Les triangles bien élevés

Daniel PERRIN

1 Le problème

On considère un triangle ABC avec $a = BC = 87$, $b = CA = 68$ et $c = AB = 95$ (les longueurs sont en millimètres). Il s'agit de montrer que ce triangle est "bien élevé", c'est-à-dire que la hauteur $h = CH$ vérifie $h + c = a + b$ et de déterminer tous les triangles bien élevés (autrement dit, avec les notations précédentes, les triangles à côtés entiers qui vérifient $h+c = a+b$).

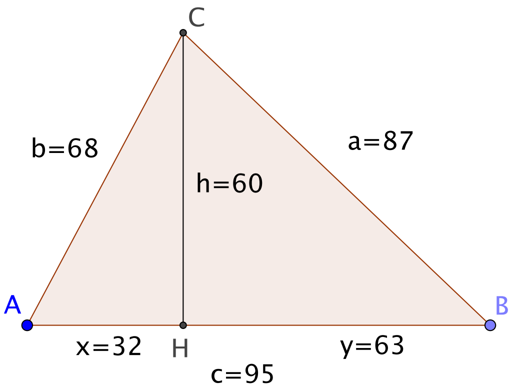

FIGURE 1 – L'exemple donné

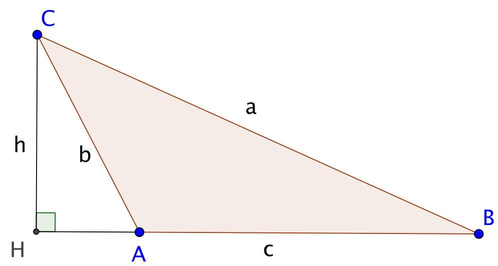

FIGURE 2 – Le cas obtus

2 Calcul général et application au triangle donné

2.1 Deux remarques

2.1 *Remarques.* 1) Si le triangle ABC est bien élevé en C (c'est-à-dire avec la hauteur issue de C), le pied de cette hauteur est nécessairement dans le segment $[AB]$. En effet, si H est extérieur à $[AB]$, disons du côté de A, voir figure 2, c'est que l'angle en A est obtus et on a alors $c = AB < a = BC$ (le plus grand angle fait face au plus grand côté, Euclide, Livre 1, Prop. 19) et $h = CH < AC = b$ (car b est l'hypoténuse du triangle rectangle AHC), et l'égalité $c + h = a + b$ est impossible.

2) Si le triangle ABC est bien élevé en C on a $h \leq a$ et $h \leq b$ (et même $h < a$ et $h < b$, car le cas d'un triangle rectangle en B ou C est impossible), donc $c > a$ et $c > b$. Cela montre qu'un triangle ne peut pas être bien élevé relativement à deux sommets.

2.2 Calcul de h, x, y

Un triangle est entièrement déterminé par les longueurs a, b, c de ses côtés, de sorte que toutes les longueurs définies à partir de ce triangle se calculent à partir de a, b, c, en particulier $h = CH$, $x = AH$ et $y = BH$, voir figure 1. Comme le point H est dans le segment $[BC]$ (voir 2.1.1) on a les relations $x + y = c$, $x^2 + h^2 = b^2$, $y^2 + h^2 = a^2$. On en déduit $y^2 - x^2 = a^2 - b^2$, puis $y - x = \dfrac{a^2 - b^2}{c}\cdot$ Ces relations donnent x et y :

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \text{ et } y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\cdot \tag{1}$$

Avec $h^2 = a^2 - y^2$ on obtient :

$$h^2 = \frac{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}\cdot \tag{2}$$

Dans le cas du triangle donné, on a $x + y = 95$ et $y - x = 31$, d'où $x = 32$ et $y = 63$ et $h^2 = a^2 - y^2 = 87^2 - 63^2 = 3600 = 60^2$ donc $h = 60$ et on a bien $a + b = c + h = 155$, de sorte que ABC est bien élevé en C.

