

Le problème de Jean-Pierre Friedelmeyer

Daniel PERRIN

Introduction

Le problème abordé ici est posé dans le numéro 539 de la revue *Au fil des maths* de l'APMEP (problème 539-4). J'en ai un peu modifié les notations, voir figure 1. Dans ce qui suit, je donne en général deux solutions pour chaque question, l'une élémentaire, voire calculatoire, l'autre plus savante. Pour cette deuxième version des choses on pourra se reporter à la Partie III de mon projet de livre de géométrie projective, voir :

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartie3.pdf> citée [DP] ci-dessous.

1 Données

On considère la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2 - \sqrt{2}$ et le cercle \mathcal{U} d'équation $x^2 + y^2 = 1$. On note que \mathcal{P} est contenue dans l'extérieur de \mathcal{U} (si $(x, y = x^2 - \sqrt{2})$ est un point de \mathcal{P} on a $x^2 + y^2 > 1$). On part d'un point $A \in \mathcal{P}$. Les tangentes à \mathcal{U} issues de A recoupent \mathcal{P} en B et D . Les tangentes à \mathcal{U} issues de B et D (autres que (BA) et (DA)) se coupent en C . On note M, N, P, Q les points de contact de \mathcal{U} et des droites (AB) , (BC) , (CD) , (DA) respectivement.

2 Question 1

Il s'agit de montrer que C est sur \mathcal{P} , autrement dit que le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans \mathcal{P} et circonscrit à \mathcal{U} .

2.1 Version élémentaire

On part de deux points de \mathcal{P} , $A = (a, a^2 - \sqrt{2})$ et $B = (b, b^2 - \sqrt{2})$. La droite (AB) a pour équation $Y = (a^2 - \sqrt{2}) + (b + a)(X - a)$. On calcule les intersections de \mathcal{U} et de cette droite en reportant Y dans $X^2 + Y^2 - 1 = 0$. Posant $X' = X - a$ on trouve l'équation du second degré :

$$X'^2(1 + (b + a)^2) + 2X'(a + (b + a)(a^2 - \sqrt{2})) + a^2 + (a^2 - \sqrt{2})^2 - 1 = 0.$$

