Partage d'un quadrilatère

Daniel PERRIN

1 Le problème (APM 547-3)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P un point du segment $[AD]$. On demande de construire la droite d passant par P qui découpe le quadrilatère en deux parties de même aire.

J'aime beaucoup ce problème, que j'ai souvent abordé, et qui est susceptible de nombreuses variantes. On verra toutefois qu'il peut présenter des difficultés importantes liées aux questions de position.

2 Une solution

2.1 Généralités

De manière implicite, l'énoncé affirme l'existence et l'unicité d'une droite passant par P et partageant le quadrilatère en deux parties de même aire [1]. Voilà ce qu'on peut dire là-dessus :

2.1 Proposition. *1) Soit $\mathscr{P}$ un polygone quelconque et P un point du plan. Il existe une droite d passant par P qui partage $\mathscr{P}$ en deux parties d'aires égales.*

2) Si $\mathscr{P}$ est convexe et si P est sur le bord de P, la droite d est unique. On l'appelle **droite de partage** *issue de P.*

Démonstration. 1) Soit Γ le cercle de centre P et de rayon 1. Pour un point I quelconque de Γ on appelle I^- le point symétrique de I par rapport à P, J^+ (resp. J^-) l'unique point de Γ tel que le repère $P; I, J^+$ soit orthonormé direct (resp. inverse), $E^+(I)$ (resp. $E^-(I)$) le demi-plan limité par (PI) qui contient J^+ (resp. J^-) et on pose $\mathscr{P}^+(I) = \mathscr{P} \cap E^+(I)$ et $\mathscr{P}^-(I) = \mathscr{P} \cap E^-(I)$. On part d'un point $I_0 \in \Gamma$. Si l'on a $\mathscr{A}(\mathscr{P}^+(I_0)) = \mathscr{A}(\mathscr{P}^-(I_0))$ on a gagné et, sinon, on considère la fonction continue $I \mapsto \varphi(I) = \mathscr{A}(\mathscr{P}^+(I)) - \mathscr{A}(\mathscr{P}^-(I))$. Supposons par exemple qu'on a $\varphi(I_0) > 0$. Alors, quand le point I parcourt le demi-cercle Γ de I_0 à I_0^- en passant par J_0, les points J_0 et J_0^- sont symétriques par rapport à P, de sorte que les demi-plans limités par (PI_0) s'échangent et que φ est négative en I_0^-. Comme le demi-cercle est connexe, la fonction φ s'annule en un point I situé entre les deux et la droite (PI) convient.

1. Comme Euclide, je dirai parfois *égales* en ce sens.

2) Supposons que P est dans le côté $[A_i A_{i+1}]$ du polygone $\mathscr{P}$ et que la droite d partage $\mathscr{P}$ en deux parties égales. Soient E^+ et E^- les demi-plans limités par d, avec $A_i \in E^+$, $\mathscr{P}^+$ et $\mathscr{P}^-$ leurs traces sur $\mathscr{P}$ et F^+ le demi-plan limité par $(A_i A_{i+1})$ qui contient $\mathscr{P}$ (c'est ici qu'on utilise la convexité de $\mathscr{P}$). On note $[Px)$ la demi-droite portée par d située du côté de $\mathscr{P}$ par rapport au côté. On a alors $\mathscr{P}^+ = F^+ \cap E^+ \cap \mathscr{P}$ et $\mathscr{P}^- = F^+ \cap E^- \cap \mathscr{P}$, autrement dit ces parties sont les traces sur $\mathscr{P}$ des deux secteurs $[\widehat{A_i P x}]$ et $[\widehat{A_{i+1} P x}]$. Si d' est une autre droite passant par P, la trace de d' sur F^+ est une demi-droite δ' contenue dans l'un des secteurs, par exemple $[\widehat{A_i P x}]$. Mais alors la trace de $\mathscr{P}$ sur le demi-plan limité par d' qui contient A_i est strictement plus petite que l'autre.

2.2 *Remarques.* 1) L'unicité n'est plus assurée si le point P n'est pas sur le bord de $\mathscr{P}$ (par exemple si $\mathscr{P}$ est régulier et si P est son centre, tous les axes de symétrie de $\mathscr{P}$ conviennent, ou encore si $\mathscr{P}$ est un parallélogramme et si P est son centre, toutes les droites passant par P conviennent).

2) Elle n'est pas assurée non plus sans l'hypothèse de convexité comme le montre l'exemple ci-dessous.

