Atelier du 31 mars 1998

À propos du thème : apprendre à raisonner, où et comment

Daniel PERRIN

0. Préambule.

Il me semble que nous devons essayer ici, au moins dans un premier temps, de réfléchir sur le thème proposé sans nous sentir prisonniers des multiples contraintes du système (le Bac, les programmes, le temps, ...), mais en tenant compte, en revanche, des nouveaux publics d'élèves qui sont les nôtres et des problèmes qu'ils nous posent. Bien entendu, les contraintes institutionnelles évoquées ci-dessus existent et sont souvent incontournables. Mon impression là-dessus est d'ailleurs assez pessimiste, tant sur l'évolution du Bac (dans la mesure où le maintien de taux de réussite élevés semble politiquement obligatoire), que sur les projets du ministre concernant les mathématiques (où je crains que nous ne soyons confrontés à de nouvelles diminutions d'horaires et de programmes). Mais il n'est sans doute pas inutile de voir ce qu'il nous paraîtrait utile et intéressant de faire si les conditions étaient favorables. De plus, cela peut permettre, surtout si un consensus se dégage dans le milieu mathématique, de faire des propositions concrètes par rapport à ces contraintes : quelles évolutions souhaitons nous pour le Bac, pour les programmes, les horaires, etc.

1. Le constat côté enseignement supérieur.

Le constat des collègues qui enseignent en DEUG peut souvent se résumer en une phrase simple autant que provocatrice : les élèves ne savent plus raisonner. Il me semble que nous devons ici essayer de préciser ce que l'on peut entendre par là. Voici, en vrac quelques carences signalées de nos étudiants :

- le manque de rigueur logique ; par exemple, la confusion entre condition nécessaire et suffisante,
- une manipulation souvent incorrecte des inégalités, surtout lorsqu'il y a des signes moins,
- une incapacité à formuler correctement un raisonnement par récurrence, (notamment quand il ne s'agit pas seulement de montrer une formule),
- l'incapacité à enchaîner plusieurs étapes de raisonnement, (c'est un point qui reste encore vrai plusieurs années après, par exemple en préparation au CAPES),
- une grande difficulté à manipuler les concepts abstraits (par exemple une fonction ou une suite non spécifiée par une formule)

Voici à ce sujet un exemple de texte posé en DEUG MO dont le résultat a été catastrophique :

Soit f une fonction définie continue croissante sur $[0, 1[$ avec $f(0) = 0$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(1) Pour tout réel $y > 0$, il existe au moins un $x \in]0, 1[$ tel que $y = f(x)$.

(2) $\lim_{x \to 1^-} = +\infty$.

Ce constat (avec des variantes) semble vraiment partagé par la plupart des collègues du supérieur.

Question 1 : Partagez-vous ce constat ? ou seulement sur certains points ? ou seulement pour certains élèves ?

2. La rigueur à tout prix ?

Si un consensus se dégage sur le constat ci-dessus parmi les collègues universitaires, il est moins simple de faire l'unanimité sur des solutions à apporter. À ce propos, je voudrais mettre en garde à la fois contre une lecture formaliste du paragraphe précédent et contre certaines solutions toutes faites du genre suivant :

— il n'y a qu'à réinstaurer des cours de logique dans le secondaire,
— il n'y a qu'à refaire de la géométrie,
— il n'y a qu'à faire plus de démonstrations en cours.

S'il est sans doute nécessaire d'aller dans ce sens, il faut éviter de réduire les mathématiques au seul aspect de la démonstration et cela pour plusieurs raisons.

• La démonstration est loin d'être la seule activité du mathématicien([1]). Elle est précédée le plus souvent par une phase expérimentale, d'où émergent les conjectures permettant de comprendre les situations proposées. Mais la démonstration demeure le moyen ultime pour le mathématicien de valider de telles conjectures, en un mot d'être convaincu et de convaincre. Je pense vraiment que ce qui vaut pour le mathématicien vaut, dans ce cas, aussi pour les élèves et que la fonction primordiale de la démonstration devrait être, là aussi, d'assurer la certitude des affirmations.

• En ce sens, il convient de prendre garde à l'excès de formalisme qui réduirait la pratique de la démonstration à un exercice de style autoritaire et stérile en lui ôtant sa fonction de conviction. Trop souvent les problèmes se réduisent à des questions fermées : "montrer que ..."

Ce que supportaient les élèves des lycées il y a trente ans n'est sans doute pas reproductible et la question que posent souvent les non-mathématiciens : "pourquoi doit-on démontrer des choses qui sont évidentes sur la figure ou la calculatrice, etc." doit être prise au sérieux.

• Enfin, au moment où les mathématiques sont mises en cause un peu partout, il me semble important de ne pas les confiner dans le splendide isolement de la tour d'ivoire de la démonstration mais de montrer qu'elles sont aussi un incomparable instrument de

([1]) J'emploie ce mot en un sens très large, pour désigner toute personne confrontée à un authentique problème de mathématiques, pas nécessairement au niveau de la recherche. J'écarte toutefois les problèmes du type de ceux posés au Bac où le travail est le plus souvent réduit à des tâches élémentaires ne laissant que peu d'initiative aux éxécutants.

découverte et de compréhension du monde. Sur ce dernier point il me semble que nous devons — tous — faire un gros effort pour nous intéresser aux applications des mathématiques et à leurs liens avec les autres disciplines.

Question 2 : Partagez-vous cette analyse ? cette vision de la démonstration ? ce souci des applications et des rapports aux autres disciplines ?

