Les lunules

Daniel PERRIN

1 Le problème

Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O. On considère le demi-cercle $\mathscr{D}$ de diamètre $[AB]$ et l'arc Γ du cercle de centre O et de rayon OA limité par A et B, tous deux situés dans le demi-plan limité par (AB) qui ne contient pas O. On considère un point M de $\mathscr{D}$, L l'intersection de Γ et de $[OM]$ et N le projeté orthogonal de M sur $[AB]$.

On sait que la lunule comprise entre $\mathscr{D}$ et Γ a même aire que le triangle OAB. Il s'agit de montrer l'égalité des aires du triangle OAN et de la portion de lunule AML

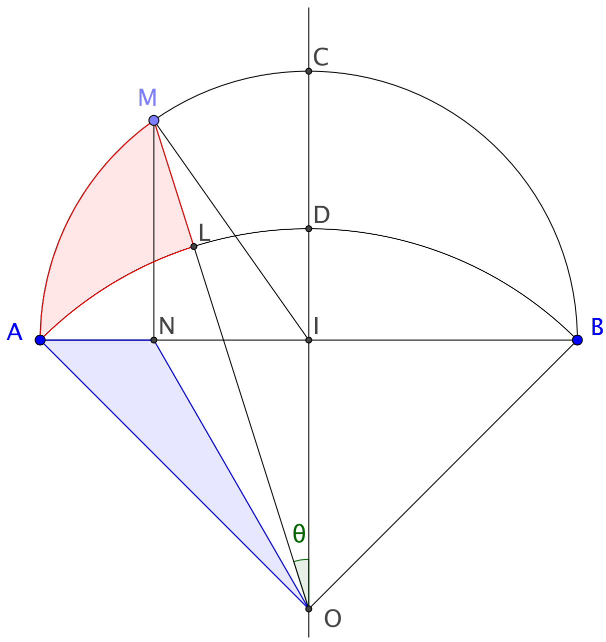

FIGURE 1 –

2 La solution

La question de savoir si une preuve est élémentaire n'est pas évidente. Comme Tschirnhaus est un mathématicien du XVII-ème siècle, j'ai considéré que la trigonométrie faisait partie de l'arsenal de connaissances dont il disposait.

On note I le milieu de $[AB]$, D et C les intersections de (OI) et de Γ et $\mathscr{D}$ respectivement et on pose $AB = 2R$ et $\theta = \widehat{COM}$. La lunule construite sur AB a pour aire R^2 comme le triangle OAB. Il en résulte que la demi-lunule ADC a même aire que le triangle AOI. Pour établir le résultat, il suffit de montrer que l'aire du quadrilatère curviligne $MCDL$ est égale à celle du triangle ONI.

Le triangle OMI est isocèle en I donc son angle en I est $\pi - 2\theta$ et on en déduit $\widehat{MIN} = \pi/2 - 2\theta$ et $\widehat{MIC} = 2\theta$. Cela permet de calculer $\mathscr{A}(ONI) = \frac{1}{2}OI \times NI = R^2 \cos\theta \sin\theta$.

Le quadrilatère curviligne $MCDL$ est différence du triangle curviligne OMC et du secteur circulaire OLD. L'aire de ce dernier est proportionnelle à la longueur d'arc et c'est donc $\mathscr{A}(OLD) = \pi(R\sqrt{2})^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \theta R^2$.

Le triangle curviligne OMC est réunion du secteur MIC et du triangle OMI. On a $\mathscr{A}(OMI) = \frac{1}{2}R^2 \sin(\pi - 2\theta) = R^2 \cos\theta \sin\theta$. Pour le secteur MIC on a $\mathscr{A}(MIC) = \pi R^2 \frac{2\theta}{2\pi} = \theta R^2$. En définitive on a $\mathscr{A}(MCDL) = R^2 \cos\theta \sin\theta + \theta R^2 - \theta R^2 = R^2 \cos\theta \sin\theta$.

On constate que les aires promises sont bien égales.