Une extension de l'inégalité de Nesbitt

Daniel PERRIN

1 Le problème

Soient a, b des réels strictement positifs. Il s'agit de montrer qu'on a :

$$B := \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq A := \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

2 La solution

On peut supposer qu'on a $0 < a \leq b \leq c$. On calcule $B - A$ en faisant les différences des termes admettant la même variable en numérateur :

$$B - A = \frac{bc(c-b) + ca(c-a)}{(a^2+b^2)(a+b)} + \frac{ab(b-a) - bc(c-b)}{(c^2+a^2)(c+a)} + \frac{-ca(c-a) - ab(b-a)}{(b^2+c^2)(b+c)}.$$

On pose $D = (a^2+b^2)(a+b)$, $E = (c^2+a^2)(c+a)$ et $F = (b^2+c^2)(b+c)$ de sorte qu'on a :

$$B - A = bc(c-b)\big(\frac{1}{D} - \frac{1}{E}\big) + ca(c-a)\big(\frac{1}{D} - \frac{1}{F}\big) + ab(b-a)\big(\frac{1}{E} - \frac{1}{F}\big).$$

Mais on a $D \leq E \leq F$ donc $\dfrac{1}{D} \geq \dfrac{1}{E} \geq \dfrac{1}{F}$ et, comme $c-b$, $c-a$ et $b-a$ sont ≥ 0, $B - A$ est bien ≥ 0.