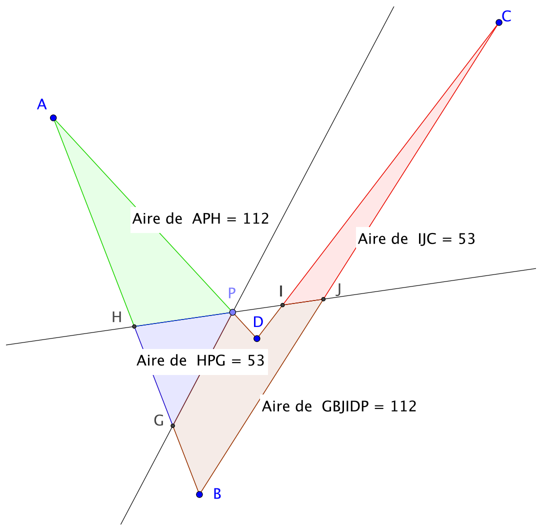

FIGURE 1 –

2.2 Les résultats utilisés

Ce sont les “lemmes du collège” de [4] ch. 7 :

2.3 Lemme. (de la médiane) *La médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.*

2.4 Lemme. (du trapèze ou de la parallèle) *Deux triangles de même base et dont les sommets sont situés sur une parallèle à la base ont même aire.*

Ce lemme admet un corollaire :

2.5 Corollaire. (Lemme du papillon) *Soit $ABCD$ un trapèze dont les côtés (AB) et (CD) sont parallèles et soit I le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. On a $\mathscr{A}(BCI) = \mathscr{A}(ADI)$.*

Si l'on ne se limite pas à des partages équitables on aura besoin aussi de :

2.6 Lemme. (des proportions) *Le rapport des aires de deux triangles ABC et $AB'C'$ qui ont un même sommet A et des bases $[BC]$ et $[B'C']$ alignées est égal au rapport des (longueurs des) bases.*

2.3 Une solution du problème posé

On considère le quadrilatère convexe $\mathscr{Q} := ABCD$ et le point $P \in [AD]$. On construit tout d'abord les points $E, F \in (AD)$ tels que $\mathscr{A}(ABCD) = \mathscr{A}(ABE) = \mathscr{A}(CDF)$. En vertu du lemme du trapèze, E (resp. F) est le point d'intersection de (AD) et de la parallèle à (BD) (resp. (AC)) passant par C (resp. B).

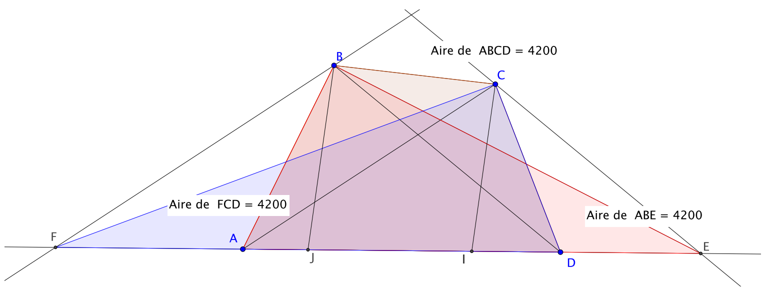

FIGURE 2 –

On considère ensuite les milieux I, J de $[AE]$ et $[DF]$. Le lemme de la médiane montre qu'on a $\mathscr{A}(ABI) = \mathscr{A}(CDJ) = \frac{1}{2}\mathscr{A}(\mathscr{Q})$. On a alors le résultat suivant qui donne la droite de partage en distinguant selon la position de P par rapport à I, J (trois cas au plus) :

2.7 Théorème. *1) Si P est entre A et J, la parallèle à (PC) passant par J coupe (BC) en $S \in [BC]$. La droite de partage est (PS).*

2) Si P est entre I et J, la parallèle à (PB) passant par I coupe (BC) en $R \in [BC]$. La droite de partage est (PR).

3) Si P est entre I et D, la parallèle à (PB) passant par I coupe (AB) en $Q \in [AB]$. La droite de partage est (PQ).

Démonstration. Les cas 1) et 3) sont analogues. Traitons par exemple le cas 1). On considère la parallèle à (PC) passant par J. Comme J est entre P et D, elle coupe le segment $[CD]$ en un point S. Le lemme du trapèze montre qu'on a $\mathscr{A}(PSJ) = \mathscr{A}(CSJ)$, donc, en ajoutant $\mathscr{A}(DSJ)$, on a $= \mathscr{A}(DPS) = \mathscr{A}(DCJ) = \frac{1}{2}\mathscr{A}(\mathscr{Q})$, de sorte que (PS) partage le quadrilatère en deux parties de même aire.

