Paraboles et aires

Daniel PERRIN

1 Le problème de l'APM

1.1 La question

Le problème abordé ici est posé dans le numéro 543 de *Au fil des maths* (problème 543-1) :

On considère un triangle ABC et les trois paraboles tangentes à deux côtés du triangle en deux de leurs sommets. Il s'agit de déterminer les aires des sept triangles curvilignes définis par les points P, Q, R d'intersection de ces paraboles, voir figure ci-dessous.

C'est une très belle question, que l'on peut traiter analytiquement, mais aussi par des voies géométriques avec une forte saveur projective.

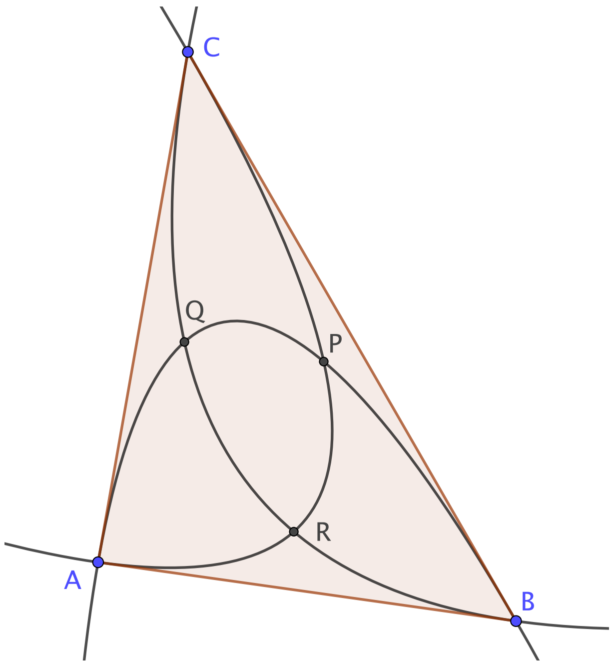

FIGURE 1 –

1.2 Existence des paraboles

1.1 Proposition. *Soient A, B, C trois points non alignés du plan. Il existe une unique parabole $\mathscr{P}(A; B, C)$ tangente à (AB) et (AC) en B et C respec-*

tivement.

Démonstration. Il y a plusieurs méthodes. Je donne ici une approche projective de la question, voir [4] pour plus de précisions.

On travaille dans le plan projectif réel [1] $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, avec les coordonnées homogènes (x, y, t). Une conique projective de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ a une équation homogène de la forme $ax^2 + by^2 + ct^2 + 2dyt + 2etx + 2fxy = 0$.

Dire qu'elle est tangente à une droite en un point donné (par exemple à $y = 0$ en $(0, 0, 1)$) revient à résoudre deux équations linéaires en $a, \dots, f$ (par exemple il s'agit d'écrire que $ax^2 + ct^2 + 2etx = 0$ n'a que la solution $x = 0$, ce qui donne $c = e = 0$). Quand on a trois points non alignés A, B, C, dire qu'une conique est tangente à (AB) en B et à (AC) en C donne ainsi quatre équations linéaires indépendantes, ce qui définit un pinceau de coniques. En revanche, dire qu'une conique est tangente à une droite donnée (en un point quelconque) se traduit par une équation du second degré en les coefficients (par exemple pour $t = 0$ on a $ax^2 + by^2 + 2fxy = 0$ et on écrit qu'il y a une racine double donc que le discriminant est nul : $f^2 - ab = 0$).

Parler de parabole suppose que l'on ait choisi en plus une droite à l'infini D_∞, une parabole étant alors une conique propre tangente à cette droite. Comme à l'accoutumée on prend $t = 0$ pour D_∞ et on travaille dans le plan affine défini par $t = 1$. Comme A, B, C sont non alignés, on peut supposer que leurs coordonnées sont respectivement $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$. Dire qu'une conique est tangente à (AB) en B et à (AC) en C donne quatre équations linéaires indépendantes, dire que la conique est une parabole signifie qu'elle est tangente à la droite de l'infini, ce qui donne en plus une équation du second degré et il y a donc deux solutions : une vraie parabole, unique, et la droite (BC) double : $(x + y - t)^2 = 0$.

