La culture générale en mathématiques des candidats au concours

Daniel PERRIN

0. Introduction.

Les idées que je présente dans ce texte sont essentiellement celles de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (commission Kahane), telles qu'elles apparaissent dans ses rapports :

L'enseignement des sciences mathématiques, Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Odile Jacob, 2002,

Rapport au Ministre de la jeunesse, de l'éducation nationale et de la recherche sur la formation des maîtres en mathématiques,

mars 2003, disponible sur le serveur de la SMF (Société Mathématique de France) :
http ://www.emath.fr/Serveur/Smf/smf.emath.fr/Enseignements

J'évoquerai ici la culture qui me semble nécessaire aux professeurs de mathématiques, culture dans la discipline elle-même, culture vis-à-vis de son histoire et de son épistémologie, culture enfin dans les disciplines liées aux mathématiques([1]). Je conclurai par un bref état des lieux et quelques propositions.

1. La culture nécessaire.

Un premier point doit être affirmé avec force : il n'y a pas de culture mathématique qui vaille sans un bagage technique suffisant. Pour utiliser une métaphore évidente, c'est comme si l'on demandait à un musicien d'interpréter une œuvre sans connaître l'usage de son instrument. La formation des professeurs doit donc, avant toute chose, prendre en compte ce préalable sans lequel tout ce qui pourrait être dit ensuite ne serait que billevesées. Bien entendu, comme en musique, la technique n'est pas suffisante et elle doit s'accompagner de tout un faisceau d'autres connaissances qui constituent ce que nous pouvons appeler culture.
J'explicite ici, dans le cas des mathématiques, les raisons qui font que cette culture est nécessaire et les formes qu'elle peut prendre.

([1]) Bien entendu, la culture générale, en un sens plus étendu, est essentielle pour tous les professeurs, en mathématiques comme ailleurs. J'en suis d'autant plus convaincu que j'ai mis en place à Orsay une licence pluridisciplinaire destinée à la formation des professeurs des écoles. Cependant, ce n'est pas – me semble-t'il – le sujet de cette rencontre. Je signale toutefois deux points essentiels à mes yeux : la pratique d'une langue vivante et les capacités d'écriture en français. On constate en effet chez les professeurs stagiaires de mathématiques (peut-être plus que les autres ?) de grandes difficultés lorsqu'il s'agit d'écrire, par exemple pour rédiger leur mémoire professionnel.

a) La culture est un outil indispensable pour l'enseignement au jour le jour.

Voici d'abord trois raisons issues de la pratique quotidienne du métier de professeur :

• Le premier point est la **cohérence** du savoir. En effet, dans l'enseignement du second degré, les programmes de mathématiques comportent beaucoup de résultats admis sans preuve et seul le professeur est garant de la cohérence de l'ensemble. Il doit donc posséder la culture nécessaire pour comprendre l'articulation des contenus de l'enseignement. Mais cela ne suffit pas : il doit aussi être capable de justifier ces résultats aux élèves, même s'il ne peut le faire que de manière incomplète, l'objectif étant de les convaincre qu'en mathématiques on peut tout **comprendre**. Ce travail d'adaptation demande une culture plus grande encore (par exemple historique ou didactique).

Plutôt qu'un long discours sur ce thème, je préfère donner un exemple : le nombre π. Il y a deux formules qui font intervenir ce nombre : celle qui donne le périmètre d'un cercle de rayon R et celle qui donne l'aire du disque de même rayon. Il est bien normal que le rayon intervienne dans ces formules. En effet, si on appelle p le périmètre d'un cercle de rayon unité, lorsqu'on multiplie ce rayon par R, la longueur est multipliée par R (c'est le propre d'une longueur) et c'est donc pR. De même, si on appelle A l'aire du cercle unité, il est clair que l'aire d'un cercle de rayon R va être multipliée cette fois par R^2 (penser à ce qui se passe pour un carré dont on double le côté : le périmètre est multiplié par 2, mais l'aire par 4). On obtient donc AR^2. Ce qui n'a rien d'évident a priori (même si c'est un fait familier) c'est que les nombres p et A aient un quelconque rapport. Pourtant, on sait bien que p vaut 2π et que A vaut π. Le professeur qui réfléchit à la question, avec toutes les connaissances mathématiques dont il dispose, pourra donner des réponses qui satisferont peut-être un spécialiste. Pour en donner de convaincantes pour un élève de collège, il aura besoin d'une réflexion supplémentaire, par exemple historique, en référence à Archimède.