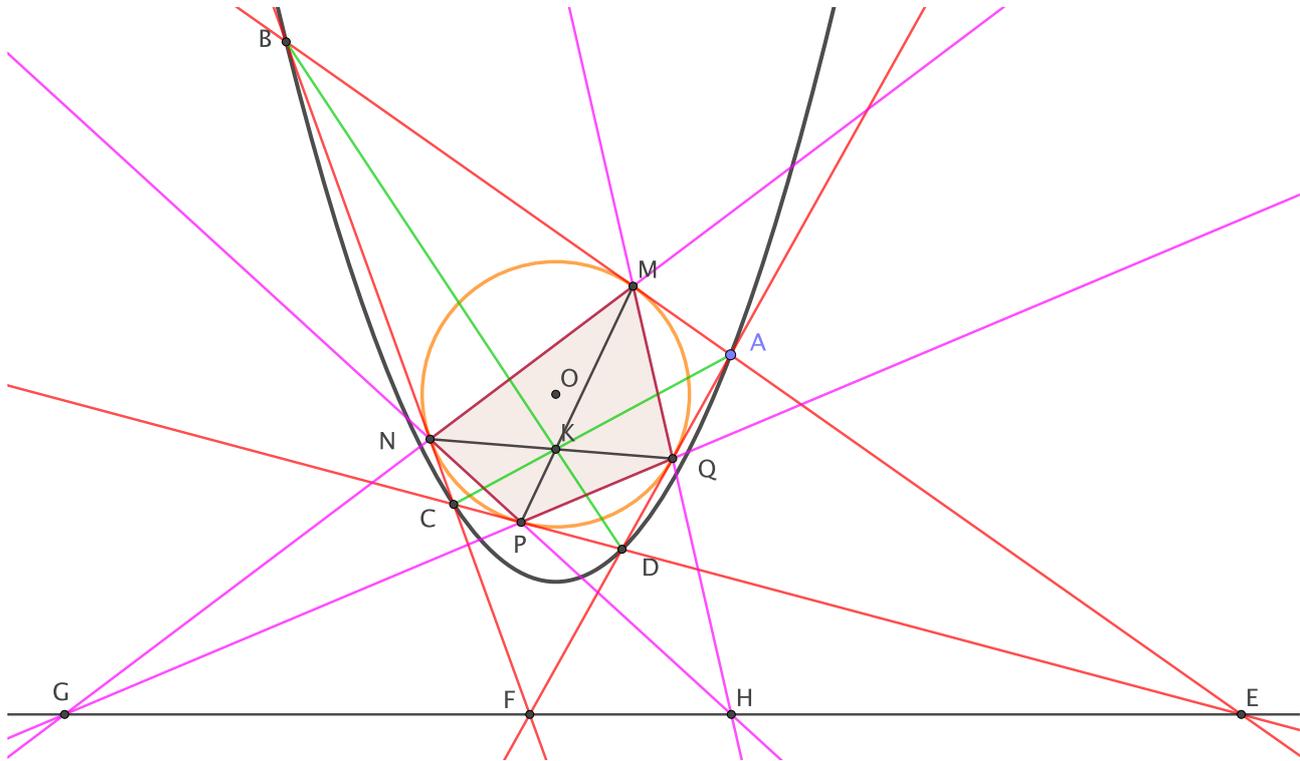


FIGURE 1 –

Le discriminant réduit de cette équation vaut :

$$\Delta' = b^2(1 - a^2) + 2ab(1 - \sqrt{2}) + a^2 - 1$$

et dire que la droite est tangente au cercle c'est dire qu'on a $\Delta' = 0$. Pour A fixé on trouve deux solutions b et d qui donnent deux points $B, D \in \mathcal{P}$. On note astucieusement¹ que si l'on change a en $c = -1/a$, l'équation du second degré en b obtenue est la même. Cela signifie que les deux tangentes à \mathcal{U} issues de $C' = (c, c^2 - \sqrt{2}) \in \mathcal{P}$ sont $(C'B)$ et $(C'D)$, autrement dit que les tangentes à \mathcal{U} issues de B et D se coupent en $C' = C$ qui est sur \mathcal{P} : cqfd.

2.2 Avec Poncelet

Il s'agit du grand théorème de Poncelet, voir [DP] §4.5. Il suffit de montrer que la propriété est vraie pour une position particulière A_0 de A sur \mathcal{P} . On

1. Il y a un grave délit d'initié ici. C'est parce que l'on sait que la droite (AC) passe par K que l'on trouve cette valeur.

fait le calcul² en prenant pour A_0 le sommet de la parabole, $A_0 = (0, -\sqrt{2})$. Les droites passant par A_0 ont pour équations $y = \alpha x - \sqrt{2}$. Dire qu'une telle droite est tangente à \mathcal{U} signifie que l'équation $(1 + \alpha^2)x^2 - 2\sqrt{2}\alpha x + 1 = 0$ admet une racine double, ce qui donne $\alpha = \pm 1$. On a deux tangentes symétriques par rapport à l'axe des y qui recouperont \mathcal{P} en $B_0 = (1, 1 - \sqrt{2})$ et $D_0 = (-1, 1 - \sqrt{2})$. Les tangentes au cercle issues de ces points sont les droites verticales $x = \pm 1$ qui se coupent en le point à l'infini C_0 de \mathcal{P} de coordonnées homogènes $(0, 1, 0)$.