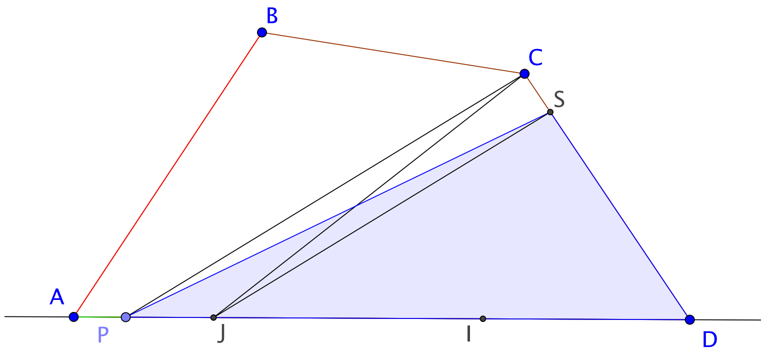

FIGURE 3 –

Dans le cas 2), ce qui est délicat c'est l'assertion de position : le point R est dans le segment $[BC]$.

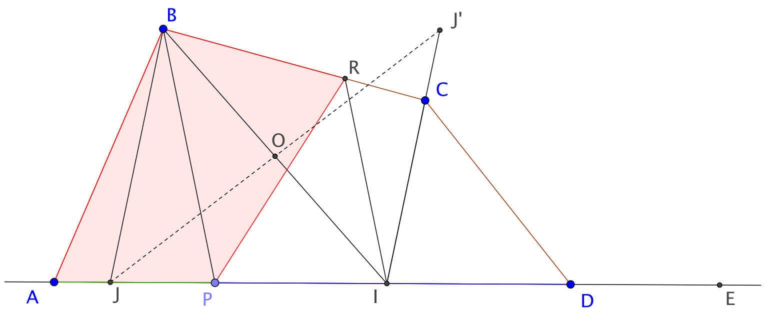

FIGURE 4 –

On a d'abord un lemme :

2.8 Lemme. *Les droites (BJ) et (CI) sont parallèles.*

Démonstration. On se reportera à la figure 2. On note d'abord que les triangles FBD et ACE sont semblables. En effet, comme les droites (FB) et (AC) sont parallèles, les angles correspondants $\widehat{BFD}$ et $\widehat{CAE}$ sont égaux et on a de même $\widehat{FDB} = \widehat{AEC}$. On en déduit qu'on a $\dfrac{FD}{AE} = \dfrac{BF}{CA}$ et, en divisant numérateur et dénominateur de la première fraction par deux, $\dfrac{FJ}{AI} = \dfrac{BF}{CA}$. Comme on a par ailleurs $\widehat{BFJ} = \widehat{CAI}$, on voit que les triangles BFJ et CAI sont semblables et on a $\widehat{FJB} = \widehat{AIC}$, ce qui assure que (BJ) et (CI) sont parallèles.

Revenons au théorème, cf. figure 4. Il suffit de montrer que B et C sont de part et d'autre de la droite $\Delta := (IR)$. Appelons E^+ le demi-plan limité par Δ qui contient A et E^- l'autre. L'ordre sur la droite (AD) montre que A, P, J sont dans E^+ et D dans E^-. Comme (PB) est parallèle à Δ il en résulte que B est aussi dans E^+.

Considérons la symétrie σ_O de centre le milieu de $[BI)$. En vertu de 2.8, elle envoie la droite (BJ) sur (IC), donc la demi-droite $[BJ)$ sur l'une des demi-droites $[IC)$ ou son opposée $[IC')$. Mais comme $\mathscr{Q}$ est convexe, O est dans le demi-plan limité par (AD) qui contient B et C, donc $J' = \sigma_O(J)$ est aussi dans ce demi-plan et l'image de $[BJ)$ est $[IJ') = [IC)$. Le même argument montre que l'image de $[BP)$ est $[IR)$, donc que l'image du secteur $[\widehat{JBI}]$ est le secteur $[\widehat{J'IB}] = [\widehat{CIB}]$ et comme $[BP)$ est dans le premier secteur, $[IR)$ est dans le second et on a gagné.

La figure APM547-3def.ggb (jointe à mon envoi) regroupe les trois cas et il suffit de déplacer P sur $[AD]$ pour voir apparaître les droites de partage.

3 D'autres pistes de solution

Dans ce paragraphe, nous examinons une autre voie pour aborder ce type de problème, très naturelle, mais dont la mise en œuvre recèle quelques difficultés. Cela nous conduira à en examiner plusieurs variantes. Commençons par un problème plus simple que celui proposé (voir §4, Annexe).

3.1 Le cas du triangle

3.1 Notation. Dans tout ce qui suit, si P est un point du segment $[AC]$, et si M est le milieu de $[AC]$ on dira que P est **du côté de** A (resp. de C) s'il est dans $[AM]$ (resp. $[CM]$).

3.2 Proposition. *Soit ABC un triangle et P un point situé sur $[AC]$. Soit*

M le milieu de $[AC]$. La droite de partage[2] *est la droite joignant P au point d'intersection Q de la parallèle à (BP) passant par M avec le bord du triangle. Précisément, il y a deux cas :*

1) Si P est du côté de A, le point Q est dans $[BC]$, du côté de B.

