

Quelques éléments de théorie des graphes

Daniel PERRIN

1 Introduction

Avertissement : Ces notes étaient au départ conçues pour mon usage personnel. Je les mets à la disposition du lecteur, qui est prié de ne pas râler si ce texte n'est pas parfait.

Les graphes ont fait leur apparition dans les programmes de terminale ES 2002 et, par voie de conséquence, dans les titres des exposés et des dossiers de CAPES.

On donne ici le b-a ba indispensable sur la théorie des graphes, en vue de traiter exposé et dossiers de CAPES sur la question. On renvoie aux références : [CG], [A], [S], [T], mais aussi aux livres de terminale ES, aux exercices sur le serveur WIMS, etc. pour des compléments.

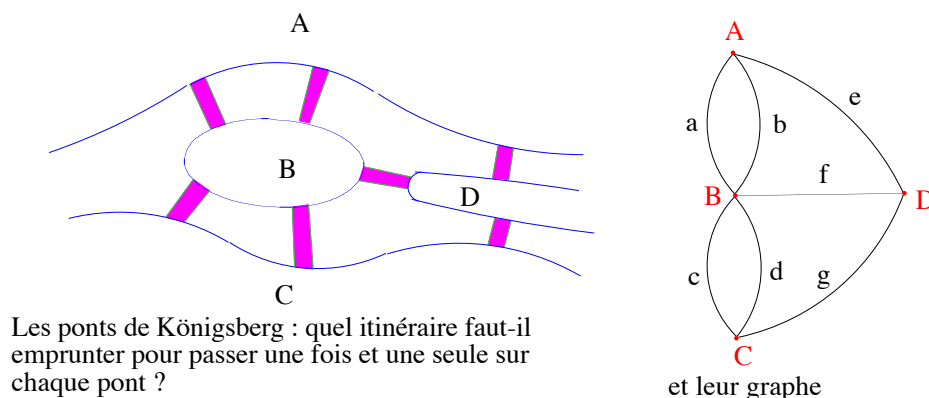


FIGURE 1 – Les ponts de Königsberg

L'exemple incontournable pour introduire la théorie des graphes est le problème des ponts¹ de Königsberg (Euler, 1736). Le graphe apporte une **simplification** : les régions deviennent des points, les ponts des arêtes et cela va valoir dès qu'on a une relation entre des objets. Les graphes c'est de la combinatoire, pas de la géométrie (les intersections, les longueurs, la forme des arêtes n'ont aucune importance, sauf pour la lisibilité de la figure).

1. On peut jouer aussi avec les ponts de Paris, voir à la fin.

2 Les différentes sortes de graphes

On donne ici des définitions formelles, en termes ensemblistes. Il s'agit de savoir de quoi l'on parle. Bien entendu, ces définitions ne doivent pas être données ainsi en Terminale ES et, à tous les niveaux, les dessins sont essentiels.

2.1 Définition. On appelle **graphe** (ou **graphe simple**) la donnée d'un ensemble (fini) X de points, les **sommets**, et d'un ensemble $A \subset \mathcal{P}_2(X)$ (sous-ensemble de l'ensemble des parties à deux éléments de X), les **arêtes**. Lorsque $\{x, y\}$ est une arête, on dit que x, y sont les extrémités de cette arête, on joint x et y par un trait et on dit que x, y sont **adjacents**. On note le graphe $G = (X, A)$.

2.2 Exemples.

1) Le graphe de l'amitié (supposée réciproque). Dans un ensemble X de personnes, on relie x et y s'ils sont amis. De même, un réseau d'ordinateurs, avec une arête s'ils sont connectés, un tournoi de foot, d'échecs, etc. avec une arête s'il y a un match, etc.

2) On appelle graphe complet le graphe $(X, \mathcal{P}_2(X))$. Dans le cas de l'amitié cela signifie que tout le monde est ami avec tout le monde.

3) Explicitons un exemple :

Ici, on a $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

et $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.

(Il manque seulement les arêtes $\{1, 4\}$ et $\{1, 5\}$ pour que le graphe soit complet.)

