Le pentagone à côtés égaux

Daniel PERRIN

Introduction

Le problème abordé ici est posé dans le numéro 541 de *Au fil des maths* (problème 542-4) :

Un triangle isocèle ABC étant donné, trouver sur sa base $[BC]$ deux points D, E et sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ deux points F, G tels que le pentagone $AFDEG$ ait ses côtés égaux.

Une première discussion est nécessaire. Il est tentant de prendre les points D, E d'une part et F, G d'autre part, symétriques par rapport à la médiatrice Δ de $[BC]$. De fait, pour F et G, comme on doit avoir $AF = AG$, ces points sont obligatoirement symétriques par rapport à Δ. En revanche, pour D, E ce n'est pas automatique.

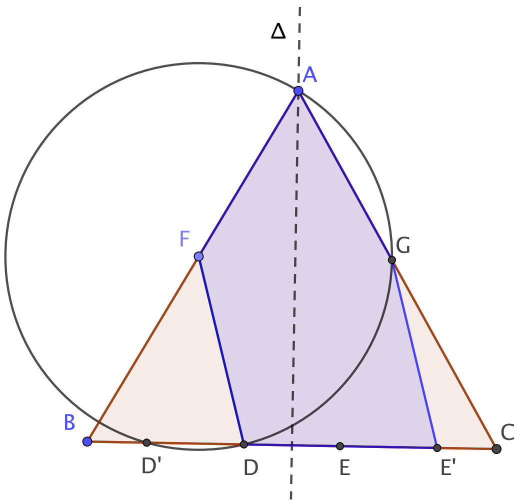

FIGURE 1 –

En effet, les triangles FBD et GEC ont bien deux côtés égaux ($FD = GE$ et $FB = GC$ par différence) et un angle égal ($\widehat{B} = \widehat{C}$) mais l'angle n'est pas compris entre les côtés, on est dans le cas "frauduleux" d'application du cas d'égalité CAC. Le cercle de centre F et de rayon AF peut couper $[BC]$ en deux points D, D' et de même pour le cercle de centre G de même rayon qui coupe $[BC]$ en E, E', avec D, E (resp. D', E') symétriques par rapport à Δ. On note qu'alors $FDE'G$ est un parallélogramme. En effet on passe de $[FD]$ à $[GE']$ par la composée de deux symétries d'axes parallèles à Δ, donc par une translation. Si le pentagone $AFDE'G$ a ses côtés égaux, on a donc $DE' = FG = AF = AG$ et le triangle AFG est équilatéral, donc aussi ABC (isocèle avec un angle de 60°). Ce cas ne peut donc se produire que si ABC est équilatéral. Dans ce cas il y a une infinité de solutions obtenues en prenant un point F (resp. G) sur $[AB]$ (resp. $[AC]$), à la distance d de A, puis en construisant D avec $FD = d$ et E' pour compléter le parallélogramme. Si l'on pose $c = AB$ la condition d'existence de la solution est $(2\sqrt{3} - 3)c \simeq 0.4641c < d < c/2 = 0.5c$.

Ce cas étant écarté, on cherche désormais un pentagone symétrique par rapport à Δ.

1 Par le calcul

On prend un repère d'origine O milieu de $[BC]$, d'axe des x porté par (BC) et d'axe des y porté par la hauteur issue de A. On pose $A = (0, a)$, $B = (-b, 0)$, $C = (b, 0)$ et on cherche les points $D = (-z, 0)$, $E = (z, 0)$, $F = (-x, y)$ et $G = (x, y)$.

On a aussitôt la relation (1) : $y = -\frac{a}{b}x + a$ et les équations (2) donnant les longueurs égales : $x^2 + (a-y)^2 = 4z^2 = (x-z)^2 + y^2$. En remplaçant y par la valeur fournie par (1) dans la première égalité de (2) on en déduit $4z^2 = \dfrac{a^2+b^2}{b^2}x^2$, donc, en posant $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $z = \dfrac{cx}{2b}\cdot$ La deuxième égalité de (2) conduit alors à une équation du second degré en x :

$$x^2(a^2 + b^2 - 4bc) - 8a^2bx + 4a^2b^2 = 0$$

dont le discriminant réduit est $\Delta' = 4a^2b^2d$ avec $d = 3a^2 - b^2 + 4bc$ et on trouve ainsi $x = \dfrac{4a^2b \pm 2ab\sqrt{d}}{a^2+b^2-4bc}$ et $z = \dfrac{2a^2c \pm ac\sqrt{d}}{a^2+b^2-4bc}$, puis y. Dans le cas de la figure 2 ci-dessous on a $a = 1.14591$, $b = 0.61354$ et on trouve $2z = 0.60914$. On vérifie que seuls les signes $-$ conviennent et que la condition d'existence des solutions est $a < b\sqrt{15}$, le cas limite correspondant à un triangle isocèle dont les côtés égaux sont doubles de la base.