2) Si P est du côté de C, le point Q est dans $[AB]$, du côté de B.

Démonstration. Comme (AM) partage ABC en deux parties de même aire, la conclusion vient du lemme du papillon, appliqué avec le point I, voir figures ci-dessous. Le point supplémentaire résulte du lemme de la médiane, appliqué à la position limite de P en A ou C.

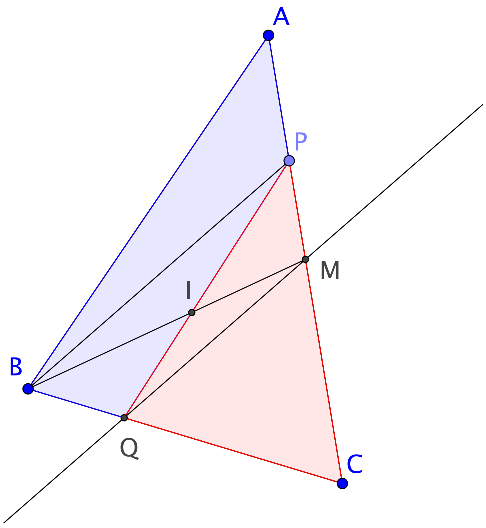

FIGURE 5 –

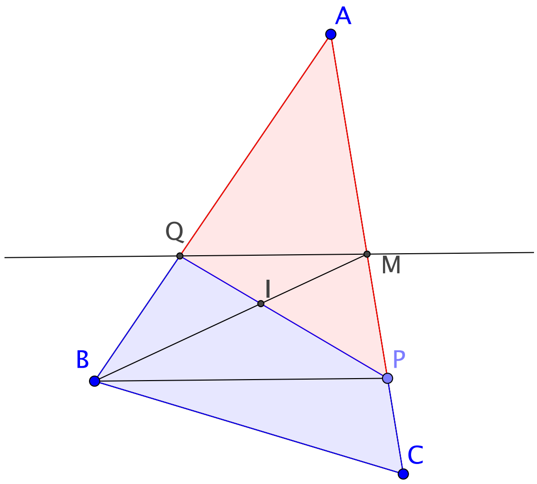

FIGURE 6 –

3.2 Retour au quadrilatère : la méthode par rectification

Le cas du triangle permet souvent de traiter celui du quadrilatère en commençant à le partager par une ligne brisée, puis en rectifiant celle-ci.

2. Le partage du triangle est systématiquement utilisé dans les stages de formation continue animés par le groupe Géométrie de l'IREM de Paris, comme introduction au travail sur les démonstrations par les aires. Voir là-dessus la brochure 100 de l'IREM, [1] p. 129-130.

Quitte à échanger les rôles de A et D on peut supposer que P est du côté de A.

3.3 Théorème. *Soit $\mathscr{P} = ABCD$ un quadrilatère et P un point de $[AD]$. On suppose que P est du côté de A.*

1) Il existe un point $M \in [BD]$, du côté de B tel que la droite (PM) partage le triangle ABD en deux parties de même aire et un point $Q \in [CD]$ tel que (MQ) partage BCD en deux parties de même aire. La ligne brisée $[PM] \cup [MQ]$ partage $\mathscr{P}$ en deux parties de même aire.

2) On suppose que la parallèle à (PQ) passant par M coupe $[CD]$ en R. Alors, la droite (PR) est une droite de partage.

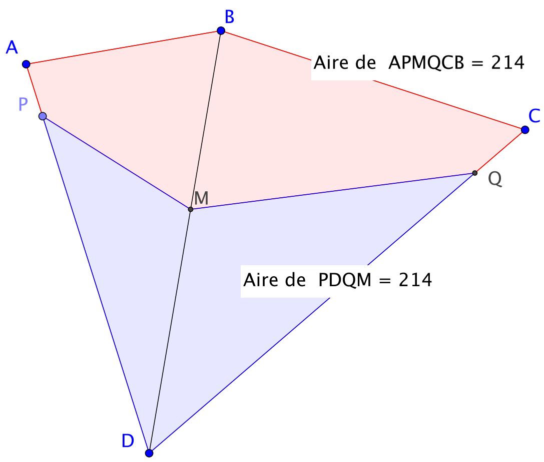

FIGURE 7 –

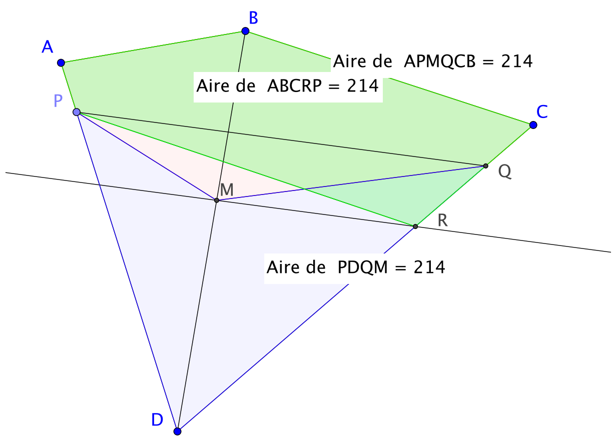

FIGURE 8 –

Démonstration. Le premier point n'est autre que le cas du triangle et le second vient du lemme du papillon.