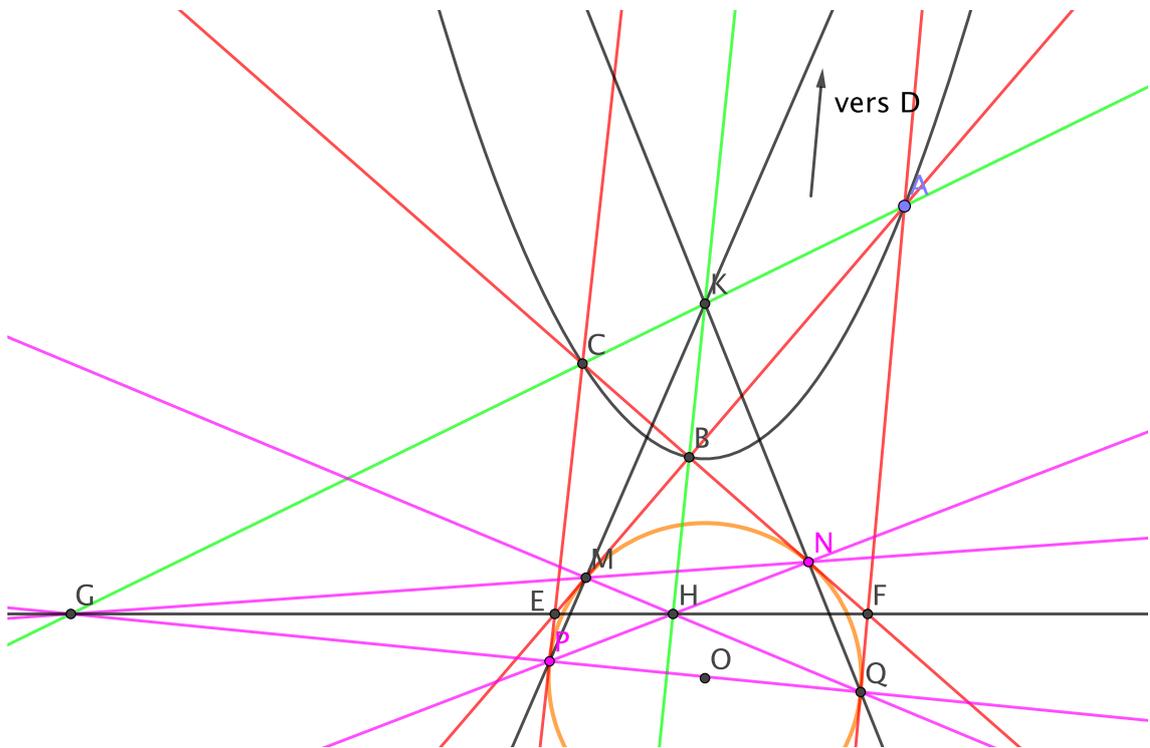


FIGURE 2 – Avec la parabole $y = x^2 + \sqrt{2}$

3 Question 2

Il s'agit de montrer que lorsque A varie sur \mathcal{P} les diagonales (AC) et (BD) de $ABCD$ se coupent en un point fixe K situé sur l'axe de la parabole.

2. Avec cette méthode on voit qu'il n'y a que deux paraboles d'équations $y = x^2 - k$ ont avec \mathcal{U} une ligne de Poncelet pour $n = 4$, l'autre étant $y = x^2 + \sqrt{2}$, voir figure 2.

3.1 Version élémentaire

Si l'on part d'un point $A \in \mathcal{P}$ et qu'on effectue la construction précédente, on obtient les points B, C, D de \mathcal{P} et on a vu que si A a pour abscisse a , C a pour abscisse $c = -1/a$. De même, si b est l'abscisse de B , celle de D est $-1/b$. On vérifie alors que la droite (AC) passe par le point $K = (0, 1 - \sqrt{2})$. Mais, comme ce point est indépendant de a , cela vaut pour tout point de \mathcal{P} et notamment pour B , de sorte que K est sur (BD) .

3.2 Involutions et points de Frégier

3.2.1 Rappel

Si \mathcal{P} est une conique et K un point n'appartenant pas à \mathcal{P} , l'involution de point de Frégier K de \mathcal{P} associe à un point M de \mathcal{P} le point où la droite (KM) recoupe \mathcal{P} . C'est une involution au sens ensembliste, mais aussi une homographie, voir [DP] 3.3.2, et toute involution de \mathcal{P} est de ce type.

3.2.2 La question 2

3.1 Lemme. *Avec les notations précédentes, l'application i de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à un point A associe le point C construit comme ci-dessus est une involution (homographique) de \mathcal{P} .*

Démonstration. Le calcul effectué ci-dessus donne le résultat. En effet, on identifie \mathcal{P} à la droite projective \mathbf{P}^1 en envoyant $(a, a^2 - \sqrt{2})$ sur a (et le point à l'infini de \mathcal{P} sur ∞) et l'application qui à A associe C est l'involution $a \mapsto -1/a$ comme on l'a vu.

On en déduit la réponse à la question 2. On note que l'involution i vue en 3.1 a pour point de Frégier $K = (0, 1 - \sqrt{2})$. Pour le voir on utilise les points déjà vus à la question 1) : $A_0 = (0, -\sqrt{2})$ et C_0 à l'infini, ainsi que $B_0 = (1, 1 - \sqrt{2})$ et $D_0 = (-1, 1 - \sqrt{2})$. On voit que les droites (A_0C_0) (l'axe des y) et (B_0D_0) (la droite $y = 1 - \sqrt{2}$) se coupent en K . On en déduit que, pour tout $A \in \mathcal{P}$, (AC) et (BD) se coupent en K .

3.2.3 Un lemme général

On a un résultat plus général qui permettra d'étendre 2), voir 7.1. :

3.2 Lemme. *Soient \mathcal{P} et \mathcal{U} deux coniques vérifiant le théorème de Poncelet pour des lignes polygonales inscrites-circonscrites à $2n$ côtés $A_1A_2 \dots A_{2n}$, $A_i \in \mathcal{P}$ l'application qui à un point A_i de \mathcal{P} associe le point "opposé" A_{n+i} est une involution homographique.*

Démonstration. Ce lemme n'est pas évident et je me contente d'en esquisser une preuve dans le cas particulier de 3.1.

