Un problème de Brahmagupta

Daniel PERRIN

1 La question

Déterminer tous les triangles dont les trois côtés sont mesurés par trois entiers consécutifs et dont l'aire est mesurée[1] *par un entier.*

2 La réponse

2.1 Un théorème

2.1 Théorème. *Il y a une infinité de triangles dont les côtés sont trois entiers consécutifs $n-1, n, n+1$ et dont l'aire est un entier. Les entiers $n = 2k_p$ sont définis par la formule : $k_p + s_p\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^p$ pour $p \in \mathbf{N}^*$, ou encore par les relations de récurrence : $k_1 = 2$, $s_1 = 1$ et $k_{p+1} = 2k_p + 3s_p$, $s_{p+1} = k_p + 2s_p$.*

2.2 Démonstration

Soit ABC un triangle, $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs de ses côtés. L'hypothèse indique qu'on peut écrire les trois côtés sous la forme $a = n-1$, $b = n$, $c = n+1$ où n est un entier ≥ 2. Rappelons la formule de Héron qui donne l'aire $\mathscr{A}$ de ABC :

$$16\mathscr{A}^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Dans le cas présent on obtient $16\mathscr{A}^2 = 3n^2(n^2-4)$. On voit que n est pair, $n = 2k$, d'où $\mathscr{A}^2 = 3k^2(k^2-1)$ et il reste à trouver k tel que $3k^2(k^2-1)$ soit le carré d'un entier, ou encore tel que $3(k^2-1)$ soit un carré. On a donc à résoudre $3k^2 - 3 = r^2$ ce qui impose que r est multiple de 3, $r = 3s$ et il reste l'équation $k^2 - 1 = 3s^2$ ou $k^2 - 3s^2 = 1$. On reconnaît une équation de Fermat[2]. Cette équation traduit la recherche des unités (i.e. des inversibles) de $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$. Ses solutions s'obtiennent à partir de l'unité fondamentale $2+\sqrt{3}$. Il est bien connu (voir aussi ci-dessous) que ce sont les entiers k_p et s_p tels que $k_p + s_p\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^p$ pour $p \in \mathbf{N}^*$. On obtient successivement $2, 1$; $7, 4$; $26, 15$; $97, 56$, etc.

1. Sous-entendu avec comme unité d'aire le carré de côté l'unité de longueur.
2. Ou d'Archimède, de Diophante, de Bhaskara, mais certainement pas de Pell-Fermat comme on dit souvent de manière abusive.

On en déduit les solutions du problème posé en prenant $n = 2k_p$, l'aire étant alors égale à $3k_p s_p$. Le plus petit exemple, donné par $k = 2$ et $s = 1$ est le triangle pythagoricien $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $\mathscr{A} = 6$.

2.3 Une preuve élémentaire du théorème des unités dans le cas de $\sqrt{3}$

2.2 Théorème. *Les entiers positifs ou nuls a, b vérifiant $a^2 - 3b^2 = 1$ sont les entiers donnés par la formule $a + b\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^p$ avec $p \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. On travaille dans l'anneau $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$. Sur cet anneau, la norme est définie par la formule $N(a + b\sqrt{3}) = (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$ et elle est multiplicative : $N(zt) = N(z)N(t)$. L'élément $2+\sqrt{3}$ est de norme 1, donc aussi ses puissances (ce qui montre que les entiers donnés par la formule du théorème vérifient l'équation de Fermat). Il est inversible dans $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ et d'inverse $2 - \sqrt{3}$.

On raisonne par récurrence sur a. Si l'on a $a^2 - 3b^2 = 1$, a est strictement positif et, pour $a = 1$ on a $b = 0$, de sorte que $a+b\sqrt{3}$ est de la forme annoncée avec $p = 0$. Supposons la propriété établie pour $a \leq N$ et montrons la pour $a = N+1$. On calcule $(a+b\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2a-3b+(2b-a)\sqrt{3} := x+y\sqrt{3}$ et on a la formule $a + b\sqrt{3} = (x + y\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$. On a $a^2 - 3b^2 = 1$ avec $a > 1$, donc aussi $b > 1$. En utilisant la formule $a^2 = 1 + 3b^2$ on en déduit qu'on a $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x < a$. Comme la norme est multiplicative on a $x^2 - 3y^2 = 1$. L'hypothèse de récurrence assure qu'il existe p tel que $x + y\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^p$ et donc $a + b\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{p+1}$.