Une difficulté se présente donc lorsque la parallèle à (PQ) passant par M coupe non pas $[CD]$, mais $[BC]$. La méthode précédente ne fonctionne plus (voir figure 9 ci-dessous) et, à ma connaissance, on ne peut pas traiter ainsi le problème posé. Nous allons donc utiliser une méthode un peu différente.

3.3 Un cas facile : point de départ en un sommet

Lorsque le point P est un sommet, disons en A, on vérifie que la méthode de 3.3 fonctionne sans exception. On peut même, au lieu de partager le

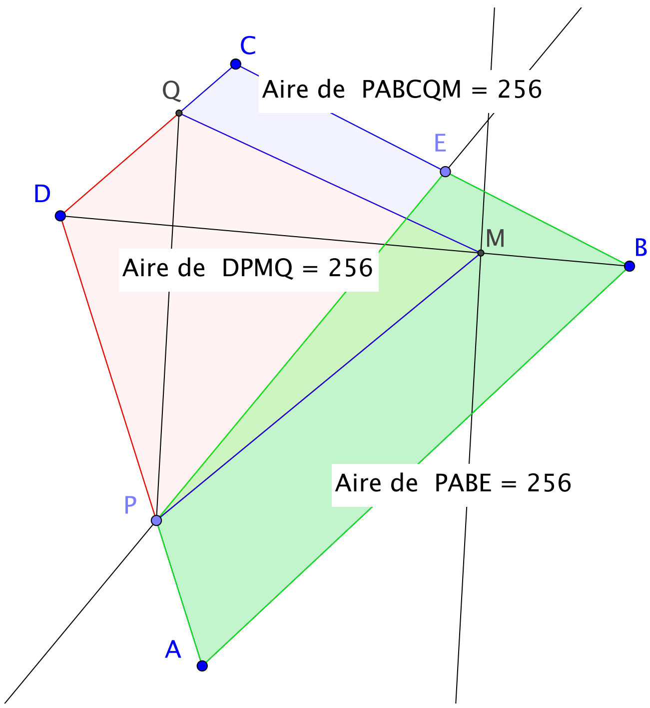

FIGURE 9 –

quadrilatère en deux parties égales, le partager en deux parties dont les aires sont dans un rapport donné, voir figure 10 :

3.4 Théorème. *Soit $\mathscr{P} = ABCD$ un quadrilatère convexe et k un nombre réel positif.*

1) Il existe un point $M \in [BD]$ qui vérifie $\dfrac{\mathscr{A}(ADM)}{\mathscr{A}(ABM)} = \dfrac{\mathscr{A}(CDM)}{\mathscr{A}(CBM)} = k$. La ligne brisée $[AM] \cup [MC]$ partage $\mathscr{P}$ en deux parties dont les aires sont dans le rapport k.

2) La parallèle à (AC) passant par M coupe $[BC] \cup [CD]$ en Q. Alors, la droite (PQ) partage $\mathscr{Q}$ en deux parties dont les aires sont dans le rapport k.

3.4 Application au problème initial

Pour partager le quadrilatère $\mathscr{Q} := ABCD$ en deux parties égales à partir de $P \in [AD]$ on peut procéder comme suit, voir figure 11. Posons $\mathscr{T} = APB$. Quitte à échanger A et D on peut supposer que l'on a $\mathscr{A}(\mathscr{T}) < \frac{1}{2}\mathscr{A}(\mathscr{Q})$. On considère le nombre $k = 1 - 2\dfrac{\mathscr{A}(\mathscr{T})}{\mathscr{A}(\mathscr{Q})}$. Pour faire apparaître ce nombre,

