

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé pourront être utilisés par les candidats pour la suite du problème. Les parties V et VI, à l'exception de la question V 4.c, n'utilisent pas les définitions et les résultats des parties I, II, III, IV et pourront donc être abordées indépendamment. Les questions les plus difficiles sont indiquées par le signe ¶.

Il est recommandé d'accompagner la rédaction de figures soignées, étant bien entendu que ces figures ne sauraient remplacer les raisonnements.

Dans tout le problème on désigne par E un espace affine de dimension 2 sur le corps \mathbf{R} des nombres réels et par \vec{E} l'espace vectoriel associé, lui aussi de dimension 2 sur \mathbf{R} . Les vecteurs de \vec{E} seront notés avec une flèche, par exemple : $\vec{v} \in \vec{E}$. Le sous-espace vectoriel engendré par \vec{v} sera alors noté $\mathbf{R}\vec{v}$. Si D est une droite affine de E , la droite vectorielle associée est appelée la **direction** de D et notée \vec{D} . Si a et b sont deux points distincts de E la droite passant par a et b est notée $\langle ab \rangle$.

Si $f : E \rightarrow E$ est une application affine on désigne par $\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ l'application linéaire associée. On a alors : $\forall x, y \in E, \vec{f}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)}$, et \vec{f} est bijective si et seulement si f l'est. Le groupe des applications affines bijectives de E dans lui-même est noté $GA(E)$. On rappelle qu'une application affine est déterminée par la donnée des images de trois points non alignés.

La composée de deux applications f et g est notée simplement gf . Si $f, g \in GA(E)$, on appelle **conjugué** de f par g l'élément gfg^{-1} de $GA(E)$.

Si f est une application de E dans E on dit qu'un point $x \in E$ est **fixe** par f (ou que f fixe x) si on a $f(x) = x$, on dit qu'une partie X de E est **fixe** par f si tous ses points le sont. On dira ici qu'une partie X de E est **stable** par f si on a $f(X) = X$; si $f \in GA(E)$ et si X est réunion finie de droites et de points, il suffit pour cela de vérifier $f(X) \subset X$.

Si \vec{v} est un vecteur de \vec{E} on note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur \vec{v} .

Si $a \in E$ on appelle **symétrie centrale** de centre a (ou encore homothétie de centre a et de rapport -1) l'application σ_a qui à x associe y avec $\overrightarrow{ay} = -\overrightarrow{ax}$.

Si Δ est une droite affine et \vec{D} une direction de droite distincte de $\vec{\Delta}$, la **projection** de E sur Δ , parallèlement à \vec{D} est l'application $p : E \rightarrow \Delta$ qui au point x de E associe l'unique point m de Δ tel que $\overrightarrow{xm} \in \vec{D}$; la **symétrie oblique** d'axe Δ et de direction \vec{D} est l'application $\sigma = \sigma(\Delta, \vec{D}) : E \rightarrow E$ définie comme suit : si $x \in E$ et si on appelle m sa projection sur Δ parallèlement à \vec{D} , on pose $\sigma(x) = y$, avec $\overrightarrow{my} = -\overrightarrow{mx}$.

Le cardinal d'un ensemble X est noté $|X|$.

0. Question préliminaire.

Soit $t = t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur \vec{v} et soit $g \in GA(E)$. Montrer que le conjugué gtg^{-1} est la translation de vecteur $\vec{g}(\vec{v})$. A quelle condition g et t commutent-elles ?

I. Les affinités.

Soient Δ une droite affine, \vec{D} une direction de droite distincte de $\vec{\Delta}$ et λ un réel différent de 0 et de 1. On appelle **affinité** d'axe Δ , de direction \vec{D} et de rapport λ

l'application $A = A(\Delta, \vec{D}, \lambda) : E \rightarrow E$ définie comme suit : si $x \in E$ et si on appelle m sa projection sur Δ parallèlement à \vec{D} , on pose $A(x) = y$, avec $\vec{m}\vec{y} = \lambda\vec{m}\vec{x}$.

1) Soit $A = A(\Delta, \vec{D}, \lambda)$ une affinité, soit a un point de Δ et soient \vec{u} et \vec{v} des vecteurs non nuls de $\vec{\Delta}$ et \vec{D} , de sorte que (\vec{u}, \vec{v}) est une base de \vec{E} .

a) Déterminer les points fixes de A .

b) Soit $x \in E$, on pose $\vec{a}\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Soit $y = A(x)$. Montrer la formule: $\vec{a}\vec{y} = \alpha\vec{u} + \lambda\beta\vec{v}$. En déduire que A est une application affine. Quelle est la matrice de \vec{A} dans la base (\vec{u}, \vec{v}) ? Montrer que A est bijective et déterminer A^{-1} . Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de \vec{A} . Quelle est la nature de A si $\lambda = -1$?

c) Déterminer les droites stables par A .