3. Des propositions.

a) Le principe d'ouverture.

Il me semble que la nécessité du raisonnement, si l'on s'affranchit de l'autorité du texte de problème : le sempiternel "montrer que ...", s'impose pour comprendre une situation dès lors qu'elle est suffisamment **riche et ouverte**. Le principe que je défends est donc de poser aux élèves, le plus possible, en tous cas en TP, en devoirs à la maison ([2]) de telles questions riches et ouvertes.

Je voudrais développer un peu ici un exemple, pris en analyse (où pourtant on affirme souvent qu'il n'y a pas de raisonnement à faire au niveau du secondaire), à savoir l'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, (avec un f explicite, par exemple homographique pour fixer les idées). Je suppose qu'un premier apprentissage a déjà eu lieu sur ce thème, que d'autres exemples ont déjà été vus et que des principes un peu généraux ont été dégagés.

Je propose alors

1) de ne pas imposer la valeur de départ u_0, (pour avoir une situation suffisamment riche),

2) de laisser, au moins pendant un premier temps assez long à la charge de l'élève le soin d'explorer le problème (en rappelant deux outils utiles : la calculette programmable et l'étude graphique), en tous cas de ne pas demander trop tôt "monter que u_n a pour limite l", laissant ainsi la situation ouverte.

De l'étude expérimentale doivent sortir des conjectures sur la monotonie et les limites éventuelles (points fixes de f), ainsi que la mise en évidence du lien avec la dérivée en ces points (points attractifs, répulsifs,... à rappeler éventuellement)

Il me semble qu'il faut ensuite laisser à la charge de l'élève la sélection d'un intervalle stable où la dérivée est majorée par $k < 1$ et la conclusion. Ce point du choix de l'intervalle me semble particulièrement intéressant et il est presque toujours occulté dans les problèmes de Bac où on l'impose, enlevant ainsi toute la substance du problème et réduisant le travail de l'élève à la tâche d'éxécution, en l'occurrence appliquer l'inégalité des accroissements finis.

Il sera toujours temps, ensuite, de limiter la recherche, de donner des indications, de canaliser les idées, mais il y a là de quoi faire réfléchir.

Dans le même domaine, on peut aussi montrer aux élèves des exemples, simples en apparence, mais où la suite a un comportement chaotique. Exemple : $u_{n+1} = 3u_n^2 - 2u_n$. Deux idées derrière cet exemple :

1) On rencontre ce type de suites en dynamique des populations lorsqu'on ne se contente pas d'un modèle exponentiel (souvent peu conforme à la réalité). Cela permet

---

([2]) et il faudrait sans doute que ce type de questions soit un peu présent au Bac...

de battre en brèche l'idée que les mathématiques, appliquées à la réalité, produisent des résultats aberrants : dans ce cas, ce ne sont pas les mathématiques qui sont en cause, mais le modèle.

2) Évidemment, il est difficile de dire quoi que ce soit d'intéressant au niveau du lycée sur ces suites, mais on peut signaler aux élèves que les mathématiciens sont parvenus, avec d'autres outils, à dire des choses pertinentes sur leur comportement qualitatif.

Question : Ce scénario vous semble-t'il envisageable dans vos classes ? Sinon, avec quelles modifications ?

b) Quels domaines sont propices au raisonnement.

J'ai essayé de montrer plus haut qu'on peut trouver l'occasion de développer des aptitudes au raisonnement dans n'importe quel domaine, pourvu qu'on choisisse un problème riche et ouvert. Cependant il est clair que certains domaines se prêtent mieux que d'autres au raisonnement, au moins dans sa forme enchaînement logique. Citons :

• La géométrie (à condition de ne pas tout verrouiller en ne posant que des questions contenant leur réponse ; demander de préférence : quel est l'ensemble des points vérifiant telle propriété,...)

• L'arithmétique qui peut permettre de résoudre des problèmes séduisants parce que d'énoncés simples, mais non évidents. Elle présente l'avantage de permettre de raisonner sur un domaine relativement limité, assez concret mais néanmoins riche.

• Les problèmes de dénombrement et de probas. Là, la rigueur retrouve sa vraie raison d'être. En effet, chacun sait qu'il est très facile dans ce type de questions de trouver, en faisant des raisonnements approximatifs, des résultats complétement divergents entre lesquels la rigueur seule permet de trancher.

• La modélisation. Il s'agit là d'une autre forme de raisonnement où la critique du modèle a un grand rôle à jouer. C'est un aspect beaucoup trop négligé à l'heure actuelle dans le secondaire, même si les programmes présentent des intentions louables à ce sujet.

c) Remords.

Je ne voudrais pas qu'on pense à la lecture de ces lignes que je propose de jeter tout ce qui est technique. Non, la technique est évidemment indispensable, qu'il s'agisse de technique de calcul (mais attention de ce côté à l'irruption des moyens de calcul informatiques) ou de technique de démonstration. Il est clair qu'un élève qui ne maîtrise pas cela n'a aucune chance de pouvoir aborder des situations plus complexes. Je souhaiterais simplement qu'on ne limite pas l'apprentissage à cet aspect, même s'il est important.

Mais je suis sans doute en train de rêver et l'expérience que j'ai eue en DEUG l'an passé m'a montré combien est grande la tentation de réduire l'enseignement à la pratique d'un certain nombre d'algorithmes (développements limités, primitives,...). En effet, la pression de la réussite quasiment imposée, aux examens de l'université comme au Bac, est un frein considérable à l'amélioration des apprentissages.