Il est clair que i est une involution au sens ensembliste mais il faut montrer que c'est une homographie. La difficulté, toujours présente dans la situation du théorème de Poncelet, c'est que, comme l'âne de Buridan, on ne sait pas dans quel sens partir et, de fait, si l'on considère l'application qui à A associe le point où la tangente à \mathcal{U} issue de A recoupe \mathcal{P} , elle n'est pas bien définie. En effet, il faut choisir dans quel sens on part et, selon le cas, on obtient B ou D . Sur \mathbf{R} on peut sans doute le faire avec un argument d'ordre, mais de toute manière l'application sera algébrique et pas rationnelle³.

Voici, brièvement, l'argument qui permet de montrer ce lemme. On considère la sous-variété d'incidence V de $\mathcal{P} \times \mathcal{U}^*$ formée des couples (A, d) où A est un point de \mathcal{P} et d une tangente à \mathcal{U} avec $A \in d$. On montre, cf. [DP] §4.5, que cette variété est une courbe elliptique. L'application de Poncelet F de V dans V associe à (A, d) le couple (B, d') où B est la deuxième intersection de \mathcal{P} et d et d' la deuxième tangente à \mathcal{U} issue de B . Cette application est un morphisme de V dans V , voir [DP] 4.6.12 (mais elle ne définit pas un morphisme de \mathcal{P} dans \mathcal{P}). Cependant, lorsqu'on est dans la situation du théorème de Poncelet avec des lignes polygonales à un nombre **pair** $2n$ de côtés, l'application F^n définit une application $i : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ (car c'est la même chose de partir dans un sens ou dans l'autre), qui est un morphisme, et i est un automorphisme de $\mathcal{P} \simeq \mathbf{P}^1$, donc une homographie⁴.

3.2.4 Bonus : une autre involution

En fait – même si ce n'était pas demandé dans l'énoncé – on constate que non seulement (AC) et (BD) se coupent en le point fixe K lorsque A varie sur \mathcal{P} , mais aussi (MP) et (NQ) (autrement dit, K est aussi le point de Frégier d'une involution du cercle). Le lemme général qui gouverne cette situation est le suivant :

3.3 Lemme. *Soient \mathcal{P} et \mathcal{U} deux coniques vérifiant le théorème de Poncelet pour des lignes polygonales inscrites-circonscrites à $2n$ côtés $A_1A_2 \dots A_{2n}$, $A_i \in \mathcal{P}$. On note M_1, M_2, \dots, M_{2n} les contacts des côtés avec \mathcal{U} . Alors l'application qui à un point M_i de \mathcal{U} associe le point "opposé" M_{n+i} est une involution homographique dont le point de Frégier est le même que celui de l'involution définie en 3.2.*

Démonstration. On se contente de montrer ce lemme dans le cas des coniques initiales, mais le cas général devrait être analogue.

3. Précisément, on a $b = \frac{a(\sqrt{2}-1) \pm \sqrt{a^4 + a^2(1-2\sqrt{2}) + 1}}{1-a^2}$.

4. Voir par exemple R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Ch. I, Exercice 6.6

On considère l'involution i de \mathcal{P} définie en 3.2. On sait que les involutions d'une conique sont restrictions d'homographies du plan, voir [DP] §3.2. Notons f l'homographie en question. Pour tout point A de \mathcal{P} , avec les notations précédentes, elle échange A, C et B, D . Comme elle conserve \mathcal{P} , elle échange aussi les tangentes (AB) et (CD) ou (AD) et (BC) . Par ailleurs, l'image $f(\mathcal{U})$ est une conique, tangente aux droites images, donc à (AB) , (AD) , (BC) , (BD) . Comme cela vaut pour tous les points A de \mathcal{P} , cela montre que l'on a $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ (une conique propre est définie par cinq de ses tangentes). De plus, la restriction de f à \mathcal{U} échange les contacts des tangentes : $f(M) = P$ et $f(N) = Q$. La restriction de f à \mathcal{U} est donc une involution j de \mathcal{U} . Il résulte alors de [DP] 3.3.8 que les points de Frégier de i et j sont les mêmes.

On peut d'ailleurs retrouver ce fait en explicitant f . On considère les couples de points⁵ qui s'échangent $(0, -\sqrt{2}, 1)$ et $(0, 1, 0)$ d'une part et $(1, 1 - \sqrt{2}, 1)$ et $(-1, 1 - \sqrt{2}, 1)$ d'autre part, on voit que l'on a $f(x, y, t) = (-x, -\sqrt{2}y - t, y + \sqrt{2}t)$, de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et on vérifie que f est une involution qui conserve à la fois la parabole \mathcal{P} et le cercle \mathcal{U} . On vérifie aussi que $K = (0, 1 - \sqrt{2}, 1)$ est fixe par f et que, pour tout $M = (x, y, t)$ les points $K, M, f(M)$ sont alignés. Cela signifie que le point de Frégier de j est aussi K donc que (MP) et (NQ) passent par K .

