Fractions égyptiennes

Daniel PERRIN

1 Le problème de l'APM

1.1 La question

Le problème abordé ici est posé dans le numéro 543 de *Au fil des maths* (problème 543-4) :

Quels sont les entiers naturels $n > 0$ *tels que* $4/n$ *soit somme de deux fractions égyptiennes, i.e.* $\frac{4}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *avec* p, q *entiers positifs.*

1.2 La réponse

1.1 Théorème. *Tout entier positif* $n > 1$ *est tel que* $\frac{4}{n}$ *est somme de deux fractions égyptiennes à l'exception des* n *qui n'ont que des facteurs premiers congrus à* 1 *modulo* 4.

Démonstration. Bien entendu, $n = 1$ ne convient pas car $1/p + 1/q$ est ≤ 2. Appelons B l'ensemble des $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ tels que $\frac{4}{n}$ soit de la forme $1/p+1/q$.

1) Si n est dans B, $\frac{4}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, kn aussi pour $k \in \mathbf{N}^*$. En effet on a $\frac{4}{kn} = \frac{1}{kp} + \frac{1}{kq}\cdot$

2) Le nombre 2 est dans B car $\frac{4}{2} = 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$, donc aussi tous les nombres pairs en vertu du point 1).

3) Les nombres de la forme $4k - 1$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ sont dans B. En effet, on a $\frac{4}{4k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(4k-1)}\cdot$ Il en résulte que les nombres impairs qui ont au moins un facteur congru à -1 modulo 4 sont dans B.

4) Pour conclure il reste à prouver le lemme :

1.2 Lemme. *Si* n *n'a que des facteurs premiers congrus à* 1 *modulo* 4 *il n'est pas dans* B.

Démonstration. On note qu'alors n est impair. Si n est dans B on a $4pq = n(p + q)$. Posons $d = \operatorname{pgcd}(p, q)$, on a $p = dp'$, $q = dq'$ avec p' et q' premiers entre eux et $4dp'q' = n(p'+q')$. Comme p' est premier à q', il est aussi premier à $p'+q'$ donc divise n et de même pour q'. Il s'ensuit que p' et q' sont congrus à 1 modulo 4, donc $p'+q'$ est congru à 2 modulo 4. Mais, comme n est impair, 4 divise $p' + q'$ et c'est absurde.

2 Généralisation

Il est naturel de se demander, plus généralement, quels sont les fractions qui s'écrivent comme somme de deux fractions égyptiennes. Voici le résultat :

2.1 Théorème. *Soient a, b des entiers positifs. La fraction $\frac{a}{b}$ est somme de deux fractions égyptiennes $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ si et seulement si b admet deux diviseurs p' et q' dont la somme est multiple de a.*

Démonstration. Supposons d'abord que la fraction a/b est irréductible, donc a et b premiers entre eux et que l'on a $\frac{a}{b} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ c'est-à-dire $apq = b(p+q)$. On pose $d = \mathrm{pgcd}\,(p, q)$. On a donc $p = dp'$, $q = dq'$ avec p', q' premiers entre eux. On en déduit $adp'q' = b(p'+q')$. Comme p' est premier à q' il l'est aussi à $p' + q'$, de sorte que p' divise b et de même pour q'. Comme p' et q' sont premiers entre eux, $p'q'$ divise b et on a $b = b'p'q'$, donc $ad = b'(p' + q')$. Comme a est premier avec b, donc aussi avec b', il divise $p' + q'$ et on voit que, dans ce cas, la condition donnée est nécessaire.

Si la fraction n'est pas irréductible, on écrit $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ avec a', b' premiers entre eux. Si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ est somme de deux fractions égyptiennes, b' admet deux diviseurs p', q' dont la somme est multiple de a'. Mais alors b admet les diviseurs $\delta p'$ et $\delta q'$ dont la somme est multiple de a.