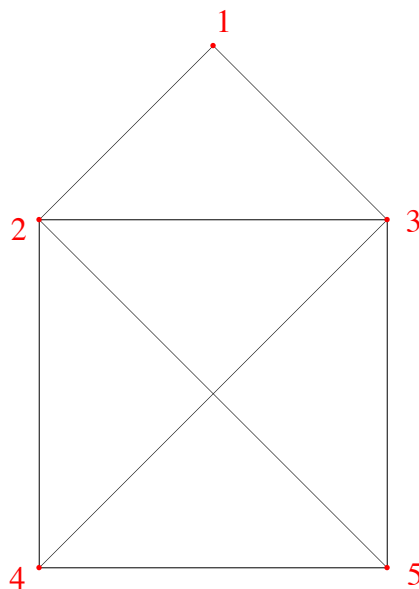


FIGURE 2 – L'enveloppe

2.3 Remarque. Ici, il n'y a qu'une arête entre deux points et les arêtes sont dans les deux sens (car une paire c'est symétrique : $\{x, y\} = \{y, x\}$), mais, patience.

2.4 Définition. On appelle **multigraphe** la donnée d'un ensemble X et d'un ensemble A , muni d'une application $\varphi : A \rightarrow \mathcal{P}_2(X)$. On dessine une arête entre x et y si $\{x, y\}$ est dans l'image de φ et plus précisément, autant de traits qu'il y a de $a \in A$ tels que $\varphi(a) = \{x, y\}$.

La différence avec la notion précédente c'est que φ n'est pas nécessairement injective, donc que la paire $\{x, y\}$ peut être atteinte plusieurs fois, ce qui signifie qu'il y a plusieurs arêtes entre x et y .

2.5 Exemples. 1) Les ponts de Königsberg. Dans ce cas on a $X = \{A, B, C, D\}$, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et l'application φ est définie par $\varphi(a) = \varphi(b) = \{A, B\}$, $\varphi(c) = \varphi(d) = \{B, C\}$, $\varphi(e) = \{A, D\}$, $\varphi(f) = \{B, D\}$ et $\varphi(g) = \{C, D\}$.

2) Le graphe des rues d'une ville ou (mieux) des chemins de randonnée : on peut contourner un obstacle (comme un lac ou une montagne) par la droite ou par la gauche.

2.6 Définition. On appelle **graphe orienté** la donnée d'un ensemble X et d'un sous-ensemble A de $X \times X - \Delta$ (on enlève la diagonale). Si (x, y) est dans A on trace une arête avec une flèche de x vers y et on appelle plutôt arcs les éléments de A .

2.7 Exemple. L'exemple type est celui des rues d'une ville, avec des sens interdits. On peut aussi penser au graphe de l'amour dans *Andromaque* : Oreste aime Hermione, qui aime Pyrrhus, qui aime Andromaque, mais à chaque pas l'amour n'est pas partagé!

3 Le théorème des poignées de main

3.1 Définition. Soit $G = (X, A)$ un graphe (simple ou non). L'ordre de G est le cardinal $|X|$. Le **degré** d'un sommet $x \in X$ est le nombre d'arêtes contenant x . On le note $d(x)$. Dans le cas orienté on a deux variantes $d^+(x)$ (les arêtes issues de x) et $d^-(x)$ (les arêtes arrivant à x).

3.1 Énoncé du théorème

3.2 Théorème. Soit (X, A) un graphe (simple). On a la formule :

$$2|A| = \sum_{x \in X} d(x).$$

Dans ce théorème $d(x)$ est le nombre de personnes à qui x serre la main et $|A|$ le nombre total de poignées de mains.

Démonstration. 1) Une version élémentaire d'abord. On compte les arêtes en un sommet x fixé. Il y en a $d(x)$. En tous les sommets cela fait donc $\sum_{x \in X} d(x)$. Mais en procédant ainsi chaque arête est comptée deux fois, une fois à chacune de ses extrémités, d'où le résultat en divisant par 2.

2) Une façon plus pédante (mais qui peut être plus efficace dans des situations plus complexes) est la suivante. On montre d'abord un lemme :

3.3 Lemme. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application. On a $|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)|$.

Démonstration. C'est évident en notant qu'on a $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$ (union disjointe). Les $f^{-1}(y)$ s'appellent les fibres de f .