4 Question 3

Les droites (AB) et (CD) (resp. (AD) et (BC) , resp. (MN) et (PQ) , resp. (MQ) et (NP)) se coupent en E (resp. F , resp. G , resp. H). Il s'agit de montrer que E, F, G, H sont alignés.

4.1 Solution de la question 3

Cette solution était élémentaire autrefois quand les lycéens connaissaient la division harmonique, la conjugaison et la polaire. De nos jours il peut être utile de rappeler quelques points, voir l'annexe 6.

On considère le point d'intersection⁶ L de (MP) et (NQ) . La polaire de L par rapport à \mathcal{U} peut être déterminée de deux manières : avec les quadrilatères ou avec les tangentes. Précisément, dans le cas présent, la construction avec les tangentes montre que la polaire de E est (MP) et que celle de F est (NQ) . Comme ces droites se coupent en L , la réciprocity polaire montre que

5. Du plan projectif.

6. On a vu qu'on a $L = K$ mais on n'en a pas besoin ici.

la polaire de L est (EF) . La construction avec le quadrilatère montre que la polaire de G contient L , de même que celle de H . On en déduit que la polaire de L est (GH) et les points E, F, G, H sont alignés sur la polaire de L par rapport à \mathcal{U} .

5 Retour sur l'égalité $K = L$

On donne deux autres méthodes pour montrer que les points L , intersection de (MP) et (NQ) , et K , intersection de (AC) et (BD) , sont égaux.

5.1 Calcul des polaires

La construction de la polaire avec les quadrilatères montre que la droite (EF) est aussi la polaire de K par rapport à \mathcal{P} . Or on a le lemme suivant :

5.1 Lemme. *La polaire de $K = (0, 1 - \sqrt{2})$ par rapport à \mathcal{P} comme par rapport à \mathcal{U} est la droite $y = -1 - \sqrt{2}$.*

Démonstration. On sait que la polaire s'obtient par dédoublement : si Γ est une conique d'équation : $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + 2\delta x + 2\epsilon y + \eta = 0$, la polaire de (a, b) par rapport à Γ a pour équation $\alpha ax + \beta by + \gamma(ay + bx) + \delta(x + a) + \epsilon(y + b) + \eta = 0$. Dans notre cas, la polaire de (a, b) par rapport à \mathcal{U} a pour équation $ax + by - 1 = 0$ et celle de (a, b) par rapport à \mathcal{P} a pour équation $\frac{1}{2}(y + b) - ax + \sqrt{2} = 0$. On vérifie qu'avec $(a, b) = (0, 1 - \sqrt{2})$ on obtient la même droite.

Comme la polaire de K et la polaire de L par rapport à \mathcal{U} sont égales, on en déduit $K = L$.

5.2 Calcul des intersections

5.2.1 Le principe

Cette constatation que le point K a même polaire par rapport à \mathcal{P} et \mathcal{U} conduit à analyser un peu cette situation. L'idée est bien simple :

5.2 Lemme. *Soient \mathcal{U} et \mathcal{P} deux coniques transverses et m, n, p, q leurs points d'intersection. On note u, v, w les points d'intersection de (mn) et (pq) ; (mp) et (nq) ; (mq) et (np) respectivement. Alors les points u, v, w ont pour polaires (vw) , (wu) et (uv) respectivement, à la fois pour \mathcal{U} et pour \mathcal{P} .*

Démonstration. Vu la construction de la polaire "par les quadrilatères" c'est évident sur la figure ci-dessous.