Le calcul explicite est facile et on trouve la parabole $\mathscr{P}(A; B, C)$ d'équation affine $(x - y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0$. On calcule de même les équations de $\mathscr{P}(B; C, A)$: $(x + 2y)^2 - 4y = 0$ et de $\mathscr{P}(C; A, B)$: $(y + 2x)^2 - 4x = 0$.

1.2 *Remarques.* 1) On peut éviter le recours au projectif en notant qu'une parabole a une équation de la forme $Y = X^2$ où X, Y sont des formes affines indépendantes. Il suffit alors d'écrire que le groupe homogène de plus haut degré de l'équation est un carré. Le calcul est identique au précédent.

2) Pour construire les paraboles en question, par exemple avec le logiciel GeoGebra, on peut évidemment utiliser les équations ci-dessus. Le lecteur trouvera dans la section 3 deux autres manières de réaliser cette construction, l'une utilisant la macro "conique par 5 points", l'autre la définition par foyer et directrice.

1. Mais ce qui suit vaut sur n'importe quel corps de caractéristique différente de 2.

1.3 Le calcul des aires, première version

1.3.1 Généralités

On reprend les notations précédentes et on désigne par P le point d'intersection de $\mathscr{P}(B;C,A)$ et $\mathscr{P}(C;A,B)$ autre que A et de même pour Q,R par permutation circulaire.

Comme le fait d'être une parabole est une notion affine et que les rapports d'aires le sont aussi, le problème est affine, de sorte qu'on peut, à notre convenance, supposer le triangle équilatéral ou rectangle isocèle (autrement dit le repère $A;B,C$ orthonormé). Si l'on suppose le triangle équilatéral, on sait qu'il est invariant par les rotations [2] d'ordre 3 de centre le centre de ABC et ces rotations permutent les trois paraboles. Il s'ensuit que les aires se partagent en trois petites, égales à p, qui sont les aires des triangles curvilignes PBC, QCA et RAB, trois aires qui partent des sommets, égales à s, aires des triangles curvilignes AQR, BRP et CPQ et enfin une aire centrale m, celle du triangle PQR. Si t est l'aire du triangle ABC, on a $t = 3p + 3s + m$ et le calcul de l'aire du segment de parabole d'Archimède [3] nous enseigne qu'on a $m + 2s + p = \frac{2}{3}t$. On en déduit aisément $m = 3p$.

1.3.2 Les aires *via* le calcul intégral

Pour calculer p, on peut utiliser le calcul intégral et le mieux est cette fois de supposer le triangle isocèle rectangle en A, voir figure ci-dessous. On commence par déterminer le point R. Le cas équilatéral nous montre que la symétrie par rapport à la médiane CM échange les paraboles $\mathscr{P}(B;C,A)$ et $\mathscr{P}(A;B,C)$ donc fixe leurs points d'intersection C et R, de sorte que R est sur la droite d'équation $y = -2x + 1$. En coupant par l'une des paraboles on trouve $R = (4/9, 1/9)$.

Pour calculer $p = \mathscr{A}(ARB)$ on identifie les fonctions qui définissent les deux paraboles. À gauche on a l'équation $f(x) = \dfrac{1 - x - \sqrt{1-2x}}{2}$ et à droite $g(x) = x+1-2\sqrt{x}$ et on calcule immédiatement intégrales $\int_0^{4/9} f(t)dt = 1/81$

2. Bien entendu, il n'est pas nécessaire de supposer le triangle équilatéral pour avoir ces transformations. Si l'on prend $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ et $C = (0,1)$ dans un repère quelconque, il existe une transformation affine qui permute circulairement ces points. Elle s'obtient en faisant le changement de variables $X = x - \frac{1}{3}$, $Y = y - \frac{1}{3}$ et dans ce nouveau repère elle est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais on la voit bien mieux dans le cas équilatéral !

