eux est $6/\pi^2$ (théorème de Cesàro). Il n'y a aucune raison de penser que ces deux conditions ne sont pas indépendantes, de sorte que la probabilité cherchée est le produit $3/\pi^2$.

En tous cas, voici les valeurs données par SAGE pour les petits n : $P(2) = 0.2959$, $P(3) = 0.3023$, $P(4) = 0.2992$, $P(5) = 0.3030$, $P(6) = 0.3036$. On constate que ces valeurs ne sont pas si éloignées de celle annoncée par la conjecture !

3. Disons dans le cas $n = 2m$, mais l'autre cas est analogue.