Réciproquement, supposons que b admette deux diviseurs p', q' tels que $p' + q'$ soit multiple de a, $ka = p' + q'$. Soit $d = \mathrm{pgcd}\,(p', q')$. On a donc $p' = dp''$ et $q' = dq''$ avec p'' et q'' premiers entre eux. Le ppcm de p' et q' est $dp''q''$ et il divise b. On a donc $b = dp''q''b'$. Si l'on pose $p = kb'p''$ et $q = kb'q''$, on vérifie qu'on a bien $\frac{a}{b} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\cdot$

2.2 Corollaire. *1) On suppose la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible avec $a > 2$ et b premier. Alors a/b est somme de deux fractions égyptiennes si et seulement si b est congru à -1 modulo a.*

2) Si b admet un diviseur congru à -1 modulo a, la fraction a/b est somme de deux fractions égyptiennes.

Démonstration. 1) En effet, la seule possibilité de facteurs de b convenables est $p' = 1$, $q' = b$.

2) Si q' est le facteur en question on prend $p' = 1$.

2.3 *Exemples.* 1) Dans le cas $a = 5$, les mauvais b (premiers avec 5) sont ceux qui ont comme facteurs premiers des $p_i \equiv 1 \pmod 5$ autant qu'on en veut mais aucun $p_i \equiv -1$ et au plus un $p_i \equiv 2$ ou un $p_i \equiv -2$. Exemple $7 \times 11 = 77$ ou $7 \times 11 \times 31 = 2387$.

2) Dans le cas $a = 7$, les congruences modulo a autres que 0 sont $1, -1, 2, -2, 3, -3$. Appelons N_u le nombre de facteurs premiers de b congrus à u modulo 7. Alors a/b est somme de deux fractions égyptiennes si l'on a une des conditions suivantes : $N_{-1} \geq 1$, $N_{-2} \geq 3$, $N_3 \geq 3$, N_2 et N_{-2} tous deux ≥ 1, N_3 et N_{-3} tous deux ≥ 1, $N_2 \geq 2$ et $N_3 \geq 1$ et enfin $N_{-3} \geq 2$ et $N_{-2} \geq 1$.

Voici un exemple pour chaque cas : 13, 125, 27, 115, 187, 8993 et 605.

2.4 *Remarques.* 0) La condition du théorème impose évidemment que a/b est ≤ 2.

1) Notons quelques cas évidents où a/b est somme de deux fractions égyptiennes :

- Si $a = 1$: $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{b(b+1)}$.
- Si $a = 2$: $2/b = 1/b + 1/b$.
- Si a/b est somme de deux fractions égyptiennes, les $a/(kb)$ aussi.

2) Pour vérifier résultats et conjectures avec un ordinateur, il est utile de savoir majorer p et q vérifiant $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ en fonction de a et b. On peut supposer $1 \leq p \leq q$. On a la majoration $p \leq \dfrac{2b}{a}$ (car $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$ donc $\frac{a}{b} \leq \frac{2}{p}$). Cette majoration est optimale comme le montre l'exemple de $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

Pour majorer q, on note qu'on a $q = \dfrac{bp}{ap - b}$ avec $k := ap - b \geq 1$. On a donc $q = \dfrac{b^2}{ka} + \dfrac{b}{a} \leq \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{b}{a}$ et cette majoration est optimale comme en témoigne l'exemple $\dfrac{k+1}{k} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{k}$.

3) Si b vérifie la condition du théorème 2.1 et si b n'est pas égal à 1 on peut écrire la fraction a/b comme somme de deux fractions égyptiennes distinctes. En effet, on peut supposer a/b irréductible. Si l'on a $p = q$ on en déduit $ap = 2b$ et comme a est premier avec b cela impose $a = 1$ ou $a = 2$. Dans les autres cas on a donc une écriture avec deux fractions égyptiennes distinctes. Il reste à traiter les cas $a = 1$ et $a = 2$. Pour $a = 1$ et $b > 1$ on a $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{b(b+1)}$, pour $a = 2$, b est impair > 1, donc $b = 2k - 1$ avec $k \geq 2$ et $\dfrac{2}{2k-1} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k(2k-1)}$.