3. Pour des détails sur ce calcul, voir par exemple ma conférence : `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/ArchimedeIREM.pdf`.

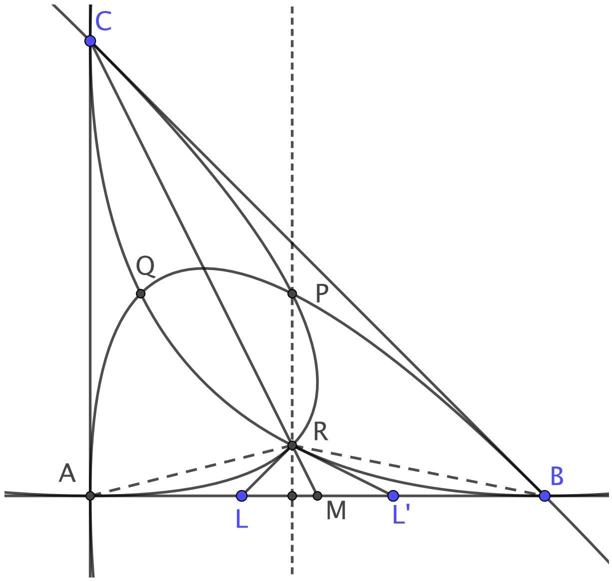

FIGURE 2 –

et $\int_{4/9}^{1} g(t)dt = 1/54$, d'où $p = \dfrac{5}{162} = \dfrac{5t}{81}$ (car $t = 1/2$ dans le repère choisi). On en déduit $m = 3p = \dfrac{5t}{27}$ et $s = \dfrac{17t}{81}$.

Une variante consiste à déterminer le point L, intersection de la tangente en R à $\mathscr{P}(B;C,A)$ avec (AB) en utilisant le fait que la dérivée de f est égale à 1 en $x = 4/9$. On a donc[4] $L = (1/3, 0)$ et on en déduit l'intersection L' de (AB) avec la tangente en R à $\mathscr{P}(A;B,C)$ par symétrie par rapport à la médiane : $L' = (2/3, 0)$. En appliquant Archimède aux triangles ARL et BRL' on voit que les parties de ces triangles situées sous les paraboles ont des aires $1/162$ donc en tout $1/81$ et on obtient p en ajoutant l'aire de $LRL' = 1/54$.

2 Les calculs d'aires par voie géométrique

Dans ce paragraphe nous retrouvons de manière géométrique les résultats précédents, en utilisant exclusivement le résultat d'Archimède. Nombre de résultats de géométrie projective seront employés ci-dessous, pour lesquels nous renvoyons le lecteur à [3] et [4].

4. On retrouvera ce résultat par voie géométrique au paragraphe suivant.

2.1 Le lemme fondamental

Il reprend essentiellement la figure précédente :

2.1 Lemme. *Soit ABC un triangle et $\mathscr{P}$ la parabole tangente à (BC) et (BA) en C et A respectivement. Soit M le milieu de $[AB]$ et R le point d'intersection de (CM) et de $\mathscr{P}$ autre que C. La tangente à $\mathscr{P}$ en R coupe $[BC]$ en N et $[AB]$ en L. Alors on a* $\dfrac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}} = \dfrac{\overline{RL}}{\overline{RN}} = -\dfrac{1}{2}$.