2) Soit $A \in GA(E)$ une application affine, ayant un point fixe a , et telle que \vec{A} admette les valeurs propres 1 et λ avec $\lambda \neq 1$ (une telle application linéaire est appelée une **dilatation**). Montrer que A est une affinité que l'on précisera.

¶3) Soit $g \in GA(E)$. On suppose que \vec{g} est une dilatation (cf. 2). Montrer que g s'écrit, de manière unique, sous la forme $g = At_{\vec{v}}$ où A est une affinité d'axe Δ et $t_{\vec{v}}$ une translation de vecteur $\vec{v} \in \vec{\Delta}$. Montrer qu'on a $At_{\vec{v}} = t_{\vec{v}}A$.

II. Les transvections.

On appelle **transvection** d'axe Δ une application **affine** T de E dans E , différente de l'identité, qui fixe la droite Δ et qui laisse stable une droite Δ' parallèle à Δ et distincte de Δ .

1) Soit T une transvection d'axe Δ , soient a et b deux points distincts de Δ et c un point de Δ' . On pose $\vec{a}\vec{b} = \vec{u}$ et $\vec{a}\vec{c} = \vec{v}$, de sorte que (\vec{u}, \vec{v}) est une base de \vec{E} .

a) Montrer qu'on a $\vec{T}(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\vec{T}(\vec{v}) = \vec{v} + \lambda\vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$.

b) Quelle est la matrice de \vec{T} dans la base (\vec{u}, \vec{v}) ? Montrer que T est bijective. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de \vec{T} , ainsi que son déterminant. Cette application linéaire est-elle diagonalisable ?

c) Déterminer les points fixes de T et les droites stables par T .

2) Soit $T \in GA(E)$ une application affine, ayant un point fixe a , et telle que \vec{T} admette la valeur propre 1 double et soit distincte de $\text{Id}_{\vec{E}}$ (une telle application linéaire est appelée une **transvection vectorielle**). Montrer que T est une transvection dont on précisera l'axe.

3) Soit T une transvection d'axe Δ .

a) Soit \vec{v} un vecteur de $\vec{\Delta}$. Montrer que T et $t_{\vec{v}}$ commutent et que $Tt_{\vec{v}}$ laisse stables toutes les droites parallèles à Δ .

b) Soit \vec{v} un vecteur n'appartenant pas à $\vec{\Delta}$. Soit $g = Tt_{\vec{v}}$. Montrer que \vec{g} est une transvection vectorielle, mais que g ne peut pas s'écrire sous la forme $g = T't'$ où T' est une transvection et t' une translation de vecteur parallèle à l'axe de T' .

III. Composition, conjugaison, commutation des affinités et des transvections.

1) Montrer que la composée de deux affinités de même direction et d'axes parallèles est une affinité ou une translation. Dans le cas d'une translation on en précisera le vecteur.

2) Soit $A = A(\Delta, \vec{D}, \lambda)$ une affinité et soit $g \in GA(E)$.

a) Montrer que le conjugué gAg^{-1} est une affinité dont on précisera l'axe, la direction et le rapport.

b) A quelle condition A et g commutent-elles ? Traiter explicitement le cas où g est une translation, une homothétie, une affinité, une transvection.

c) Soient A et A' deux affinités de même rapport. Montrer qu'il existe $g \in GA(E)$ tel que $A' = gAg^{-1}$.

3) a) Soit T une transvection et soit $g \in GA(E)$. Montrer que gTg^{-1} est une transvection dont on précisera l'axe. ¶ Déterminer les g qui commutent avec T .

¶ b) Soient T et T' deux transvections. Montrer qu'il existe un élément $g \in GA(E)$ tel que $T' = gTg^{-1}$ (on pourra commencer par étudier la conjugaison des transvections vectorielles). Peut-on imposer que \vec{g} soit de déterminant égal à 1 ?

IV. Décomposition des applications affines.

1) Soit $g \in GA(E)$ une application affine distincte de l'identité qui fixe deux points distincts a et b de E . Montrer que g fixe la droite $\langle ab \rangle$, puis que g est une affinité ou une transvection.

2) Soit $g \in GA(E)$ et soient a et b deux points distincts de E .

a) Montrer qu'il existe une translation t telle que $tg(a) = a$, puis qu'il existe une affinité A telle que Atg admette a et b comme points fixes.

b) Montrer que g peut s'écrire sous la forme $g = t'A'f$ où f est une affinité ou une transvection ou l'identité, A' une affinité et t' une translation.

3) a) Montrer que toute translation peut s'écrire comme composée de deux affinités (cf. III 1).

b) Montrer que toute transvection peut s'écrire comme composée de deux affinités (utiliser les écritures matricielles).

c) Soit g un élément de $GA(E)$. Montrer que g peut s'écrire comme composé d'un nombre fini d'affinités. Le résultat analogue est-il vrai avec les transvections ?

