Un sangaku

Daniel PERRIN

1 Le problème

Dans la figure suivante d'un joli sangaku, les trois cercles inscrits ont un même rayon r et on demande de calculer ce rayon en fonction de la hauteur CH.

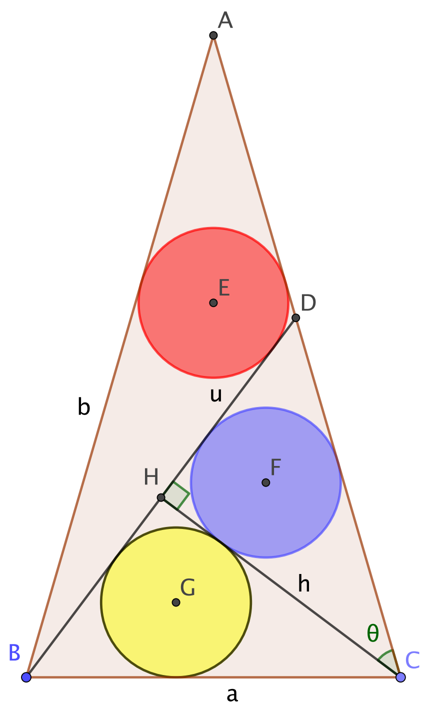

FIGURE 1 –

2 La solution

Le rapport des rayons des cercles à la hauteur CH est égal à $1/4$. Je n'ai pas trouvé de preuve purement géométrique de ce fait, malgré la profusion de sous-figures remarquables (notamment des triangles rectangles $3, 4, 5$ ou encore $1, 2, \sqrt{5}$). Je donne ici plusieurs solutions calculatoires, plus ou moins simples.

2.1 Remarque préliminaire

On a le lemme suivant :

2.1 Lemme. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles rectangles en A et A'. On suppose qu'on a $AB = A'B'$ et que les cercles inscrits dans ces triangles ont même rayon. Alors les triangles sont isométriques.*

Démonstration.

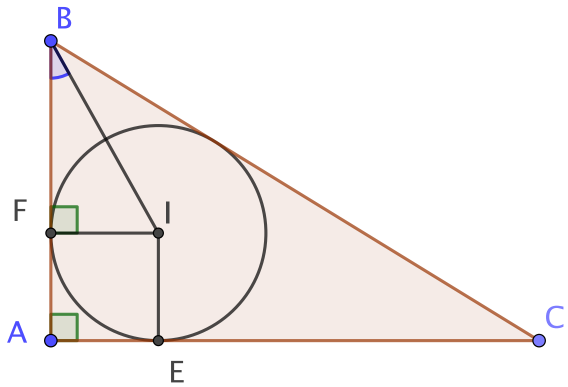

FIGURE 2 –

Appelons I le centre du cercle inscrit dans ABC et E, F ses projetés orthogonaux sur les côtés de l'angle droit et de même dans $A'B'C'$ avec des primes. Posons $c = AB$ et $r = IE$. Le quadrilatère $IEAF$ est un carré et on a donc $BF = c - r$ et on a, de même, $B'F' = c - r$. Il en résulte que les triangles BFI et $B'F'I'$ sont isométriques d'où $\widehat{FBI} = \widehat{F'B'I'}$. Les angles en B, B' des triangles initiaux sont donc égaux et on conclut à l'isométrie de ces triangles par le cas d'égalité ACA.

Dans le sangaku, ce lemme montre déjà que si les cercles bleu et jaune ont même rayon, c'est que BCD est isocèle en C.

2.2 Notations et premiers calculs

On pose $a = BC$, $b = AB = AC$, $h = CH$. La remarque précédente donne $CD = BC = a$ et donc $AD = b - a$. Elle montre aussi qu'on a $BH = HD$ et on pose $BH = u$. Cette longueur est déterminée par les autres car on a $u^2 + h^2 = a^2$ par Pythagore. On note aussi θ l'angle $\widehat{HCD}$ et on a donc $\cos\theta = \frac{h}{a}$. Comme cet angle est la moitié de l'angle à la base du triangle isocèle ABC, on a $\theta < \pi/4$, donc $\frac{h}{a} > \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ Comme on a $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{2} - \theta > \widehat{BAC} = \pi - 4\theta$, on voit que θ est $> \pi/6$ donc $\frac{h}{a} < \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

La donnée du triangle BCD (ou de sa moitié BHD) détermine le point A, de sorte qu'on peut déterminer b en fonction de h et a. En effet, on a $\cos 2\theta = \dfrac{a}{2b}$ et avec $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ on obtient $b = \dfrac{a^3}{4h^2 - 2a^2}\cdot$ En définitive, il reste deux inconnues a et h que l'égalité des rayons des cercles rouge et bleu va permettre de relier.