• Le second point concerne la **motivation** des élèves. J'ai assisté récemment à des soutenances de mémoires PLC2([2]) dont plus de la moitié étaient sur ce thème, preuve que c'est une question qui se pose souvent à nos jeunes collègues.
Les mathématiques offrent pourtant de nombreux exemples qui peuvent contribuer à motiver des élèves : que ce soit en géométrie (je pense aux polyèdres), en arithmétique (je pense à la cryptographie), en analyse (je pense aux problèmes d'évolution de populations), en statistiques (je pense aux sondages), voire en histoire des mathématiques (notamment pour des élèves littéraires). Il est clair cependant que pour proposer ces thèmes il faut disposer d'une culture vaste, diverse et profonde.

• Le dernier point relève de la gestion de la classe. Lorsqu'une question imprévue surgit dans la classe, le fait, pour le professeur, d'avoir une plus grande culture que ses élèves lui permet souvent d'avoir la réponse immédiatement, ce qui lui donne un **temps d'avance** sur eux. Lorsque cette réponse s'appuie sur des connaissances qui sont au-delà de celles des élèves, il reste un travail de transposition important à faire pour trouver des arguments qui puissent les convaincre, mais une bonne partie du travail est déjà faite (en mathématiques, contrairement à ce que peut laisser penser l'enseignement de cette discipline jusqu'à l'Université, le plus difficile est souvent de trouver quel est le résultat à démontrer ; c'est du moins ce que m'a enseigné mon expérience de chercheur).

([2]) Dans le jargon des IUFM ce sigle désigne les professeurs de lycée et collège stagiaires.

b) La culture permet l'adaptation aux évolutions de la discipline.

L'évolution des mathématiques présente deux tendances contradictoires :
• Contrairement à d'autres disciplines où les progrès amènent à remettre en cause les connaissances antérieures, les résultats mathématiques établis par les anciens (disons Euclide, Archimède, Descartes ou Leibniz) demeurent absolument valables aujourd'hui et leur connaissance reste indispensable.
• L'inflation des connaissances est aujourd'hui extrêmement rapide (on dit couramment qu'il y a plus de mathématiques qui se sont faites depuis 1945 que de l'origine des temps à 1945.)([3]) On a d'ailleurs vu des problèmes anciens être résolus très récemment (par exemple, le grand théorème de Fermat en 1994).

Heureusement, il y a parfois de vraies révolutions qui permettent de gagner du temps par rapport à l'histoire et dont certaines (finalement assez peu nombreuses) ont pénétré l'enseignement, en voici quelques exemples :
• l'invention de l'algèbre par les mathématiciens arabes à la fin du premier millénaire,
• l'invention des nombres décimaux par Simon Stevin au XVI ème siècle,
• l'invention du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibniz au XVII ème siècle,
• plus récemment, l'irruption de l'informatique et la puissance de calcul phénoménale qu'elle apporte et qui permet aux mathématiciens de se libérer des tâches répétitives.([4])

Attention toutefois, un progrès reconnu comme tel par les spécialistes n'est pas nécessairement transposable au niveau de l'enseignement du second degré. L'exemple des mathématiques modernes (et notamment l'introduction de la géométrie par les espaces vectoriels) est là pour nous inciter à la prudence en ce domaine. De même, la tentation du nettoyage, qui consiste à éliminer certains domaines jugés obsolètes, est souvent une erreur. Deux exemples : celui de Jean Dieudonné s'écriant vers 1960 : *à bas Euclide, plus de triangles* ou celui de Catherine Dufossé (ex-présidente de l'APMEP), écrivant, vers 1999 : *à bas les tableaux de variation*. Dans les deux cas, même s'il est vrai que des abus ont été commis dans l'enseignement de ces notions, la formule est absurde car la géométrie et l'analyse restent des piliers essentiels de l'enseignement des mathématiques et doivent continuer à faire partie de la culture des professeurs.

Cependant, à côté de ces domaines classiques et qui restent indispensables, on a vu apparaître dans l'enseignement de **nouveaux domaines** :
• les probabilités et les statistiques, domaine maintenant essentiel dans les applications des mathématiques, qui ont vu leur place dans les programmes de lycée renforcée dans les dernières années,
• la théorie des graphes qui a fait son apparition en terminale ES en 2002.
• Il faut aussi prévoir, dans les années à venir, l'existence d'un programme d'informatique (algorithmique et programmation) (c'est, en tous les cas, l'une des recommandations de la commission Kahane).

([3]) Comme il y a bien quinze ans que cette estimation circule, elle est sans doute largement en dessous de la vérité !

([4]) Contrairement à ce que certains ont voulu faire croire, l'informatique ne dispense pas de faire des mathématiques, au contraire, mais elle est devenue, en mathématiques comme ailleurs, un outil indispensable.