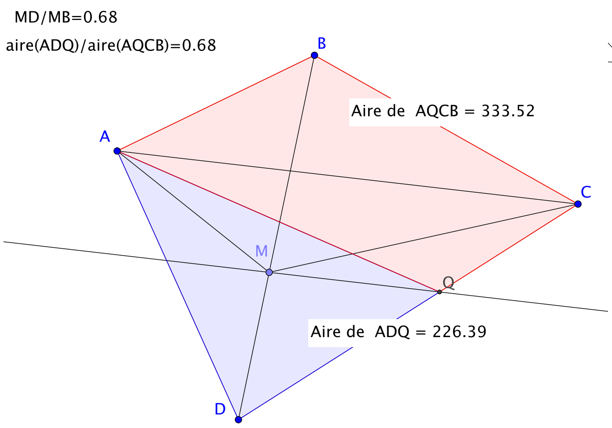

FIGURE 10 –

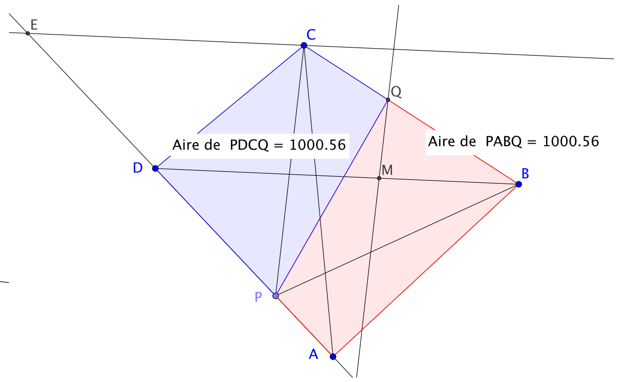

FIGURE 11 –

on construit $E \in (AD)$ tel que $\mathscr{A}(ACE) = \mathscr{A}(\mathscr{Q})$ (voir §2.3) et on a alors $k = 1 - 2\dfrac{AP}{AE}$. On construit ensuite, en utilisant Thalès, le point $M \in [BD]$ tel que $\dfrac{MB}{MD} = k$. La ligne brisée $[PM] \cup [MC]$ partage $BPDC$ en deux parties dont le rapport d'aires est k et on rectifie cette ligne en considérant le point d'intersection $Q \in [BC] \cup [CD]$ de la parallèle à (AC) passant par M, voir 3.4. On vérifie, par un petit calcul, qu'on a bien $\mathscr{A}(PQCD) = \mathscr{A}(PQBA)$.

4 Annexe : un texte ancien sur ce thème

Le texte ci-dessous a été écrit en 2000 par Jean-Claude Duperret, Jean-Pierre Richeton et moi-même, du temps où nous étions membres de la commission Kahane. Je le livre ici pour information (il n'a jamais été publié).

4.1 L'énoncé initial

Il s'agit d'un exercice que nous proposons d'ériger en prototype de ce que nous voulons proposer comme situation de recherche dans la lignée de [2]. Il vérifie nos trois conditions (pas évident, susceptible de plusieurs méthodes, utilisable à différents niveaux). Nous essayons d'en faire une première analyse mathématique ci-dessous. Bien entendu il faudrait le soumettre à une vraie expérimentation dans des vraies classes.

Cet exercice a des variantes multiples et classiques. Sous la forme donnée ici il est emprunté au livre de Erich Ch. Wittmann : *Géométrie élémentaire et réalité* (Didier Hatier). Voilà l'un des énoncés qu'il propose :

Un quadrilatère convexe Q étant donné, partager Q en trois parties d'aires égales par deux droites issues d'un même sommet de Q.

4.2 Comprendre l'énoncé

Quand on dit "partager" cela sous-entend qu'il faut donner une procédure de construction explicite (à la règle et au compas éventuellement, ou avec un logiciel de géométrie) pour réaliser le partage. On peut aussi se poser la question de l'existence d'un tel partage (cela résulte d'un théorème des valeurs intermédiaires) et celle de son unicité.

4.3 Répertorier les outils

Il s'agit clairement d'un problème de géométrie affine plane, portant sur les aires, qui plus est. On doit donc pouvoir le résoudre avec les quatre lemmes du collège de [4] : le demi-parallélogramme, la médiane, le trapèze et les proportions. Bien entendu, d'autres voies sont possibles, mais cette certitude d'y arriver ainsi est notre fil conducteur.

4.4 Généraliser pour mieux aborder le problème

C'est un principe souvent énoncé par certains mathématiciens : mieux vaut poser un problème le plus généralement possible. Aussi, ne lésinons pas et posons le problème sous la forme suivante :

On considère un polygone P (pas nécessairement convexe) à r côtés et un point M situé sur un côté de P. Comment partager P en n parties de même aire[3] *par des droites issues de M ?*

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, il est plus facile d'aborder le problème sous cette forme générale. En particulier, par rapport au problème initial celui-ci, puisque formulé en général, présente l'avantage de pouvoir être spécialisé. C'est même assez naturel (c'est un bon principe de commencer à regarder les exemples les plus simples avant d'aborder le cas général), alors que l'autre problème, par son côté fixé ($r = 4, n = 3$, etc.) s'y prête moins. L'intérêt de la chose est de s'attaquer à un problème plus facile même que le problème initial : sérier les difficultés c'est ce qu'auraient préconisé Descartes, ou encore Horace. Du point de vue pédagogique cela offre l'intérêt

3. On constatera plus loin que nous n'avons pas été encore assez ambitieux : il faut aussi résoudre le problème de partager P en deux parties dans un rapport k donné arbitraire.

supplémentaire de pouvoir élaborer peu à peu sur les cas particuliers les outils qui vont servir dans le cas général.