2.3 Une première solution

La recette est la formule $\mathscr{A} = \frac{1}{2}pr$ où $\mathscr{A}$ est l'aire d'un triangle, p son périmètre et r le rayon du cercle inscrit. Cette formule est évidente en décomposant le triangle en trois triangles qui ont comme sommet commun le centre du cercle inscrit et comme bases les côtés.

On applique d'abord la formule au triangle CHD et on obtient $hu = r(h + u + a)$ où r est le rayon du cercle inscrit dans CHD (ou BHC).

On l'applique ensuite à ADB. L'aire de ADB vaut $\mathscr{A} = \frac{1}{2}DA \times DB \times \sin\widehat{ADB} = \frac{1}{2}DA \times DB \times \sin\widehat{HDC} = \frac{1}{2}DA \times DB \times \cos\theta$ et on obtient $\mathscr{A} = (b - a)u\dfrac{h}{a}\cdot$ Le périmètre de ABD est égal à $p = 2b - a + 2u$. On en déduit le rayon r' du cercle inscrit dans ADB.

L'égalité des rayons r et r' donne l'équation :

$$\frac{hu}{h + u + a} = \frac{2(b - a)hu}{a(2b - a + 2u)} \text{ soit } a(2b - a + 2u) = 2(b - a)(h + u + a).$$

On tire u de cette relation : $u = \dfrac{2bh - 2ah - a^2}{2(2a - b)}\cdot$ On remplace b par sa valeur $b = \dfrac{a^3}{4h^2 - 2a^2}$ et on obtient $u = \dfrac{a^3 + 3a^2h - 2ah^2 - 4h^3}{8h^2 - 5a^2}\cdot$ Il ne reste plus qu'à utiliser la relation $u^2 = a^2 - h^2$ en élevant au carré. On trouve la relation suivante :

$$24a^6 - 6a^5h - 110a^4h^2 + 20a^3h^3 + 164a^2h^4 - 16ah^5 - 80h^6 = 0$$

qui donne une équation de degré 6 en h/a dont les racines sont $-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$ On doit écarter les racines négatives, mais aussi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (voir 2.2 ci-dessus) et il ne reste que $\dfrac{h}{a} = \dfrac{4}{5}\cdot$

Le triangle CHD est alors un triangle rectangle pythagoricien $3, 4, 5$, c'est-à-dire qu'on a, dans une unité convenable, $DC = BC = 5$, $CH = 4$ et

$HD = 3$ et on en déduit $b = AC = \dfrac{125}{14}\cdot$ On vérifie que les rayons r et r' sont alors égaux à 1, c'est-à-dire au quart de la hauteur $h = CH$.

2.4 Une première variante trigonométrique

Pour les variantes trigonométriques, voir Figure 3.

On prend $\theta = \widehat{DCH}$ comme inconnue et on évalue les rayons des cercles inscrits dans CDH et dans ABD, toujours avec la formule $\mathscr{A} = \frac{1}{2}pr$.

2.4.1 Dans CDH

On a $CD = a$, $CH = a\cos\theta$, $DH = a\sin\theta$, $\mathscr{A} = \frac{1}{2}a^2\cos\theta\sin\theta$, $p = a + a\cos\theta + a\sin\theta$, d'où $r(CDH) = a\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}\cdot$

2.4.2 Dans ABD

On calcule d'abord $b = AB = AC$ avec $b\cos 2\theta = a/2$ donc $b = \dfrac{a}{2\cos 2\theta}\cdot$ On a ensuite $AD = b - a$, $BD = 2HD = 2a\sin\theta$. L'angle $\widehat{ADB}$ vaut $\frac{\pi}{2}+\theta$, donc son sinus est $\cos\theta$. On en déduit

$$\mathscr{A}(ABD) = \frac{1}{2}\times 2a\sin\theta\times a\Big(\frac{1}{2\cos 2\theta}-1\Big)\times\cos\theta = \frac{a^2\sin\theta\cos\theta(1-2\cos 2\theta)}{2\cos 2\theta}\cdot$$