De plus, sans qu'il s'agisse de domaines nouveaux, les programmes incitent parfois à des **lectures nouvelles** des résultats usuels, ce qui conduit les professeurs à remettre en cause leurs connaissances comme cela est le cas pour l'introduction de l'exponentielle dans les programmes 2002. Cela pourrait aussi être le cas dans la géométrie du collège, avec la réintroduction des cas d'isométrie, si les programmes suivent les recommandations de la commission Kahane.

Enfin, une autre nouveauté importante pour les professeurs de mathématiques est l'intégration des **nouveaux outils** dans leur enseignement (calculatrices, logiciels de géométrie dynamique, de calcul formel, tableur, etc.)

Il est clair que ces innovations, de quelque nature qu'elles soient, ne sont viables dans le système scolaire que si les professeurs y sont préparés par la formation initiale ou épaulés par la formation continue([5]). On doit en effet se souvenir de deux exemples :
• parmi les causes de l'échec cuisant de la réforme des mathématiques modernes figure évidemment l'impréparation du corps enseignant qui a eu à faire face à cette réforme,
• plus récemment, le renforcement des statistiques au lycée s'est heurté à une vive résistance des professeurs qui estimaient qu'ils n'avaient pas été formés pour cela.([6])

c) La culture permet le lien avec les autres disciplines.

Il y a beaucoup de raisons pour s'intéresser aux mathématiques et pour les enseigner. Il est clair notamment que les mathématiques, par les qualités conjointes d'imagination et de rigueur qu'elles permettent de développer, contribuent fortement au développement de la rationalité. Mais il y a une autre raison, fondamentale, c'est qu'elles sont **utiles** dans presque tous les domaines de l'activité humaine et indispensables dans de nombreuses disciplines.
L'exemple le plus évident est sans doute la relation qui lie mathématiques et physique, leurs liens, anciens, riches, multiformes ont tissé l'histoire du progrès des sciences. Leur relation se fait d'ailleurs dans les deux sens : les physiciens utilisent les mathématiques, parfois longtemps après qu'elles aient été élaborées (l'exemple le plus spectaculaire est donné par les lois de Kepler et le fait que les trajectoires des planètes sont des coniques), mais, inversement, la physique, par les problèmes qu'elle pose, nourrit les mathématiques (on peut, par exemple, citer la théorie des distributions de Laurent Schwartz, d'origine physique).

Le mot clé de cette relation entre les mathématiques et les autres sciences est **modélisation** et cette opération peut se résumer par le schéma suivant :
— formuler les problèmes du réel en termes mathématiques,
— le décrire par un modèle,
— calculer à partir de ce modèle et prévoir son comportement et son évolution,

---

([5]) Comme le montre le rapport sur la formation des maîtres de la commission Kahane, la formation continue est loin de jouer convenablement ce rôle.
([6]) D'ailleurs, la multiplication des changements de programmes, pas toujours suffisamment expliqués, est sans doute l'une des causes du malaise actuel des professeurs de mathématiques, notamment des plus anciens.

— confronter les prédictions du modèle avec la réalité pour le confirmer, l'infirmer, le modifier, etc.

Un exemple peut illustrer ce schéma : les problèmes d'évolution de populations. Lorsqu'on étudie l'évolution d'une population (disons, pour fixer les idées, des lapins sur une petite île) un premier modèle consiste à dire que l'accroissement de la population est proportionnel à la population (plus il y a de lapins, plus ils font des petits). Il s'agit du modèle exponentiel, qui, s'il est plausible pour un petit laps de temps, devient absurde en temps grand. En effet, ce modèle, si l'on part d'une population d'une centaine de lapins et qu'on suppose qu'elle a doublé en deux mois, mène rapidement à des résultats absurdes (en vingt ans la population serait de l'ordre d'un milliard de milliards de milliards de milliards de lapins !)
Heureusement, il y a un modèle plus conforme à la réalité, le modèle logistique qui prend en compte l'existence d'une population maximum et permet de modéliser de nombreux problèmes d'évolution de populations ou encore d'épidémies (il rend compte assez fidèlement de l'évolution de l'épidémie de fièvre aphteuse en Grande-Bretagne, par exemple).

Il me semble indispensable que la formation des futurs professeurs prenne en compte, au moins en partie, ce souci de la modélisation et des applications des mathématiques. Cet aspect est d'ailleurs de plus en plus présent dans l'enseignement du secondaire, à la fois dans les programmes (voir l'exemple de la radioactivité développé conjointement par les groupes d'experts de mathématiques, physique-chimie et sciences de la vie et de la terre dans les documents d'accompagnement des programmes), mais aussi au travers des nouveaux dispositifs pluridisciplinaires : travaux personnels encadrés (TPE), itinéraires de découverte, etc.
C'est aussi un point essentiel pour restaurer l'image des mathématiques dans le public que de montrer leur omniprésence à la fois dans les sciences et dans la vie de tous les jours.

