PROBLÈME SUR LES ISOMÉTRIES PLANES

Dans tout ce qui suit on désigne par E un plan affine euclidien. La distance de deux points est notée $d(x, y)$. La boule fermée de centre a et de rayon R est notée $B(a, R)$. On note $Is^+(E)$ le groupe des déplacements de E et $Is_a^+(E)$ le sous-groupe des déplacements qui laissent fixe le point $a \in E$. Si S est une partie d'un groupe G on note $\langle S \rangle$ le sous-groupe de G engendré par S, i.e., le plus petit sous-groupe de G contenant S. Le but du problème est de prouver le théorème suivant :

Théorème. *Soient a, b deux points distincts de E. Le sous-groupe de $Is^+(E)$ engendré par $Is_a^+(E)$ et $Is_b^+(E)$ est égal à $Is^+(E)$.*

On pose $u = d(a, b)$ et $G = \langle\, Is_a^+(E) \cup Is_b^+(E) \,\rangle$. Soit Ω l'orbite de a sous l'action de G, c'est-à-dire l'ensemble des transformés $g(a)$ pour $g \in G$.

1) Montrer que les éléments de $Is_a^+(E)$ sont les rotations de centre a.

2) Montrer que Ω est stable par G.

3) Montrer que si Ω contient un point c il contient les cercles de centres a et b passant par c. Montrer que Ω contient le cercle de centre b passant par a.

4) On suppose que Ω contient un cercle C de rayon R passant par a (resp. par b). Montrer que Ω contient la boule fermée $B(a, 2R)$ (resp. $B(b, 2R)$). (On pourra montrer que pour tout réel r tel que $0 \leq r \leq 2R$ il existe un point $m \in C$ tel que $d(a, m) = r$ et on utilisera 3.)

5) Soit d un réel $\geq u = d(a, b)$. On suppose que Ω contient la boule $B(a, d)$ (resp. $B(b, d)$). Montrer que Ω contient $B(b, d + u)$ (resp. $B(a, d + u)$). (On appliquera 4 à un cercle convenable.)

6) Montrer par récurrence sur n que Ω contient les boules $B(a, 2nu)$ et $B(b, (2n+1)u)$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que l'on a $\Omega = E$.

7) Montrer que G contient toutes les rotations du plan. (Utiliser 7 et la conjugaison).

8) Montrer que G contient toutes les translations du plan. (Utiliser, par exemple, des symétries centrales.)

9) Conclure.