Attention, nous ne disons pas qu'il faut avoir pour ambition de traiter le cas général dans les classes, mais il est sans doute utile de le garder en tête.

4.5 Spécialiser dans de multiples directions

On peut donc spécialiser le problème tous azimuts : on peut prendre un r particulier : 4 comme proposé voire 3 ce qui est encore plus simple ; on peut prendre un n particulier : 3 comme proposé, voire 2 ; on peut prendre M en un sommet ou non ; on peut particulariser P (prendre un triangle rectangle, isocèle, équilatéral, un parallélogramme, un carré, etc) ; on peut enfin renoncer à partager par une droite et se contenter d'une ligne brisée, et sans doute bien d'autres choses encore. Travailler dans un cadre général c'est introduire un espace de liberté. C'est aussi admettre par avance que l'on ne résoudra peut-être pas tout le problème, mais qu'on avancera vers sa solution : voilà typiquement une attitude de mathématicien, à la fois ambitieuse et modeste.

4.6 Commençons par le commencement : le triangle

Le cas le plus simple correspond à $r = 3$, donc un triangle ABC, à $n = 2$, et à M en un sommet, disons A. La solution est claire avec nos outils : c'est le lemme de la médiane. Guère plus compliqué, le même problème avec n quelconque : le lemme des proportions nous indique qu'il suffit de partager le côté opposé à A en n parties égales, ce que Thalès nous permet de faire à la règle et au compas.

Plus intéressant, même dans le cas $n = 2$, le cas où le point M n'est plus un sommet. Il y a une foule de manières d'aborder le problème. On peut s'en sortir avec base $\times$ hauteur, avec la formule de l'aire utilisant le sinus, etc.). La méthode suivante est conforme aux méthodes proposées.

On suppose M sur $[AC]$. On sait que la médiane AA' partage le triangle en deux. On cherche une droite MM', avec $M' \in [BC]$, qui partage en deux aussi. Si l'on prend la droite (MA') il manque $MA'A$. On va remplacer A' par M', ce qui rajoutera le triangle $MA'M'$ qui doit donc être de même aire que $MA'A$. C'est le lemme du trapèze : il suffit de prendre AM' parallèle à MA'. Cette construction marche si M est plus proche de A que de C (si M est le milieu de $[AC]$, (MB) convient). Si M est plus proche de C on utilise la médiane CC'.

Le partage en $n = 3$ parties est un peu plus amusant. Supposons M sur $[AC]$ et plus proche de A. Puisque la méthode précédente marchait bien on peut essayer de commencer de la même manière : on partage $[BC]$ en trois par A' et A'' (A' le plus près de B). Les trois triangles de sommet A ainsi obtenus réalisent le partage en trois. On peut alors prendre comme première droite MA'' et corriger comme dans le cas $n = 2$: on trace (AM'') parallèle à (MA'') et M'' convient. Si l'on continue avec A', il faut que la parallèle à (MA') passant par A coupe le segment $[BC]$. Cela ne marche que si M est à moins du tiers de $[AC]$ à partir de A. Sinon, on peut tenter la même méthode en partageant $[AB]$. Cela fonctionne si M est à moins du tiers côté C cette fois. Et si M est entre les deux ? Il y a plusieurs façons de s'en sortir.

On peut par exemple commencer avec A'' comme ci-dessus. On obtient M'' et il reste à partager le quadrilatère $AMM''B$ en deux parties égales par une droite issue de M : c'est notre problème, compliqué puisqu'on passe au quadrilatère, mais simplifié puisqu'on partage seulement en deux et à partir d'un sommet. On tombe donc, assez naturellement, sur un problème plus simple du cran supérieur, voir plus loin.

On peut aussi être plus volage, et la marguerite commencée avec A'' finir de l'effeuiller[4] avec C', c'est-à-dire en partageant $[AB]$ en tiers. On fabrique ainsi deux triangles MCM'' et MAM' tiers du triangle ABC et le quadrilatère entre les deux est bien obligé d'être un tiers lui aussi.

On notera que les deux méthodes proposées ici se généralisent aisément au cas de n. La première conduit à partager un quadrilatère en $n-1$, l'autre à construire des triangles d'aire $1/n$ du triangle initial de chaque côté : si $M = \lambda A + (1-\lambda)B$ avec $\frac{k}{n} \leq \lambda < \frac{k+1}{n}$ on construit k triangles d'un côté et $n-k-1$ de l'autre.