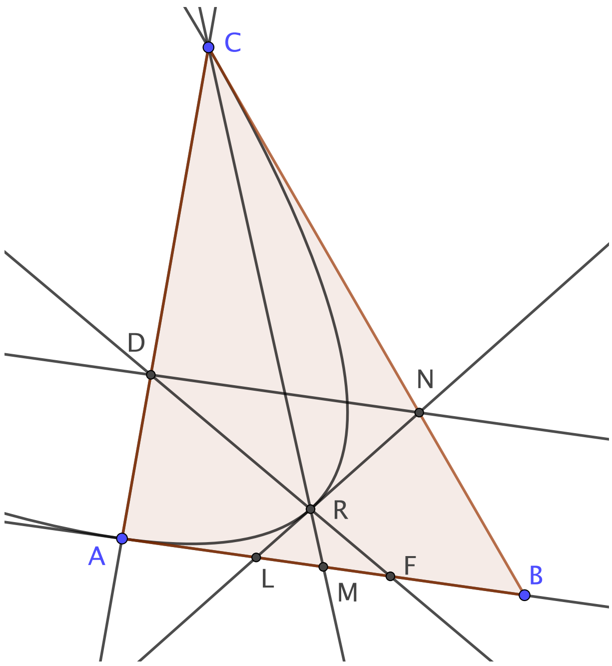

FIGURE 3 –

2.2 Calcul des aires avec le lemme fondamental

On commence par calculer l'aire du triangle CNR. Par le lemme des proportions (voir [2]) on a $\mathscr{A}(BNL) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}t = \frac{2}{9}t$ puis $\mathscr{A}(MRL) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\mathscr{A}(BNL) = \frac{1}{54}t$. On en déduit $\mathscr{A}(MRNB) = \frac{11}{54}t$ et par différence $\mathscr{A}(CNR) = \frac{1}{2}t - \frac{11}{54}t = \frac{8}{27}t$.

Reprenant les notations de 1.3.1, on considère la réunion $\mathscr{U}$ des triangles curvilignes CPQ et PQR. La médiane (CM) partage $\mathscr{U}$ en deux parties de même aire égale à $(s+m)/2$. Archimède appliqué dans CRN montre que l'on a $(s+m)/2 = \frac{2}{3}\mathscr{A}(CNR)$. On a maintenant deux équations en p et s : $s + 3p = \frac{32}{81}t$ et $s + 2p = \frac{t}{3}$ qui redonnent $p = \frac{5t}{81}$ et les autres s'ensuivent.

2.3 Preuve du lemme fondamental

Commençons par une remarque de nature affine. On considère la parallèle à (AB) passant par N. Elle coupe (AC) en D et la droite (DR) coupe (AB) en F. Dans la symétrie oblique d'axe (CM) et de direction (AB), les droites (NR) et (DR) s'échangent, de sorte que M est le milieu de $[LF]$.

On a ensuite deux lemmes concernant les coniques projectives :

2.2 Lemme. (des trois tangentes) *Soit $\mathscr{P}$ une conique, A, R, T trois points de $\mathscr{P}$. Les tangentes en R et A se coupent en L, celles en A et T se coupent en V, enfin la droite (TR) coupe la tangente en A en F. Alors, la division A, F, L, V est harmonique (i.e. on a $[\![A, F, L, V]\!] = -1$).*

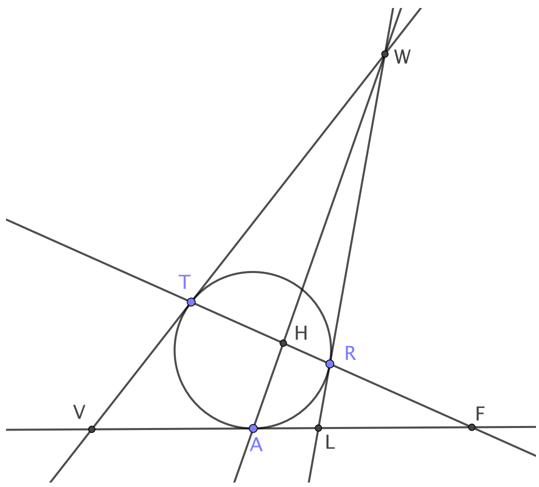

FIGURE 4 –

Démonstration. Soit W l'intersection des tangentes en R et T et H l'intersection de (TR) et de (WA). La polaire de W est la droite (TR), qui contient F, de sorte que la polaire de F passe par W. Mais elle passe aussi par A et c'est donc la droite (AW). On en déduit qu'on a $[\![H, F, R, T]\!] = -1$ et on a le résultat avec la perspective de centre W.