Par ailleurs on a $p(ABD) = b - a + b + 2a\sin\theta = a\Big(\dfrac{1}{\cos 2\theta} - 1 + 2\sin\theta\Big)$ ou encore $p = \dfrac{2a\sin\theta(\sin\theta+\cos 2\theta)}{\cos 2\theta}$ d'où

$$r(ABD) = \frac{a\cos\theta(1-2\cos 2\theta)}{2(\sin\theta+\cos 2\theta)}\cdot$$

2.4.3 Conclusion

On voit que les rayons sont égaux si θ vérifie :

$$8\sin^3\theta + 4\sin^2\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - \cos\theta - 1 = 0.$$

On se ramène à une équation algébrique en posant $t = \tan\theta/2$ et en utilisant le paramétrage classique. On obtient :

$$3t^5 + 5t^4 - 26t^3 - 10t^2 + 3t + 1 = 0$$

qui admet les solutions $-\sqrt{3}-2$, $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-2$, $1/3$, $1+\sqrt{2}$. Comme θ est compris enre $\pi/6$ et $\pi/4$ les solutions négatives sont à écarter, ainsi que $1+\sqrt{2}$ et il reste $\tan\theta/2 = 1/3$ qui redonne le résultat escompté.

2.5 Une autre variante trigonométrique

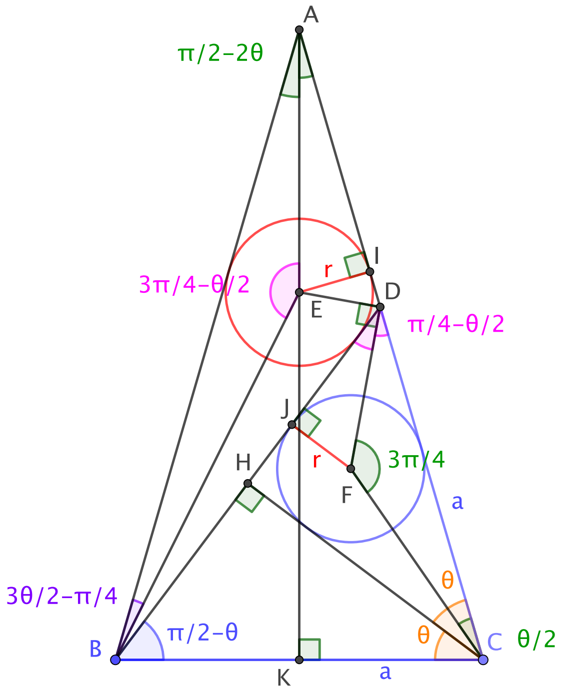

FIGURE 3 –

On conserve $\theta = \widehat{DCH}$ comme inconnue et on évalue le rapport r/a de deux manières, voir Figure 3.

2.5.1 Méthode 1

On a $\widehat{HDC} = \frac{\pi}{2} - \theta$, donc $\widehat{HDF} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$. Dans le triangle rectangle JDF on en déduit $DF = r/\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$. On applique la formule des sinus dans DCF, l'angle $\widehat{DFC}$ vaut $\frac{3\pi}{4}$ et on en déduit $DF/\sin\frac{\theta}{2} = a\sqrt{2}$.

En développant $\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$ on a $\dfrac{2r}{a} = \cos\theta + \sin\theta - 1$.

2.5.2 Méthode 2

Les triangles AIE et AKC étant semblables, on a $\frac{2r}{a} = \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AB}$. On a $AE = \frac{r}{\cos 2\theta}$ d'où $AE/AB = 2r/a$ et on applique la formule des sinus dans

ABE. Les angles sont : $\widehat{ABE} = \frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{AEB} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$. On en déduit

$$\frac{2r}{a} = \frac{\sin(\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} = \frac{\sin\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}.$$

2.5.3 Conclusion

On pose $t = \tan\frac{\theta}{2}$ et on calcule les deux expressions en fonction de t. On obtient l'équation :

$$3t^3 - 7t^2 - t + 1 = 0$$

qui a trois racines $1/3$, $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$. Comme on a $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$ la seule solution possible est $t = 1/3$ qui redonne le résultat.