Comme la solution est donnée par des équations du second degré, elle est constructible, ce que nous allons vérifier directement.

2 Une construction

La méthode est classique : il s'agit d'abandonner l'une des contraintes de l'énoncé pour effectuer la construction et de revenir à la situation initiale par une transformation, ici une homothétie.

On part du triangle ABC donné. On considère une longueur $\lambda > 0$ quelconque et on porte sur les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ des points F_1 et G_1 tels que $AF_1 = AG_1 = \lambda$. On trace les cercles Γ_F et Γ_G de centres F_1 et G_1 et de rayon λ. On trace la bissectrice Δ de $\widehat{A}$ et on prend un point M quelconque dessus, puis on mène par M la perpendiculaire à Δ et sur cette perpendiculaire on construit D_0, E_0 symétriques par rapport à M, avec D_0 dans le demi-plan limité par Δ qui contient B et tels que $MD_0 = ME_0 = \delta/2$. On mène par D_0 et E_0 les parallèles à Δ. Elles coupent Γ_F et Γ_G en D_1 et E_1 dans le demi-plan limité par la droite des centres qui ne contient pas A. Le pentagone $\mathscr{P}_1 := AF_1D_1E_1G_1$ a ses côtés égaux. On appelle B_1, C_1 les intersections de (D_1E_1) avec $[AB)$ et $[AC)$. On effectue l'homothétie de centre A et de rapport AB/AB_1. Le pentagone $\mathscr{P}_1$ devient $AFDEG$ (on construit d'abord D, E alignés avec A, D_1 et A, E_1 puis les autres grâce au parallélisme [1]) qui est le pentagone cherché.

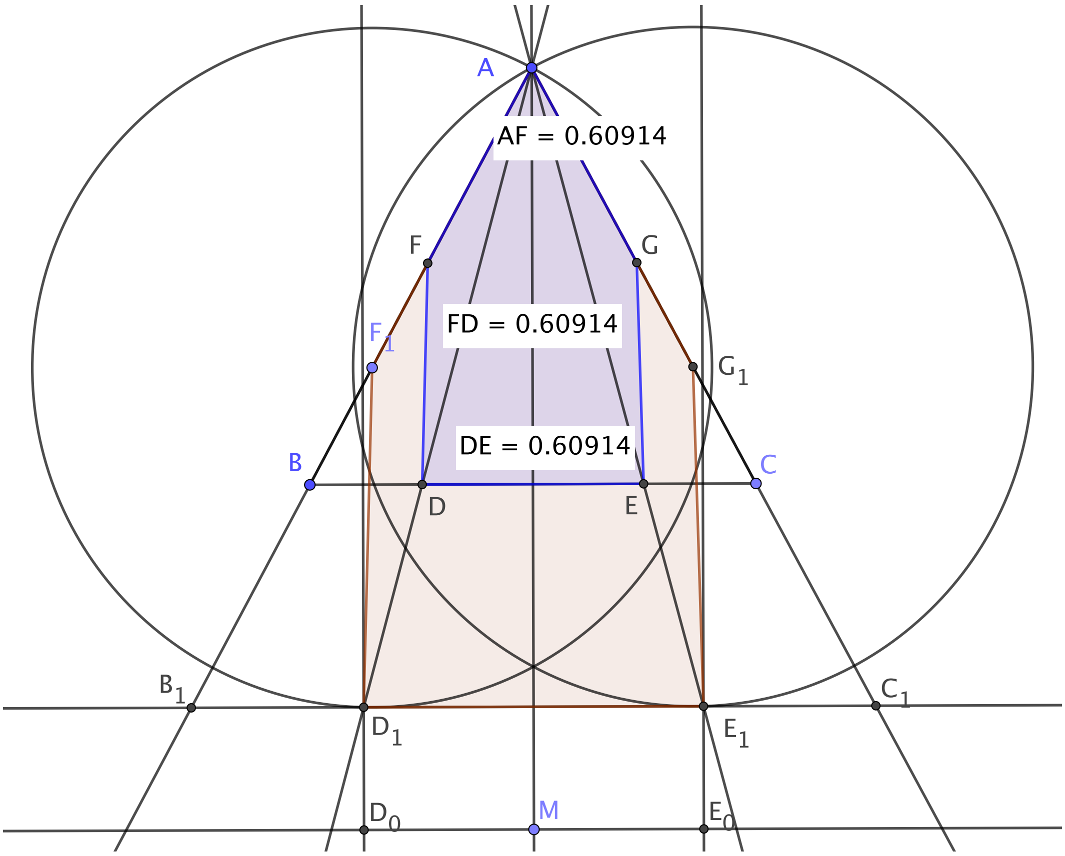

FIGURE 2 –

1. Attention, le report de longueur peut donner une solution parasite.