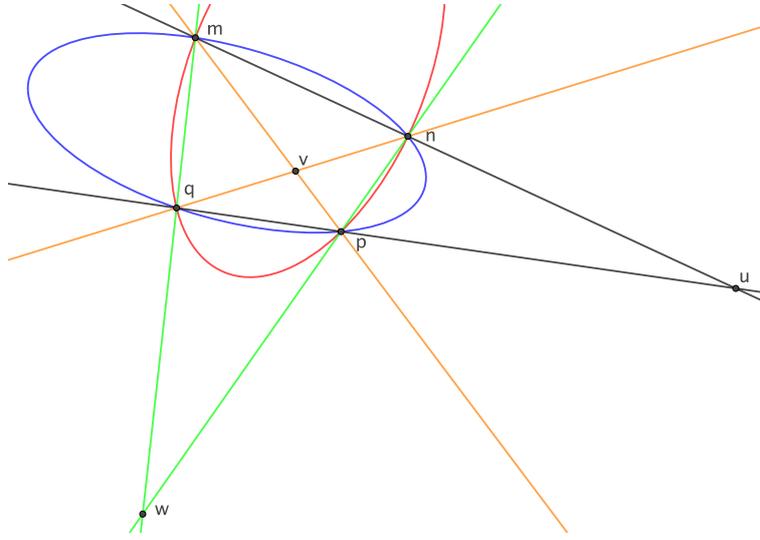


FIGURE 3 –

5.3 Remarque. Le triangle u, v, w est un triangle autopolaire pour les deux coniques. Sur un corps algébriquement clos, en incluant le triangle autopolaire commun dans un repère : $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$, on peut écrire les coniques sous la forme $x^2 + y^2 + t^2 = 0$ et $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma t^2 = 0$ avec α, β, γ distincts et les points m, n, p, q sont alors les points $(\pm\xi, \pm\eta, \zeta)$ avec $\xi^2 = \gamma - \beta$, $\eta^2 = \alpha - \gamma$ et $\zeta^2 = \beta - \alpha$. On vérifie facilement que les seuls points qui ont même polaire pour les deux coniques sont u, v, w . Dans notre cas, le point K doit donc être un de ces points, ce que nous vérifions maintenant.

5.2.2 Les intersections

On revient à la situation initiale et on cherche les points d'intersection m, n, p, q de \mathcal{U} et \mathcal{P} . Bien entendu, ils vont être complexes, mais le triangle autopolaire u, v, w sera réel. Pour un point d'intersection (x, y) , on a $x^2 + y^2 = 1$ et $y = x^2 - \sqrt{2}$ donc $x^2 + (x^2 - \sqrt{2})^2 - 1 = 0$, ce qui donne $x^4 + (1 - 2\sqrt{2})x^2 + 1 = 0$, équation de discriminant $\Delta = (1 - 2\sqrt{2})^2 - 4 = 5 - 4\sqrt{2}$. Ce discriminant est négatif et on pose $\Delta = -\delta^2$. Les x d'intersection sont les racines carrées de $x^2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\delta}{2}$ et $\bar{x}^2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\delta}{2}$. Il y a quatre racines distinctes $x, -x, \bar{x}$ et $-\bar{x}$, qui donnent deux valeurs de y seulement $y = x^2 - \sqrt{2}$ et $\bar{y} = \bar{x}^2 - \sqrt{2}$, donc $y = -\frac{1}{2} + i\frac{\delta}{2}$ et $\bar{y} = -\frac{1}{2} - i\frac{\delta}{2}$. On a ainsi quatre points d'intersection de \mathcal{U} et \mathcal{P} , en projectif complexe : $m = (x, y, 1)$, $n = (-x, y, 1)$, $p = (\bar{x}, \bar{y}, 1)$ et $q = (-\bar{x}, \bar{y}, 1)$.

On peut préciser un peu les valeurs de x et y . On pose $x = \alpha + i\beta$ (avec α, β

réels) donc $\bar{x} = \alpha - i\beta$. On écrit $x^2 = (\alpha + i\beta)^2 = 2\sqrt{2} - 1 + i\delta$, ce qui donne $\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ et $2\alpha\beta = \frac{\delta}{2}$. On a l'équation $16\alpha^4 + 8\alpha^2(1 - 2\sqrt{2}) + 5 - 4\sqrt{2} = 0$. Le discriminant est 64, l'unique racine positive est $\alpha^2 = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$ et on en déduit $\beta^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}$.

On cherche maintenant les points d'intersection des droites joignant m, n, p, q .

- $(mn) \cap (pq)$ L'équation de (mn) est $Y = yT$, celle de (pq) , $Y = \bar{y}T$ et leur intersection $u = (1, 0, 0)$.

- $(mp) \cap (nq)$ L'équation de (mp) est $(\bar{x} - x)Y - (\bar{y} - y)X + (x\bar{y} - y\bar{x})T = 0$ et celle de (nq) est $(\bar{x} - x)Y + (\bar{y} - y)X + (x\bar{y} - y\bar{x})T = 0$. En faisant la différence, on voit qu'on a $X = 0$ et il s'ensuit $Y = \frac{y\bar{x} - x\bar{y}}{\bar{x} - x}$. On pose

$v = (0, Y)$. Un calcul facile donne $Y = -\frac{\alpha\delta}{2\beta} - \frac{1}{2}$ mais on a $\delta = 4\alpha\beta$, d'où $Y = -2\alpha^2 - \frac{1}{2} = 1 - \sqrt{2}$

- $(mq) \cap (np)$. L'équation de (mq) est $(x + \bar{x})Y + (\bar{y} - y)X - (x\bar{y} + y\bar{x})T = 0$ et celle de (np) est $(x + \bar{x})Y + (y - \bar{y})X - (x\bar{y} + y\bar{x})T = 0$. Par différence on trouve $X = 0$ et donc $Y = \frac{x\bar{y} + y\bar{x}}{x + \bar{x}} = -1 - \sqrt{2}$.

