Vérifier une formule

Daniel PERRIN

1 Le problème

Soient a un réel ≥ 1. Montrer qu'on a la formule :

$$\sqrt[3]{a+\left(\frac{a+8}{3}\right)\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\left(\frac{a+8}{3}\right)\sqrt{\frac{a-1}{3}}}=2.$$

2 La solution

Appelons respectivement u et $\overline{u}$ les quantités sous les racines cubiques. Comme on a supposé $a \geq 1$, ce sont des réels. Il s'agit de montrer que $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{\overline{u}}$ est égal à 2. Comme on a $u + \overline{u} = 2a > 0$, et que la fonction racine cubique est croissante, il en résulte que x est positif.

On calcule $x^3 = u + \overline{u} + 3\sqrt[3]{u\overline{u}}\,x$. On a aussitôt $u + \overline{u} = 2a$ et $u\overline{u} = \frac{1}{27}(-a^3 + 12a^2 - 48a + 64) = \frac{1}{27}(4-a)^3$, de sorte que $3\sqrt[3]{u\overline{u}}$ est égal à $4-a$. On voit que x vérifie l'équation $x^3 - (4-a)x - 2a = 0$. Comme on a $x^3 - (4-a)x - 2a = (x-2)(x^2+2x+a)$, on voit que cette équation admet une unique racine réelle, qui est égale à 2. On a donc bien $x = 2$.

3 Comprendre ?

Il est difficile de se satisfaire d'une formule qui semble à la fois compliquée et anecdotique. Je tente ci-dessous de voir s'il est possible de la généraliser.

On part encore de l'élément a. On introduit deux nombres $d = \gamma + \delta a$ et $b = \lambda + \mu a$, on pose $u = a + b\sqrt{d}$, $\overline{u} = a - b\sqrt{d}$ et on veut une formule donnant pour $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{\overline{u}}$ un élément simple du corps de base.

On a vu ci-dessus que la recette c'est que $u\overline{u} = a^2 - db^2$ soit le cube d'un élément $z = \xi + \eta a$, autrement dit que soit vérifiée l'équation $u\overline{u} = a^2 - db^2 = z^3$, c'est -à-dire :

$$a^2 - (\gamma + \delta a)(\lambda + \mu a)^2 = (\xi + \eta a)^3 \text{ ou encore}$$

$$a^2 - (\gamma + \delta a)(\lambda^2 + 2\lambda\mu a + \mu^2 a^2) = \xi^3 + 3\xi^2\eta a + 3\xi\eta^2 a^2 + \eta^3 a^3.$$

Cette équation développée selon les puissances de a devient :

$$-\gamma\lambda^2+a(-2\gamma\lambda\mu-\delta\lambda^2)+a^2(1-\gamma\mu^2-2\delta\lambda\mu)-\delta\mu^2a^3 = \xi^3+3\xi^2\eta a+3\xi\eta^2a^2+\eta^3a^3$$

En identifiant les termes en a^k on trouve :

$$-\gamma\lambda^2 = \xi^3 \ ; \ -2\gamma\lambda\mu - \delta\lambda^2 = 3\xi^2\eta \ ; \ 1-\gamma\mu^2-2\delta\lambda\mu = 3\xi\eta^2 \text{ et } -\delta\mu^2 = \eta^3.$$

On en déduit : $\delta = -\dfrac{\eta^3}{\mu^2}$ et $\gamma = -\dfrac{\xi^3}{\lambda^2}$ et les autres équations deviennent $2\xi^3\mu^3+\eta^3\lambda^3 = 3\xi^2\eta\mu^2\lambda$ et $\lambda^2\mu+\xi^3\mu^3+2\eta^3\lambda^3 = 3\xi\eta^2\lambda^2\mu$. Par différence on a $\mu^3\xi^3-\eta^3\lambda^3-\lambda^2\mu = 3\xi\eta\lambda\mu(\xi\mu-\eta\lambda)$ qui donne $(\xi\mu-\eta\lambda)^3 = \lambda^2\mu$.

Si l'on pose $r = \lambda\eta$ et $s = \mu\xi$ on a donc $(s-r)^3 = \lambda^2\mu$ et $2s^3+r^3 = 3rs^2$. Cette dernière équation implique $r = s$ ou $r = -2s$.

La solution $r = s$ donne λ ou μ nul, ce qui est contradictoire avec les expressions de γ ou δ. L'autre donne $\lambda^2\mu = 27s^3$ puis $\dfrac{\lambda^2}{\mu^2} = (3\xi)^3$. On voit qu'il faut que 3ξ soit un carré. Cela permet de paramétrer les solutions : $\xi = \dfrac{p^2}{3}$, $\lambda = p^3\mu$, $\eta = -\dfrac{2}{3p}$, $\gamma = -\dfrac{1}{27\mu^2}$, $\delta = \dfrac{8}{27p^3\mu^2}$.

Dans ce cas, on a $x = p$, autrement dit la magnifique (sic!) relation [1] :

$$\sqrt[3]{a+\frac{p^3+a}{3}\sqrt{\frac{8a}{3p^3}-\frac{1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{p^3+a}{3}\sqrt{\frac{8a}{3p^3}-\frac{1}{3}}} = p$$

le cas de l'énoncé correspondant à $p = 2$. Avec $a = 2$ et $p = 1$ on obtient :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$$

On obtient d'autres formules en écrivant tous les paramètres, y compris a, sous la forme $\alpha+\beta\sqrt{t}$.

1. Il est prudent de supposer $8a \geq p^3$ sinon on a des valeurs complexes et les racines ne sont pas déterminées de manière unique. Quoique ... peut-être qu'on peut rendre la formule correcte par un choix judicieux des déterminations, mais je n'ai pas assez de place dans cette page pour aborder cette question.