

Cher Dorier

J'ai commencé à lire, avec beaucoup d'intérêt, les divers papiers que tu m'as envoyés. Je suis loin d'avoir terminé, mais une phrase du texte de présentation m'a fait réagir. Il s'agit de la phrase suivante (p. 63) :

“En conséquence, une théorie qui a joué un rôle fondamental pendant deux siècles dans le développement de l'algèbre n'a aujourd'hui qu'un rôle marginal.”

Il s'agit de la théorie des déterminants. Je ne sais pas exactement ce que tu vises dans cette phrase : s'agit-il de la place des déterminants dans l'enseignement (voir plus loin) ou dans les mathématiques ? En tous cas, pour ce qui concerne la recherche (dans les disciplines que je peux connaître : disons en algèbre commutative et en géométrie algébrique), je ne suis d'accord ni sur le mot marginal, ni sur l'importance relative des déterminants et de la méthode de Gauss⁽¹⁾.

Bien sûr, celle-ci a un intérêt pratique indéniable (tant qu'il n'y a pas trop de paramètres) et d'ailleurs une variante de cette méthode (les bases de Gröbner) est très utilisée dans mon domaine, notamment par le logiciel Macaulay. Mais, du point de vue théorique, les déterminants ont, à mon avis, un intérêt bien supérieur. Une première réflexion, très sommaire, me conduit à repérer deux types d'arguments pour étayer cette opinion :

1) Les déterminants fournissent des équations **explicites** de l'ensemble des matrices de rang $\leq r$. Cela permet de décrire cet ensemble comme une sous-variété (algébrique) de l'espace des matrices, avec de nombreuses conséquences dont je cite, en vrac, celles qui me viennent aussitôt à l'esprit :

- le fait que $GL(n, k)$ est un ouvert dense de $M(n, k)$,
- la description des grassmanniennes comme des variétés algébriques (cf. les coordonnées de Plücker), essentielle en géométrie algébrique,
- le résultant de deux polynômes.

Dans mon domaine, une situation très fréquente nous amène à décrire le lieu où une matrice (à coefficients polynômes) n'est pas de rang maximum et ce lieu est donné,

⁽¹⁾ Ce sentiment est surtout issu de ma pratique quotidienne puisque je passe une bonne partie de mon temps à calculer des mineurs de matrices (à coefficients polynômiaux) alors que je n'utilise jamais la méthode de Gauss.

comme variété algébrique, par l'annulation des mineurs maximaux. Personnellement, j'utilise très souvent ce type de méthodes (les variétés ainsi obtenues s'appellent les variétés déterminantielles et elles jouent un grand rôle).

2) Le déterminant est une construction "naturelle" i.e. **fonctorielle**. Je m'explique : si on a un espace vectoriel V (ou un module) on peut lui associer ses puissances extérieures $\bigwedge^r V$ et cette construction est fonctorielle, c'est à dire qu'une application linéaire $u : V \rightarrow W$ donne une application $\bigwedge^r u : \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^r W$, avec la formule $\bigwedge^r(uv) = (\bigwedge^r u)(\bigwedge^r v)$. Si V et W sont libres la matrice de $\bigwedge^r u$ est donnée par les r -mineurs de celle de u . La fonctorialité se traduit, dans le cas le plus simple, par la formule $\det(AB) = \det A \det B$.

N'y aurait-il que cette formule là, ses conséquences sont considérables, y compris à un niveau relativement élémentaire. On peut citer, par exemple le fait que le produit de deux matrices inversibles l'est, donc que GL est un groupe, avec un sous-groupe distingué évident (SL , le noyau du déterminant), ce qui donne, au passage, la notion d'orientation dans le cas réel ...

Il y a bien d'autres applications, certaines plus sophistiquées (un exemple que j'aime bien est le calcul des diviseurs élémentaires d'un sous-réseau à partir des mineurs de la matrice de passage au réseau total : c'est encore une application de l'algèbre extérieure). En tous cas, cette construction reste fondamentale dans de nombreux domaines de géométrie et de topologie (pense aux formes différentielles).

En fait, je pense que la notion de déterminant est l'une des plus profondes de celles que l'on apprend au niveau du DEUG (et pour ce qui concerne l'algèbre, la plus profonde sans doute). Par exemple, j'ai découvert assez récemment un certain nombre de conséquences non triviales de la formule bien connue (et pas toujours considérée à sa juste valeur) de développement du déterminant selon une rangée.

Pour élargir un peu le débat, il me semble qu'une façon (mais pas la seule) de comprendre ce qui est essentiel dans un domaine est de mesurer ses généralisations. Dans le cas de l'algèbre linéaire, il y a deux grands champs d'extension : l'analyse fonctionnelle (i.e. la dimension infinie) et l'algèbre commutative (i.e. les modules sur un anneau). La notion de rang, qui est évidemment fondamentale dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, ne se généralise bien ni en dimension infinie, ni sur un anneau.

En vérité, dans le cas de la dimension infinie, presque rien ne se généralise sauf (et c'est essentiel !) le langage, le fait de pouvoir parler de plans, de convexes, de formes linéaires, d'orthogonalité,... avec toute l'intuition géométrique que cela induit.

Du côté de l'algèbre commutative en revanche, beaucoup de choses s'étendent. Là encore, tout le langage commun (noyau, image, quotient ... ce qui constitue l'aspect catégorie abélienne et qui reste valable sans changement). Ensuite, les modules libres, les bases, les matrices, conservent une importance cruciale et on cherche souvent à s'y ramener (c'est la méthode des "résolutions" que je pratique à haute dose). Enfin, toutes les constructions fonctorielles (produit tensoriel, algèbres symétrique et extérieure, ...) se généralisent sans peine et leur importance est fondamentale, le déterminant apparaissant à la jonction des deux derniers thèmes.

Bref, il me semble qu'il y a une piste de ce côté là, un peu différente de celles que tu

as déjà explorées, qui pourrait aussi éclairer (en partie) l'aspect didactique.

Si, comme je persiste à le penser, la notion de déterminant reste fondamentale dans tout un vaste domaine des mathématiques, la question de l'enseignement est tout autre.

À ce sujet, j'aurais plutôt tendance à partager le point de vue qui tend à minorer et à retarder la place des déterminants dans l'enseignement de DEUG et ce pour trois raisons. D'abord, ce n'est pas parce que les déterminants sont apparus historiquement les premiers ⁽²⁾ qu'on doit aussi les enseigner en premier. Ensuite, parce que, sur le plan théorique, c'est une notion très riche et sans doute trop riche pour qu'un étudiant de DEUG en apprécie vraiment tout le sel. Enfin, parce que cela éviterait les dérives calculatoires qui, elles, ne présentent plus guère d'intérêt.

Bien entendu, il faut tout de même avoir à sa disposition le déterminant dans un certain nombre de questions (le polynôme caractéristique, tout ce qui tourne autour de la structure de groupe de GL , etc.), mais cela n'est pas indispensable au début et notamment dans l'apprentissage de la notion de rang.

Voilà l'état de mes réflexions. Je suis conscient de ce que ma réaction a de partiel et de partial. Je vais continuer à lire tes papiers et à réfléchir, mais le sujet est indéniablement passionnant.

Bien cordialement,

⁽²⁾ Mon expérience de la recherche me ferait presque dire que ce ne sont jamais les choses les plus simples qui apparaissent les premières.