En conclusion, on a montré :

5.4 Proposition. *Le triangle autopolaire u, v, w associé à \mathcal{U} et \mathcal{P} est formé des points $u = (1, 0, 0)$, $v = K = (0, 1 - \sqrt{2}, 1)$ et $w = (0, -1 - \sqrt{2}, 1)$.*

La figure ci-dessous résume toutes les propriétés. C'est la même que la figure 1 mais où l'on a rendu réelles les intersections des coniques. On voit que K est l'intersection des droites (AC) , (BD) , (MP) , (NQ) , (mp) et (nq) .

6 Annexe

Je rappelle brièvement les propriétés de la conjugaison et de la polaire par rapport à un cercle utilisées ci-dessus.

Soit Γ un cercle de centre O . Deux points A, B distincts non situés sur Γ sont dits **conjugués** par rapport par rapport à Γ si la droite (AB) coupe Γ en des points M, N tels que l'on ait $\llbracket A, B, M, N \rrbracket = -1$ (division harmonique). Cette propriété est évidemment symétrique. L'ensemble des points conjugués de A est une droite appelée **polaire** de A par rapport à Γ . La propriété de réciprocité polaire traduit la symétrie : si la polaire de A passe par B , la polaire de B passe par A .

La construction de la polaire se fait de deux manières, voir figure 5 :

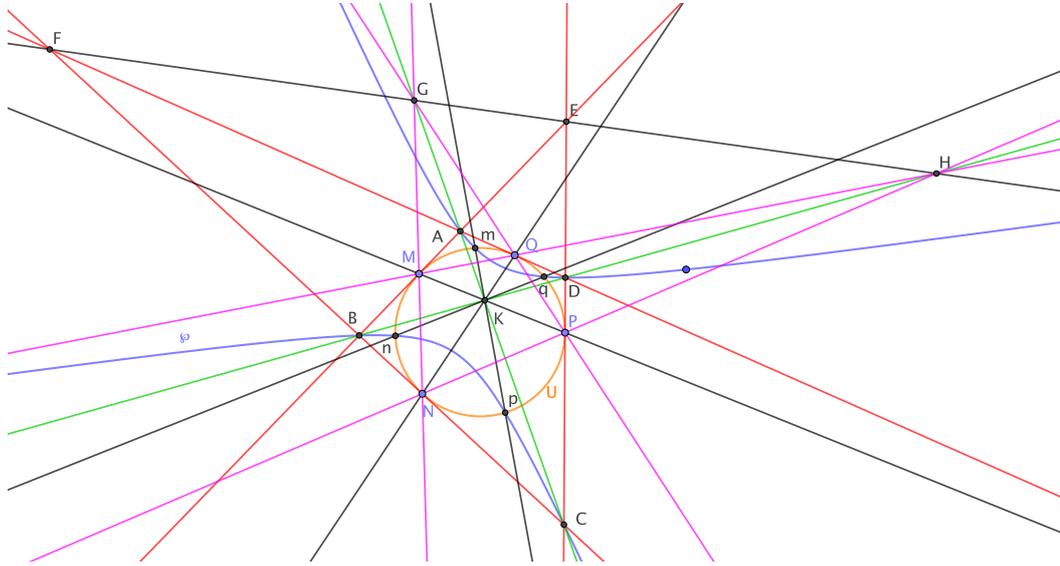


FIGURE 4 –

- **Par les tangentes** Si A est extérieur au cercle et si les tangentes à Γ issues de A sont (AT) et (AU) où T, U désignent les contacts, la polaire est la droite (TU) .

- **Par les quadrilatères** Si deux droites passant par A coupent respectivement Γ en P, Q et R, S , le point d'intersection de (QR) et (PS) est sur la polaire.