4.7 Le quadrilatère, cas $n = 2$ à partir d'un sommet

Appelons $ABCD$ le quadrilatère (disons convexe) et A le sommet choisi. L'idée est de renoncer à l'une des contraintes du problème, à savoir le fait de partager le quadrilatère par une droite pour se contenter de le partager par une ligne brisée. Là, c'est facile : on découpe le quadrilatère en deux triangles en traçant la diagonale BD et on partage les deux triangles grâce au lemme de la médiane en passant par le milieu I de $[BD]$. Il reste à rectifier la ligne brisée. On veut donc remplacer le triangle AIC par un triangle $AA'C$ de même aire avec $A' \in [BC]$ ou $A' \in [CD]$: c'est le lemme du trapèze, on prend (IA') parallèle à (AC) et on a gagné.

La méthode peut sans doute se généraliser au cas d'un partage en n depuis le sommet A : on divise la diagonale $[BD]$ en n et on rectifie les lignes brisées.

4. Plutôt que de commencer avec Suzette et de finir avec Lisette.

En fait, dans ce cas, il est plus commode, pour la lisibilité de la figure, de résoudre (une fois encore) un problème plus général :

Un quadrilatère $ABCD$ étant donné, le partager, par une droite issue de A, en deux parties dont les aires sont dans les rapports k et $1-k$ avec l'aire de $ABCD$

La méthode de rectification de ligne brisée fonctionne parfaitement. Il suffit de construire un point I qui partage $[BD]$ dans le rapport donné. (On sait faire cela à la règle et au compas si le rapport est un nombre rationnel, voire constructible, ou s'il est donné sur la figure.)

4.8 Le quadrilatère, partage général en deux, à partir d'un point quelconque

Comme la méthode précédente a bien marché, on continue. On a notre quadrilatère $P = (CDEF)$ et un point A sur $[EF]$. On découpe P par la diagonale $[CE]$. On partage le triangle CEF par une droite issue de A, qui recoupe $[CE]$ en M, puis on partage CDE en deux par une droite issue de M qui recoupe $[CD]$ en B. (Attention, il y a des cas de figure à distinguer.) La ligne brisée AMB partage le quadrilatère en deux et il n'y a plus qu'à la rectifier. Pour cela on énonce un lemme [5] qui vaut dans un cas un peu plus général que celui qui nous intéresse et qui devrait couvrir à peu près tous les cas :

4.1 Théorème. (Lemme de rectification). *Soit $CDEF$ un quadrilatère convexe, A, B des points du bord de P, B étant situé sur le côté $[CD]$, et soit M un point intérieur. On considère la ligne brisée AMB qui partage P en deux polygones P', P''. On pose $k = \dfrac{\mathscr{A}(P')}{\mathscr{A}(P)}$. On considère la parallèle Δ à (AB) passant par M.*

1) Si Δ coupe le côté $[BC]$ en B', la droite (AB') partage P en deux polygones Q' et Q'' avec le même rapport d'aires.

2) Si Δ coupe la droite (CD) en B' situé en dehors du segment du côté de D, la parallèle à (AD) passant par B' coupe (par exemple) le côté $[ED]$ en B'' et la droite (AB'') partage P en deux polygones Q' et Q'' avec les mêmes rapports d'aires.

Démonstration. 1) En vertu du lemme du trapèze on a $\mathscr{A}(AMB) = \mathscr{A}(AB'B)$, donc $\mathscr{A}(FAMBC) = \mathscr{A}(FAB'C)$ et la droite (AB') réalise le partage voulu.

5. Ajouté en 2023 : Comme on l'a vu plus haut, ce lemme semble bien optimiste. Il est valable si A est dans $[EF]$ mais sans doute pas dans tous les cas de figure. Heureusement, ceci a été écrit en 2000 et il y a prescription ...

2) On a $\mathscr{A}(AMB) = \mathscr{A}(AB'B)$ par le lemme du trapèze, puis $\mathscr{A}(AB''D) = \mathscr{A}(AB'D)$, de sorte que (AB'') réalise le partage.

4.9 Et maintenant, que vais-je faire ?

Il est clair qu'on peut prolonger la recherche sur ce thème dans de multiples directions. Pour traiter le cas général, Fourrey, dans [3] Ch. IV, utilise systématiquement la construction d'un triangle équivalent au polygone donné et se ramène essentiellement au cas du triangle. On peut aussi imaginer de généraliser les lemmes de rectification (même si ce n'est pas facile à écrire). Si l'on confie ce problème à des élèves ils inventeront des tas d'autres voies, dont certaines seront peut-être plus intelligentes. Cela mérite d'être essayé, non ?

Références

[1] Groupe géométrie de l'IREM de Paris, *Enseigner la géométrie au cycle 4*, Brochure 100, IREM de Paris, 2021.

[2] Duperret Jean-Claude, Perrin Daniel, Richeton Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 2001.

[3] Fourrey Émile, *Curiosités géométriques.*
`https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k875649b`

[4] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.