Bien entendu, on ne peut pas demander aux futurs professeurs de mathématiques d'être compétents dans tous les domaines, mais il faut qu'ils aient le minimum de connaissances nécessaire pour pouvoir dialoguer avec leurs collègues. L'introduction à l'agrégation de mathématiques d'une épreuve de modélisation est un pas intéressant dans cette direction.

2. Conclusions.

En guise de résumé, je citerai un extrait du rapport de la commission Kahane sur la formation des maîtres :

Il est indéniable, et tout ce qui précède le montre bien, qu'on demande de plus en plus aux professeurs de mathématiques des lycées et collèges. En effet, les professeurs doivent continuer à connaître l'analyse, qui demeure un pan essentiel des programmes de lycée, ils doivent dominer la géométrie, qui continue à être l'un des fondements de l'enseignement, notamment au collège, ils doivent aussi avoir des connaissances solides en algèbre pour avoir le recul nécessaire sur tout ce qui concerne le calcul algébrique, ils doivent être compétents en arithmétique, qui fait un retour en force à plusieurs niveaux, et connaître des éléments de mathématiques discrètes qui viennent de faire leur apparition dans les programmes de lycée, ils doivent maintenant être à l'aise avec les phénomènes aléatoires (statistiques et probabilités) dont on a rappelé l'importance, ils doivent connaître l'histoire de leur discipline, source de motivation pour les élèves, ils doivent maîtriser les techniques *nouvelles, de la calculatrice programmable à l'ordinateur en passant par l'utilisation des tableurs, des logiciels de calcul formel ou de géométrie dynamique, ils devront demain être en mesure d'enseigner l'algorithmique et la programmation et donc être formés en ce sens, ils doivent enfin, dès aujourd'hui, être capables de dialoguer avec leurs collègues d'autres disciplines dans le cadre de travaux interdisciplinaires et pour cela avoir des notions solides de ces disciplines.*

Mon expérience de responsable d'une préparation au CAPES pendant plus de dix ans m'a montré que sur bien des points, ces objectifs ne sont pas atteints. Par exemple, l'absence presque totale de géométrie dans les cursus universitaires fait que des pans entiers de ce domaine peuvent être ignorés des futurs enseignants : les bases axiomatique, les polyèdres, les géométries non euclidiennes, l'usage des logiciels, etc. La formation en probabilités, et surtout en statistiques, est encore, dans beaucoup d'universités, notoirement insuffisante. Sur les graphes (et les mathématiques discrètes en général), elle est inexistante. Enfin, et c'est le gros point noir, la culture en sciences (physique, chimie, biologie) des candidats au CAPES est très faible. En effet, si les sciences (il s'agit surtout de physique) sont présentes dans l'intitulé du DEUG MIAS (Mathématiques, Informatique et Application aux Sciences), elles n'y apparaissent qu'en troisième position et en sont clairement le parent pauvre. De plus, il n'y en a plus du tout en licence de mathématiques.

En vérité, je pense fondamentalement qu'il est impossible de former en 3 ans après le Bac (plus l'année de préparation au concours) des professeurs présentant toutes les compétences énumérées ci-dessus. En effet, les élèves qui sortent de l'enseignement secondaire actuel, s'ils sont aussi intelligents que leurs aînés, ne sont probablement pas plus travailleurs qu'eux, et, vu la diminution du nombre d'heures dans le second degré, ils ne savent certainement pas plus de mathématiques. Il est donc nécessaire, et c'est la proposition de la commission Kahane, d'allonger la durée des études et recruter les futurs professeurs de mathématiques à Bac+4 (au niveau de la maîtrise) (plus l'année de préparation).

Des objectifs pour une maîtrise "d'enseignement".

Attention, les actuelles maîtrises, trop orientées vers la recherche ou vers les applications ne conviennent pas vraiment pour nos objectifs. Il faut donc créer des maîtrises originales, grâce à un système d'options. Par exemple, à côté de modules d'algèbre et d'analyse classiques on peut proposer :

— des modules de compléments disciplinaires (géométrie, probabilités, statistiques, mathématiques discrètes, informatique),

— des modules plus dirigés vers l'enseignement (modélisation, histoire des sciences, utilisation de logiciels de calcul formel et de géométrie, didactique).

Un autre point est fondamental si l'on souhaite que les futurs professeurs possèdent une culture vivante et efficace, qui ne soit pas seulement un vernis, c'est de multiplier dans ces formations des activités transversales qui prennent en compte à la fois les aspects techniques de la discipline, mais aussi ses racines historiques et ses liens avec les applications.