6.1 Remarque. En fait, comme toutes les propriétés évoquées ici sont projectives, tout ce qui précède vaut pour une conique quelconque, voir [DP] §2.3 et la Partie I Ch. 3 pour les propriétés des divisions harmoniques :

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPartiel.pdf>

7 Généralisation

Avec les deux lemmes 3.2 et 3.3, on a le théorème suivant ⁷ :

7.1 Théorème. Soient \mathcal{P} et \mathcal{U} deux coniques vérifiant le théorème de Poncelet pour des lignes polygonales à $2n$ côtés $A_1A_2 \dots A_{2n}$, $A_i \in \mathcal{P}$. On note

7. Attention, je n'ai pas écrit tous les détails, mais il doit suffire de copier ce qui précède.

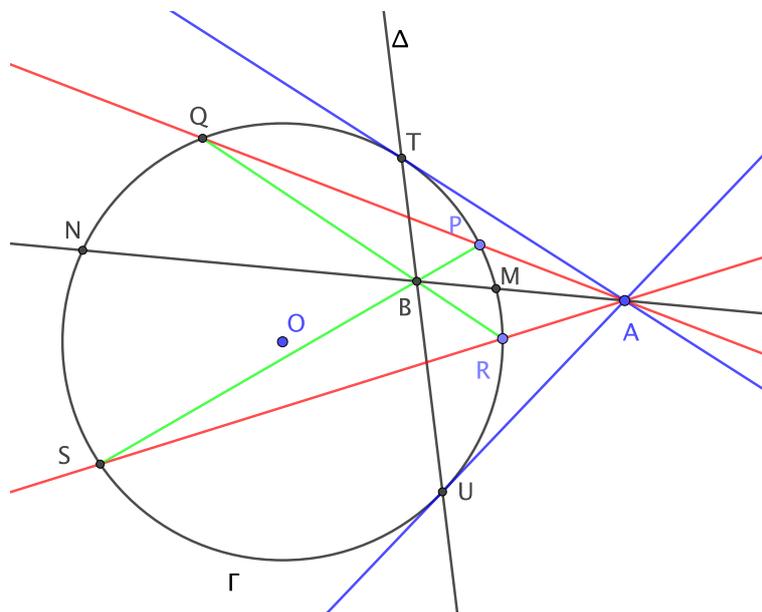


FIGURE 5 –

M_1, M_2, \dots, M_{2n} les contacts des côtés avec \mathcal{U} . Alors, les grandes diagonales $(A_i A_{n+i})$ et les droites $(M_i M_{n+i})$ sont toutes concourantes en un point.

Les figures suivantes montrent des exemples⁸ avec $2n = 6$ et des ellipses ou des hyperboles.

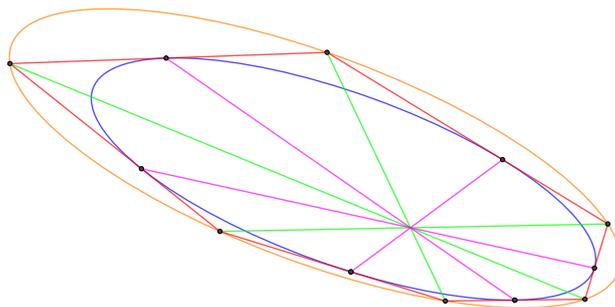


FIGURE 6 –

8. Exemples honteusement truqués car obtenus à partir de la figure formée d'un hexagone régulier et de ses cercles inscrit et circonscrit transformée par homologie. Bien entendu, dans ce cas, le concours des droites est évident puisqu'il est vrai dans la figure initiale.

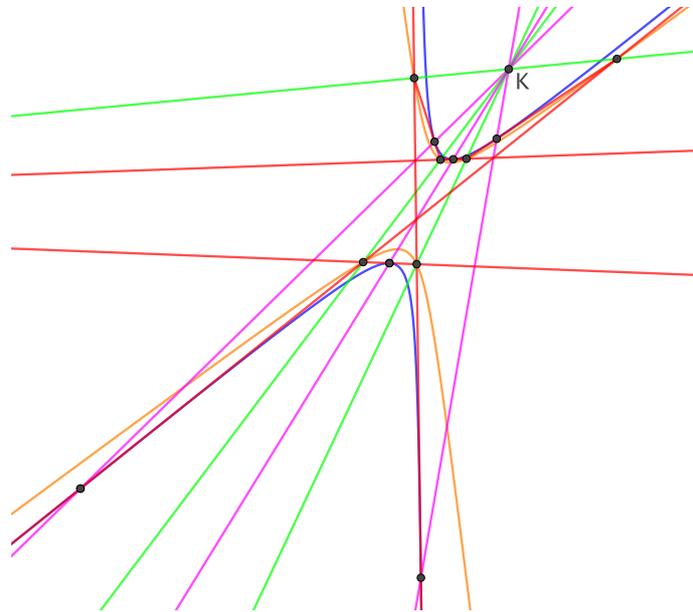


FIGURE 7 –