2.2 *Remarque.* On a vu que le triangle est bien élevé vis à vis du sommet C, mais pas vis à vis des autres. De plus, les autres hauteurs ne sont pas entières comme on le voit en utilisant le double de l'aire $ch = 5700 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 19$ qui n'est ni multiple de $68 = 2^2 \times 17$ ni de $87 = 3 \times 29$. Pour une discussion sur ce point, voir la remarque 3.8.

3 Trouver tous les triangles bien élevés

3.1 Préliminaires

Soit ABC un triangle à côtés entiers bien élevé par rapport à C. Commençons par quelques remarques.

3.1 *Remarques.* 1) Comme les côtés a, b, c sont entiers, il en est de même de $h = a + b - c$.

2) On obtient un autre triangle bien élevé en multipliant tous les côtés de ABC par un même entier n. On peut donc se contenter de chercher des solutions **primitives** c'est-à-dire avec a, b, c premiers entre eux. Dans ce cas, on dira en abrégé que a, b, c est un triangle bien élevé primitif [1]. Pour déterminer tous les triangles bien élevés il suffit de déterminer ceux qui sont primitifs, et c'est ce que nous ferons ci-dessous.

3) La formule (1) montre que $a^4 + b^4 + c^4$ est pair. Comme a, b, c ne sont pas tous trois pairs si la solution est primitive, il y en a donc deux parmi les trois qui sont impairs et un seul qui est pair.

On montre ensuite que les quantités x, y sont entières :

3.2 Lemme. *Soit ABC un triangle à côtés entiers a, b, c, bien élevé par rapport à C, autrement dit tel que la hauteur h issue de C vérifie $c+h = a+b$. Alors $x = AH$ et $y = BH$ sont entiers.*

Démonstration. Cela résulte de la formule (1). En effet, avec cette formule on voit que x est rationnel et, comme son carré $x^2 = b^2 - h^2$ est entier, x est entier [2] et y l'est aussi grâce à $y = c - x$.

On a donc 6 paramètres entiers a, b, c, h, x, y avec quatre relations : $c = x + y$, $x^2 + h^2 = b^2$, $y^2 + h^2 = a^2$ (relations vraies pour tous les triangles acutangles) et $a + b = c + h$ (qui caractérise les triangles bien élevés). En fait, si l'on prend x et y comme inconnues, c est inutile et on peut l'oublier en remplaçant la relation $c + h = a + b$ par $x + y + h = a + b$.

On voit en particulier apparaître des triangles pythagoriciens x, h, b et y, h, a (c'est-à-dire des triplets d'entiers vérifiant les relations de Pythagore $b^2 = h^2 + x^2$ et $a^2 = h^2 + y^2$). On sait résoudre ce type d'équations. C'est le résultat suivant :

3.3 Proposition. *Soient X, Y, Z des entiers > 0 vérifiant $X^2 + Y^2 = Z^2$.*

1) Si X, Y, Z sont premiers entre eux (autrement dit si X, Y, Z est une solution primitive de l'équation), Z est impair et un seul des nombres X, Y est pair.

Si Y est pair, il existe des entiers α, β, γ tels que α, β soient non nuls, α et β premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, avec $\beta > \alpha$, tels que l'on ait :

$$X = \beta^2 - \alpha^2, Y = 2\alpha\beta, Z = \alpha^2 + \beta^2$$

Si X est pair on a les mêmes relations en échangeant les rôles de X et Y.

2) Dans le cas général, il existe un entier $k > 0$ et une solution primitive X_0, Y_0, Z_0 de l'équation tels que $X = kX_0$, $Y = kY_0$ et $Z = kZ_0$.

1. Comme quoi on peut être primitif et bien élevé !

2. Savamment c'est le fait que l'anneau **Z** est intégralement clos, mais il suffit d'écrire x sous forme de fraction irréductible pour s'en convaincre.

(Voir par exemple [1] chapitre 1, problème 1.)