V. Transformations laissant stable une partie : généralités.

Soit X une partie non vide de E . On pose

$$G(X) = \{f \in GA(E) \mid f(X) = X\}.$$

1) Montrer que $G(X)$ est un sous-groupe de $GA(E)$.

2) On suppose X fini. Montrer qu'il existe un point a de E laissé fixe par tous les éléments de $G(X)$. Cette propriété subsiste-t-elle si X n'est pas fini ?

3) On suppose X fini et non contenu dans une droite. Montrer que $G(X)$ est fini. Cette propriété subsiste-t-elle si X n'est pas fini ou si X est fini mais contenu dans une droite ?

4) On suppose $G(X)$ fini. Soit $g \in G(X)$, $g \neq \text{Id}_E$.

a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $g^n = \text{Id}_E$ et $\vec{g}^n = \text{Id}_{\vec{E}}$. Montrer que g a un point fixe (on pourra considérer les transformés $g^i(a)$ d'un point a , pour $i = 0, 1, \dots, n-1$).

b) On suppose que \vec{g} a une valeur propre réelle. Montrer que les deux valeurs propres de \vec{g} sont réelles et égales à 1 ou -1 . Montrer que \vec{g} est diagonalisable (on pourra trianguler \vec{g} et calculer sa puissance n -ième). Donner les formes diagonales possibles pour \vec{g} et en déduire que g est une symétrie oblique ou une symétrie centrale (on utilisera a)).

c) Le groupe $G(X)$ peut-il contenir des translations, des transvections, des affinités ?

5) Soient X et X' deux parties de E . On suppose qu'il existe $g \in GA(E)$ tel que $g(X) = X'$. Montrer que les groupes $G(X)$ et $G(X')$ sont isomorphes (utiliser la conjugaison).

VI. Transformations laissant stable une partie : exemples.

1) On suppose que $X = \{a, b, c\}$ est formé de trois points distincts et non alignés. Montrer que $|G(X)| = 6$ et que $G(X)$ est isomorphe au groupe des permutations S_3 de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

2) On suppose que $X = \{a, b, c, d\}$ où a, b, c, d sont quatre points distincts tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On se propose de déterminer le groupe $G(X)$ (que l'on pourra identifier à un sous-groupe du groupe des permutations de $\{a, b, c, d\}$).

a) On suppose que $G(X)$ contient un élément g qui vérifie $g(a) = b, g(b) = c, g(c) = a$ et $g(d) = d$. Montrer que l'on a $g^3 = \text{Id}_E$. Montrer que d est l'isobarycentre des points a, b, c (sinon, si e est cet isobarycentre, et si $d \neq e$, montrer que la droite $\langle de \rangle$ est fixe par g , en déduire que \vec{g} admet la valeur propre 1, et conclure par V 4.b). On dira que X est un **triangle centré**.

b) On suppose que $G(X)$ contient un élément g qui vérifie $g(a) = b, g(b) = a, g(c) = c$ et $g(d) = d$. Montrer que l'on a $g^2 = \text{Id}_E$. Montrer que g est la symétrie oblique d'axe $\langle cd \rangle$ et de direction $\vec{\mathbf{R}ab}$. Montrer qu'alors le milieu de ab est sur $\langle cd \rangle$. On dira que X est un **cerf-volant**.

c) On suppose que $G(X)$ contient un élément g qui vérifie $g(a) = b, g(b) = a, g(c) = d$ et $g(d) = c$. Montrer que l'on a $g^2 = \text{Id}_E$. Montrer que g est soit une symétrie centrale, soit une symétrie oblique.

Dans le premier cas, montrer que les points a, c, b, d , dans cet ordre, forment un **parallélogramme** (i.e., qu'on a $\vec{ac} = \vec{db}$). On dira aussi, abusivement, que X est un parallélogramme.

Dans le second cas, montrer que les droites $\langle ab \rangle$ et $\langle cd \rangle$ sont parallèles (on dira que X est un **trapèze**).

d) On suppose que $G(X)$ contient un élément g qui vérifie $g(a) = b, g(b) = c, g(c) = d$ et $g(d) = a$. Montrer que l'on a $g^4 = \text{Id}_E$. En considérant les valeurs propres de \vec{g} , montrer que g^2 est une symétrie centrale et en déduire que X est un parallélogramme.

¶ e) Préciser le groupe $G(X)$ (et en particulier son cardinal) selon que X est un parallélogramme, un triangle centré, un trapèze, un cerf-volant ou rien de tout cela (attention, X peut être de deux types à la fois). Les points a, b, c non alignés étant donnés, à quelle condition sur le point d le groupe $G(X)$ est-il réduit à l'élément neutre ?