Les rectangles amis

Daniel PERRIN

1 Le problème

Deux rectangles, à côtés entiers, l'un de largeur a et de longueur b, l'autre de largeur c et de longueur d, sont dits **amis** *si le périmètre de l'un est égal à l'aire de l'autre et* vice-versa*. On demande de déterminer tous les rectangles amis.*

2 La solution

Comme les largeurs sont a et c on a $a \leq b$ et $c \leq d$. On suppose de plus que les rectangles sont amis mais non confondus et on peut supposer par exemple [1] $c < a$. On a les relations $2a + 2b = cd$ et $2c + 2d = ab$. Le résultat suivant donne donc toutes les solutions du problème :

2.1 Théorème. *Les quadruplets (a, b, c, d) d'entiers positifs vérifiant $a \leq b$, $c \leq d$, $c < a$, $2a + 2b = cd$ et $2c + 2d = ab$ (conditions $(*)$) sont les suivants : $(3, 10, 2, 13)$; $(4, 6, 2, 10)$; $(5, 22, 1, 54)$; $(6, 13, 1, 38)$ et $(7, 10, 1, 34)$.*

Démonstration. On commence par un lemme :

2.2 Lemme. *Si un quadruplet d'entiers positifs vérifie les conditions $(*)$ on a $c = 1$ ou $c = 2$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant $c \geq 3$, donc $a \geq 4$. On a $2d = ab - 2c$, donc $4a + 4b = c \times 2d = abc - 2c^2$. On en déduit $b(ac-4) = 4a+2c^2$. On a $b \geq a$ donc $4a+2c^2 \geq a(ac-4)$ (car $ac-4$ est positif), soit $ca^2 - 8a - 2c^2 \leq 0$. Ce trinôme en a a une racine négative et une positive et il faut que a soit plus petit que la racine positive : $a \leq \dfrac{4 + \sqrt{2c^3 + 16}}{c} := \tau$.

Supposons d'abord $c \geq 4$. Alors on a $\tau \leq c$. En effet, cette inégalité équivaut à $c^4 - 2c^3 - 8c^2 \geq 0$ soit $c^2 - 2c - 8 \geq 0$ qui est réalisé pour $c \geq 4$. On a une contradiction puisque a doit être à la fois $\leq \tau$ et $> c$.

Il reste le cas $c = 3$. Dans ce cas la racine positive du trinôme $ca^2-8a-2c^2$ est ~ 4.12, de sorte qu'il reste seulement à écarter le cas $a = 4$. Mais, avec $4a + 4b = abc - 2c^2$, on a alors $8b = 34$ et b n'est pas entier.

Vu ce lemme il reste à traiter les cas $c = 1$ et $c = 2$.

1. On vérifie aussitôt qu'avec $(*)$, $a = c$ implique $b = d$.

2.1 Le cas $c = 1$

La relation $b(ac-4) = 4a + 2c^2$ vue ci-dessus donne $b(a-4) = 4a+2$. Comme $4a+2$ est positif, $a-4$ aussi et $a-4$ divise $4a+2$. On écrit $4a+2 = 4(a-4)+18$, de sorte que $a-4$ divise 18 donc $a-4 = 1, 2, 3, 6, 9$ ou 18 et $a = 5, 6, 7, 10, 13$ ou 22, les b correspondants étant $22, 13, 10, 7, 6, 5$. Comme on a supposé $a \leq b$ on ne garde que les trois premières solutions.

2.2 Le cas $c = 2$

Cette fois la relation donne $b(a-2) = 2a+4$. On écrit $2a+4 = 2(a-2)+8$ et $a-2$ divise 8 donc $a-2 = 1, 2, 4, 8$ et $a = 3, 4, 6, 10$. On trouve $b = 10, 6, 4, 3$ et seuls les deux premiers sont compatibles avec $a \leq b$.

On vérifie qu'on a trouvé ainsi les cinq solutions annoncées.