3.2 Le résultat

3.4 Théorème. *Soit ABC un triangle bien élevé en C et primitif. Avec les notations du paragraphe 1 on a les résultats suivants :*

1) Si c est pair il existe des entiers α, β non nuls, premiers entre eux, avec α pair et $\alpha > \beta$, tels que l'on ait :

$$a = \beta(2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2),\ b = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$c = \alpha(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \text{ et } h = 2\alpha\beta(\alpha - \beta).$$

2) Si c et a sont impairs et b pair, il existe des entiers α, β, non nuls, premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair tels que l'on ait :

$$a = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 5\beta^2),\ b = 4\beta(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$c = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 3\beta^2) \text{ et } h = 4(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)\beta.$$

Si c et b sont impairs et a pair, le résultat est identique en échangeant les rôles de a et b.

3.5 *Exemples.* 1) Voici des exemples avec c pair. Le plus simple est $a = b = 5$, $c = 6$, obtenu avec $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. On a ensuite, avec $\alpha = 4$ et $\beta = 1$, $a = 25$, $b = 51$, $c = 52$ et avec $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $(51, 25, 52)$. Viennent ensuite $(61, 185, 186)$, $(113, 455, 456)$, etc.

2) Avec c impair, l'exemple le plus simple est donné par $\alpha = 2$, $\beta = 1$, et on a $a = 13$, $b = 20$, $c = 21$. L'exemple donné dans l'énoncé correspond à $\alpha = 4$, $\beta = 1$ et on a aussi, avec $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $a = 41$, $b = 104$, $c = 105$, puis $(85, 300, 301)$, $(195, 232, 259)$, $(265, 148, 273)$, etc.

3.6 *Remarques.* 1) Dans 1) si l'on remplace α, β par $\alpha, \alpha - \beta$ on obtient le triplet b, a, c au lieu de a, b, c.

2) Contrairement au cas 1), dans 2) on a des exemples avec α pair et avec α impair.

3.3 La démonstration

3.3.1 Le cas c pair

Les entiers a, b sont impairs et $h = a + b - c$ est pair. On en déduit que x et y sont impairs (sinon, avec $a^2 = h^2 + y^2$ et $b^2 = h^2 + x^2$, a et b seraient pairs). Dans les triangles pythagoriciens x, h, b et x, h, a c'est donc h qui est le terme en $2\alpha\beta$. Précisément, on a $x = k(\alpha^2 - \beta^2)$, $h = 2k\alpha\beta$, $b = k(\alpha^2 + \beta^2)$ et $y = l(\gamma^2 - \delta^2)$, $h = 2l\gamma\delta$, $a = l(\gamma^2 + \delta^2)$ avec les conditions de 3.3 pour α, β et γ, δ (notamment α, β (resp. γ, δ) premiers entre eux) et avec k, l impairs. De plus, k et l sont premiers entre eux, sinon, a, b, c auraient un facteur commun.

Les paramètres sont liés par deux relations : $h = 2k\alpha\beta = 2l\gamma\delta$ qui donne $k\alpha\beta = l\gamma\delta$ et $x + y + h = a + b$ qui donne $k\alpha\beta = k\beta^2 + l\delta^2$. On voit que $k\beta$ divise $l\gamma\delta$ et $l\delta^2$ donc aussi leur *pgcd* qui est $l\delta$ puisque γ et δ sont premiers entre eux. Posons $l\delta = k\beta u$. La première relation donne $\alpha = u\gamma$ et la seconde $\alpha = \beta + u\delta$. On en déduit que u divise α et β, ce qui impose $u = 1$ et on a $\gamma = \alpha$ et $\delta = \alpha - \beta$. Revenant aux relations, on voit que l divise β, $\beta = lv$ et on a aussi $kv = \alpha - \beta$ de sorte que v divise α et β, d'où $v = 1$. En définitive, on a $l = \beta$ et $k = \alpha - \beta$ et les valeurs des longueurs sont les suivantes :

$$x = (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta), \ y = \beta^2(2\alpha - \beta),$$

$$a = \beta(2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2), \ b = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$c = \alpha(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2), \ h = 2\alpha\beta(\alpha - \beta).$$