2.3 Lemme. (des quatre tangentes) *Soit Γ une conique et $ABCD$ un quadrilatère dont les côtés (AB), (BC), (CD) et (DA) sont respectivement tangents à Γ en M, N, P, Q. Alors, les droites (AC), (BD), (MP) et (NQ) sont concourantes.*

Démonstration. Appelons O l'intersection des droites (MP) et (NQ), E celle des droites (MN) et (PQ) et F celle de (MQ) et (NP). La construction

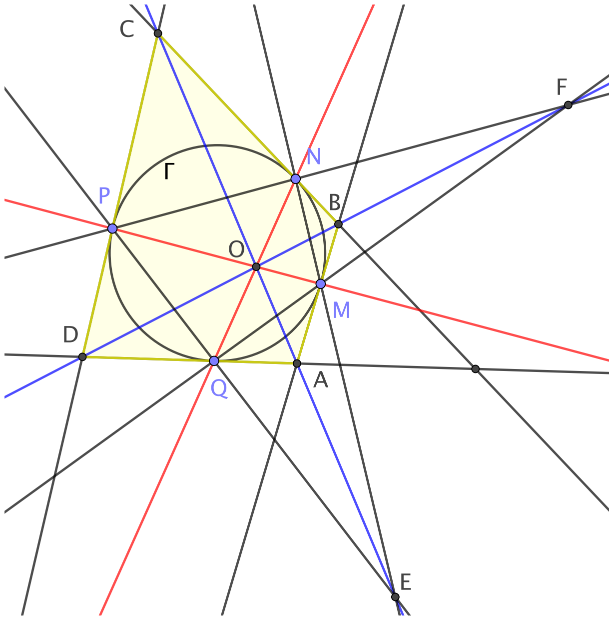

FIGURE 5 –

usuelle montre que la polaire de E par rapport à Γ est (OF) et que celle de F est (OE), de sorte que la polaire de O est (EF) et que le triangle O, E, F est autopolaire. Par ailleurs, la polaire de A par rapport à Γ est (MQ), donc elle passe par F ainsi que la polaire (PN) de C. Il en résulte que la polaire de F est (AC), de sorte que O est sur (AC) et on raisonne de même pour (BD).

Revenons à la preuve de 2.1, voir la figure projective (un peu provocatrice[5]) ci-dessous. On a un point R de la parabole $\mathscr{P}$ et sa tangente, qui coupe en N et L les droites (BC) et (AB). On appelle U, V les points à l'infini de (BC) et (AB) et T le point de contact de $\mathscr{P}$ et de D_∞. On applique le lemme du quadrilatère tangent à $NLVU$, de sorte que les droites (UL), (VN), (RT) et (AC) concourent en un point D. La perspective de centre D de (BC) sur (AB) donne l'égalité de birapports $[\![B, C, N, U]\!] = [\![B, A, V, L]\!] = [\![A, B, L, V]\!]$. La traduction affine de cette égalité est $\dfrac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}}$.

Par ailleurs, le lemme des trois tangentes montre qu'on a $[\![A, F, L, V]\!] = -1$, ce qui, comme V est à l'infini, signifie en affine que L est le milieu de $[AF]$. Comme on a $\overline{AL} = \overline{FB}$ par symétrie, on a obtenu la première assertion

5. Toutes les coniques projectives propres et non vides étant échangées par les homographies, on peut supposer qu'une telle conique est un cercle ou une parabole à notre convenance.

