Le problème des tiers

Daniel PERRIN

1 Le problème

Soient ABC un triangle, M, N, P les points situés aux tiers des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ du côté de B, C, A respectivement. Les droites (AM) et (BN) (resp. (BN) et (CP), resp. (CP) et (AM)) se coupent en I (resp. J, resp. K). Alors l'aire de IJK est le septième de celle de ABC.

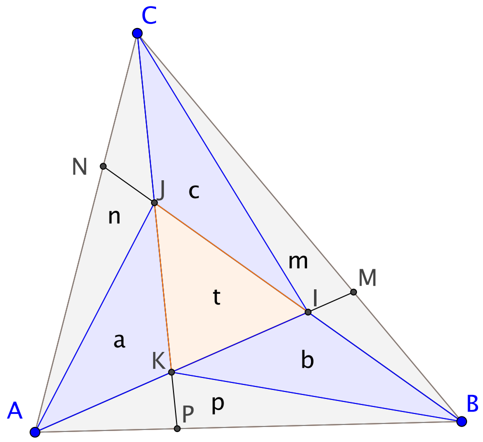

FIGURE 1 – Les tiers

2 Le lemme du chevron

Le résultat qui donne la solution est ce que j'appelle le lemme du chevron [1]. On a d'abord le lemme des proportions :

2.1 Lemme. *Soit ABC un triangle et soit $A' \in (BC)$, $A' \neq C$. On a l'égalité $\mathscr{A}(ABA')/\mathscr{A}(ACA') = BA'/CA'$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la fomule *base* $\times$ *hauteur*$/2$.

On a ensuite le lemme du chevron :

2.2 Lemme. *Soit ABC un triangle et M un point non situé sur (AC). On suppose que (AM) coupe (BC) en A'. Alors on a $\mathscr{A}(ABM)/\mathscr{A}(ACM) = BA'/CA'$.*

1. Voir D. Perrin, *Mathématiques d'école*, Cassini 2011, Ch. 7.

Démonstration. Posons $k = BA'/CA'$. Le lemme des proportions donne $\mathscr{A}(ABA') = k\mathscr{A}(ACA')$ et $\mathscr{A}(MBA') = k\mathscr{A}(MCA')$ d'où le résultat par différence.

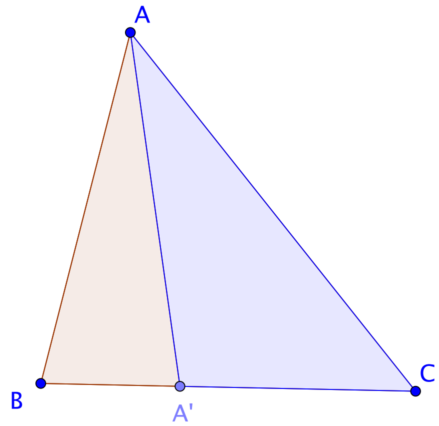

FIGURE 2 – Lemme des proportions

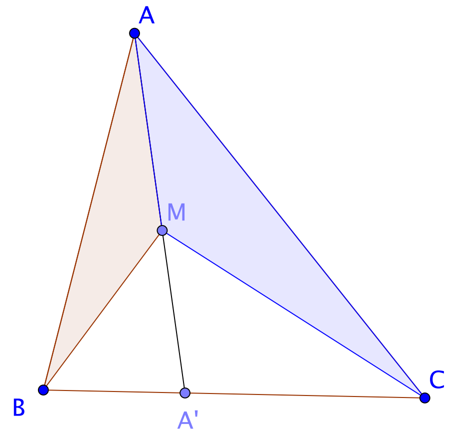

FIGURE 3 – Lemme du chevron

2.3 *Remarque.* Le lemme des proportions est essentiellement dans Euclide (Livre VI, Prop. 1) mais le lemme du chevron, sauf erreur, n'y est pas [2].

3 La solution

Avec les notations de la figure 1, on applique le lemme du chevron au triangle AJB et au point K. On obtient $2a = t + b$ (car $BP = 2AP$), et, de même, $2b = t + c$ et $2c = t + a$. On l'applique ensuite au triangle ABC et au point J, on obtient $2n = c + m$ et, de même, $2p = a + n$ et $2m = b + p$.

En additionnant les relations du premier type on a $a + b + c = 3t$, en additionnant celles du second type on a $m + n + p = a + b + c = 3t$. Mais alors, l'aire de ABC est égale à $a + b + c + m + n + p + t$, donc à $7t$.

3.1 *Remarques.* 1) En fait, les aires des sept triangles sont égales, comme le lecteur attentif l'établira sans peine.

2) Plus généralement, si les points sont tels que $MC/MB = NA/NC = PB/PA = k$, on a $T = \dfrac{k^2 + k + 1}{(k-1)^2}\, t$.

2. Et, en tout cas, Euclide n'aurait jamais écrit : *Posons* $k = BA'/CA'$.