3.3.2 Le cas c impair

Dans ce cas a ou b est pair et l'autre impair et $h = a + b - c$ est pair. Quitte à échanger les rôles de A et B on peut supposer que c'est b qui est pair. On écrit les triangles pythagoriciens x, h, b et x, h, a respectivement avec les paramètres α, β, k et γ, δ, l selon les formules de 3.3 (donc avec α, β premiers entre eux et non tous deux impairs et de même pour γ, δ). Comme on a $a = l(\gamma^2 + \delta^2)$ et $b = k(\alpha^2 + \beta^2)$, cela montre que l est impair et que k est pair. Il résulte de $x^2 + h^2 = b^2$ que x est pair, donc que y est impair puisque $x + y = c$. On a donc $y = l(\gamma^2 - \delta^2)$ et $h = 2l\gamma\delta$. De l'autre côté il y a *a priori* deux possibilités, soit $h = k(\alpha^2 - \beta^2)$, $x = 2k\alpha\beta$, soit $h = 2k\alpha\beta$, $x = k(\alpha^2 - \beta^2)$. Le deuxième cas est impossible. En effet, sinon, le calcul est le même que dans le cas c pair et on a $k\alpha\beta = k\beta^2 + l\delta^2$, donc δ est pair, mais aussi $\delta = \alpha - \beta$, donc δ est impair et c'est absurde. En définitive, on a donc :

$$h = k(\alpha^2 - \beta^2), x = 2k\alpha\beta, b = k(\alpha^2 + \beta^2), \ h = 2l\gamma\delta, y = l(\gamma^2 - \delta^2), a = l(\gamma^2 + \delta^2).$$

Il y a deux relations : $h = k(\alpha^2 - \beta^2) = 2l\gamma\delta$ et $x + y + h = a + b$ qui donne $k\beta(\alpha - \beta) = l\delta^2$. On voit que $l\delta$ divise $k(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ et $k(\alpha - \beta)\beta$, donc il divise leur *pgcd* qui est $k(\alpha - \beta)$. On pose $k(\alpha - \beta) = ul\delta$. En reportant dans les deux relations on a $\delta = u\beta$ et $2\gamma = u(\alpha + \beta)$. Comme $\alpha + \beta$ est impair, u est pair, $u = 2u'$ et u' divise δ et γ donc $u' = 1$ et $u = 2$. On a ainsi $\delta = 2\beta$ et

$\gamma = \alpha + \beta$. Les relations donnent encore $k(\alpha - \beta) = 4\beta l$ mais comme 4β est premier à $\alpha - \beta$ et l premier à k, la seule solution [3] est $k = 4\beta$ et $l = \alpha - \beta$.

Finalement on a $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = 2\beta$, $k = 4\beta$, $l = \alpha - \beta$. On en déduit les valeurs des longueurs annoncées :

$$x = 8\alpha\beta^2, \ y = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2),$$

$$a = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 5\beta^2), \ b = 4\beta(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$c = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 3\beta^2) \text{ et } h = 4(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)\beta.$$

3.7 *Remarque.* Cette construction de ABC avec deux triangles rectangles accolés satisfait automatiquement l'inégalité triangulaire $|a - b| < c < a + b$ (en effet, à cause des triangles rectangles, on a $c = x + y < b + a$ et, par exemple, $a < h + y < b + c$).

3.8 *Remarques.* 1) Avec la description des solutions, il est facile de montrer que les autres hauteurs des triangles primitifs bien élevés par rapport à C ne sont pas entières (exercice pour le lecteur).

2) Si l'on n'impose plus au triangle d'être primitif, il se peut que toutes les hauteurs soient entières. Par exemple, le triangle isocèle avec $a = b = 125$, $c = 150$ et $h = 100$ a ses autres hauteurs égales à 120 (mais il n'est pas bien élevé par rapport à A et B car on n'a pas la relation $125 + 120 = 150 + 125$, voir la remarque 2.1.2).

Références

[1] Perrin D. *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.

3. Petit lemme pour le lecteur : si l'on a $ab = cd$ avec des entiers positifs tels que $a \wedge c = 1$ et $b \wedge d = 1$, on a $a = d$ et $b = c$.