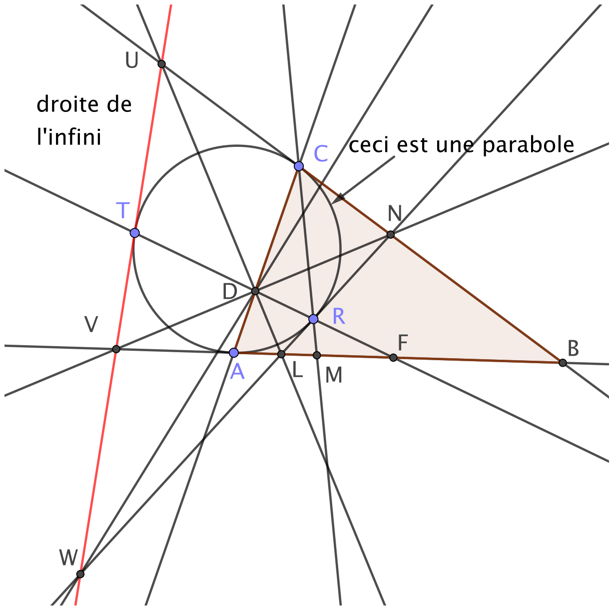

FIGURE 6 –

de 2.1.

Pour le dernier point, on revient à la figure 3. Par Thalès on a $\dfrac{\overline{RL}}{\overline{RN}} = \dfrac{\overline{LF}}{\overline{ND}}$ et on conclut en notant qu'on a $\overline{ND} = \frac{2}{3}\overline{BA}$ et $\overline{LF} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

3 Compléments

On explique ici comment construire (de deux manières) la parabole tangente à deux droites données en deux points donnés.

3.1 Un résultat sur les paraboles

3.1 Proposition. *Soit $\mathscr{P}$ une parabole et soient $A, B \in \mathscr{P}$. Les tangentes à $\mathscr{P}$ en A et B se coupent en C. Soient D et E les milieux de $[AC]$ et $[BC]$ et M le milieu de $[DE]$. On a les propriétés suivantes :*

1) La droite (CM) est parallèle à l'axe de la parabole.

2) Le point M est sur $\mathscr{P}$ et la tangente en M est la droite (DE).

Démonstration. On peut donner une preuve analytique : si $A = (a, a^2)$, $B = (b, b^2)$, on a $C = (\dfrac{a+b}{2}, ab)$. Si D, E sont les milieux de $[CA]$ et $[CB]$, le milieu de $[DE]$ est sur la parabole (c'est $(\frac{a+b}{2}, \frac{(a+b)^2}{4})$). Mais il est plus

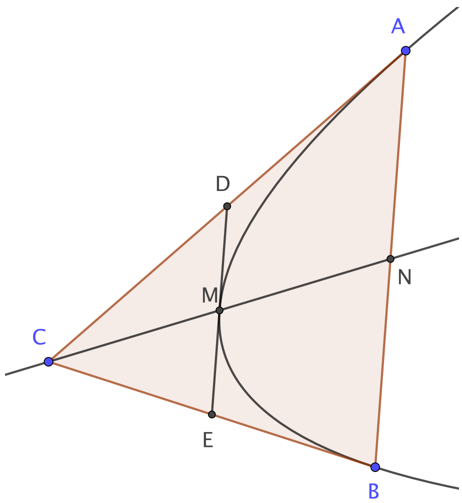

FIGURE 7 –

satisfaisant de donner une preuve projective, valable pour n'importe quelle conique. Voici le résultat.

3.2 Proposition. *Soit $\mathscr{C}$ une conique, A, B deux points de $\mathscr{C}$. Les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et B se coupent en C. Soit T une droite tangente à $\mathscr{C}$ en I. Les droites (AC), (BC) et (AB) coupent respectivement T en P, Q et J. Soit Δ la tangente à $\mathscr{C}$ issue de J autre que T. Elle coupe $\mathscr{C}$ en M et les droites (AC) et (BC) en D et E. Alors :*

1) Les points C, M, I sont alignés.

2) On a les divisions harmoniques : $[\![C, A, D, P]\!] = -1$, $[\![C, B, E, Q]\!] = -1$ et $[\![D, E, M, J]\!] = -1$.

La propriété des paraboles n'est qu'une traduction de celle-ci en prenant pour T la droite de l'infini et en se souvenant que le conjugué harmonique du point à l'infini de (AB) par rapport à A et B est leur milieu.

On se reportera à la figure 8, donnée de manière un peu provocatrice ...

La preuve est juste une question de polaires, voir [3] et [4]. On note d'abord que la polaire de C par rapport à $\mathscr{C}$ est la droite (AB) ce qui montre que C et J sont conjugués. De même, la polaire de J est (MI). Comme C et J sont conjugués, C est sur (MI) d'où le premier point. Appelons N l'intersection de (AB) et de (MI). Comme (AB) est la polaire de C on a $[\![C, N, M, I]\!] = -1$, mais aussi, par perspective, $[\![(JC), (JN), (JM), (JI)]\!] = -1$ et on obtient les deux premiers birapports annoncés par intersection du pinceau de sommet J avec les droites (CA) et (CB). Mais (CI) est la polaire

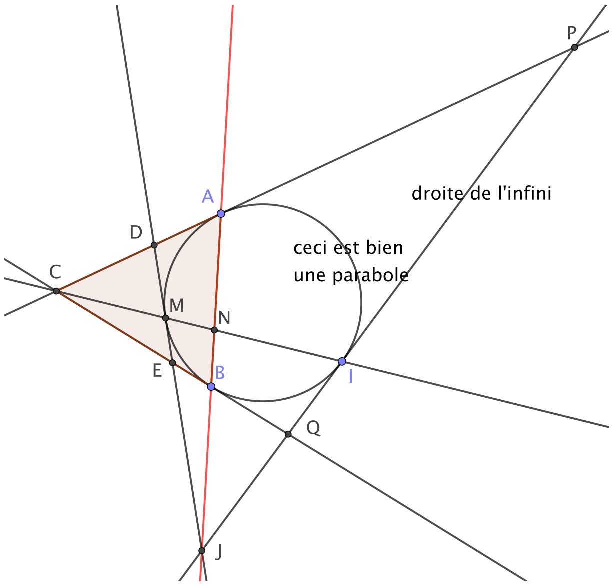

FIGURE 8 –

de J, de sorte qu'on a $[\![A, B, N, J]\!] = -1$. Par perpective, le pinceau correspondant de sommet C est harmonique, donc aussi la division qu'il découpe sur (JM) et on a le troisième birapport.

3.2 Application : une première construction

Pour construire, avec GeoGebra, la parabole tangente à (AC) en A et à (BC) en B, on utilise la proposition 3.1. Elle permet de construire un nouveau point M de la parabole et sa tangente. Mais si l'on réitère l'opération avec A, M et avec M, B on obtient deux nouveau points L et J, voir figure 9. On peut alors utiliser la macro *conique passant par cinq points* avec A, B, M, L, J et on a la construction.

3.3 Une construction par foyer et directrice

Pour déterminer le foyer de la conique donnée par deux points et deux tangentes, on utilise le théorème suivant, dû à Poncelet (voir [1] p. 298) :

3.3 Théorème. *Soit $\mathscr{P}$ une parabole de foyer F, $A, B \in \mathscr{P}$, les tangentes à $\mathscr{P}$ en A et B se coupent en C. Alors, si l'on désigne par $(C\Omega)$ la parallèle à l'axe de $\mathscr{P}$ passant par C, les droites $(CA), (CB)$ d'une part et $(CF), (C\Omega)$ d'autre part ont mêmes bissectrices.*

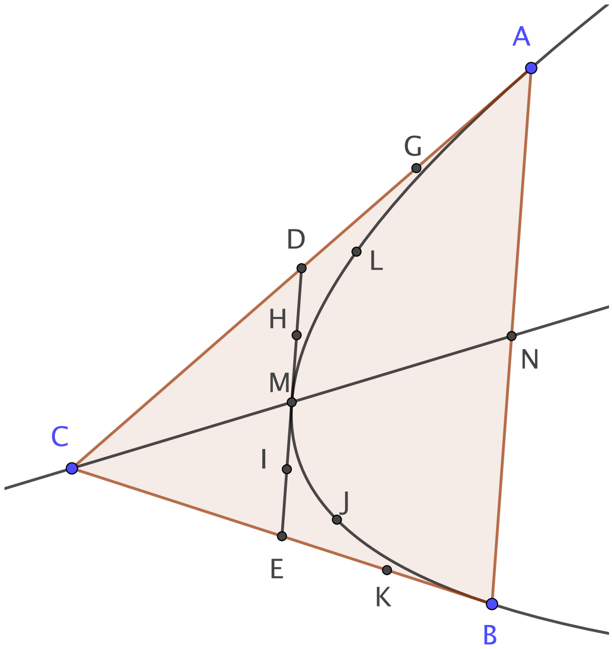

FIGURE 9 –

On en déduit la construction du foyer de la parabole $\mathscr{P}$ donnée par les points A, B et les tangentes (CA), (CB) comme suit. On construit le point M de $\mathscr{P}$ comme au paragraphe précédent. On sait alors que la droite (CM) est parallèle à l'axe de $\mathscr{P}$. On trace la bissectrice intérieure Δ de $\widehat{ACB}$, puis la droite symétrique de (CM) par rapport à Δ. Le foyer est sur cette droite. Pour obtenir une deuxième droite on réitère l'opération avec les tangentes (DM) et (DA). Il reste à trouver la directrice. C'est une droite perpendiculaire à l'axe. De plus, elle est tangente au cercle de centre A qui passe par F, ce qui achève la construction.

Sur la figure 10 les droites vertes sont parallèles à l'axe, les bleues sont les bissectrices de $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADM}$ et les oranges, qui sont les symétriques des vertes par rapport aux bleues, se coupent en F.

Références

[1] Deltheil Robert et Caire Daniel, *Géométrie, classe de mathématiques*, Jacques Gabay, Paris, 1989.

[2] Perrin Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini, Paris, 2011.

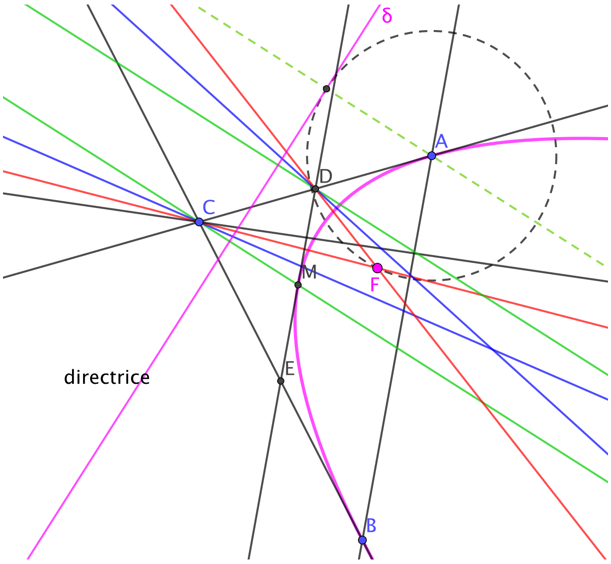

FIGURE 10 – La construction par foyer et directrice

[3] Perrin Daniel *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Géométrie projective linéaire*, 2014.
http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie1.pdf

[4] Perrin Daniel, *La géométrie d'une forme quadratique, premier épisode : la conique*, 2014.
https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie3.pdf