On considère alors le "graphe" de l'incidence : $I = \{(x, a) \in (X \times A) \mid x \in a\}$. Il est muni de deux projections évidentes $p : I \rightarrow X$ et $q : I \rightarrow A$ et on calcule $|I|$ de deux manières (par piles et par tranches comme on dit quand on applique le théorème de Fubini). On a ainsi $|I| = \sum_{x \in X} |p^{-1}(x)| = \sum_{x \in X} d(x)$ et $|I| = \sum_{a \in A} |q^{-1}(a)| = \sum_{a \in A} 2 = 2|A|$.

3.2 Applications

1) Est-il possible de relier 15 ordinateurs en réseau de sorte que chacun soit relié à exactement 3 autres ?

2) Une ligue de football comprenant 11 clubs organise un tournoi. Pour gagner du temps on décide que chaque équipe ne jouera que la moitié des matches possibles. Comment organiser le tournoi ?

4 Le théorème d'Euler

4.1 Encore quelques définitions

4.1 Définition. Soit G un graphe ou un multigraphe. Une **chaîne** joignant deux sommets x et y est une suite finie $x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, x_{n-1}, a_n, x_n$ (avec $n \geq 0$) dans laquelle les x_i sont des sommets, avec $x_0 = x$ et $x_n = y$ et où a_i est une arête joignant x_{i-1} et x_i . La **longueur** d'une chaîne est son nombre d'arêtes. Un **cycle** est une chaîne qui va de x à x . Un graphe est dit **connexe** si deux points peuvent toujours être joints par une chaîne. Il y a une notion analogue pour un graphe orienté, mais on dit **chemin** plutôt que chaîne et **circuit** au lieu de cycle.

4.2 Remarques.

1) Pour un graphe simple il est inutile d'indiquer les arêtes a_i , il suffit de préciser que deux sommets consécutifs de la chaîne sont adjacents.

2) Attention, il ne suffit pas de dire qu'une chaîne est une suite d'arêtes telle que deux arêtes consécutives ont un sommet en commun. Exemple, la configuration en Y : $X = \{a, b, c, d\}$, avec les arêtes $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ et la pseudo-chaîne : $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$.

Attention aussi, certains (dont Cogis-Robert), interdisent d'avoir $a_i = a_j$ pour $i \neq j$. Je ne le ferai pas ici.

4.3 Définition. Soit $G = (X, A)$ un graphe ou un multigraphe. Une chaîne (resp. un cycle) joignant deux sommets x et y est dite **eulérienne** (resp. eulérien) si elle emprunte une fois et une seule chaque arête.

4.2 Le théorème d'Euler

4.2.1 Énoncé et preuve du sens direct

Le problème des ponts de Königsberg se traduit en demandant s'il existe une chaîne eulérienne (voire un cycle si l'on revient au point de départ).

4.4 Théorème. (Euler) Soit $G = (X, A)$ un multigraphe connexe. Il existe une chaîne eulérienne dans G si et seulement si G a au plus deux sommets de degré impair. Précisément, il y a un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair et une chaîne (non cyclique) si et seulement si il y a deux² sommets d'ordre impair. La chaîne joint alors ces deux sommets.

Démonstration. Supposons qu'il existe une chaîne eulérienne qui aille de x_1 à x_m en empruntant une fois et une seule chaque arête. On considère un sommet x différent de l'origine et de l'extrémité. Comme le graphe est connexe, il y a une arête qui passe par x . Le sommet x apparaît donc un certain nombre de fois dans la chaîne en x_{i_1}, \dots, x_{i_r} . À chaque fois, il arrive une arête en x et il en repart une. Comme toutes les arêtes sont utilisées, on voit que $d(x)$ est pair. Donc seuls x_1 et x_m peuvent être de degré impair et ils le sont si et seulement si ils sont distincts.

4.2.2 Application

Dans le problème de Königsberg, les quatre sommets sont d'ordre impair, de sorte qu'il n'y a pas de solution. Voir aussi l'exemple de l'enveloppe qui admet une solution, mais uniquement si l'on relie les sommets du bas!

2. Et s'il y en a un seul? Ah, ah!

4.2.3 Un algorithme (qui démontre la réciproque)

Pour construire un cycle eulérien³, on procède de la façon suivante. On suppose $|X| \geq 2$.

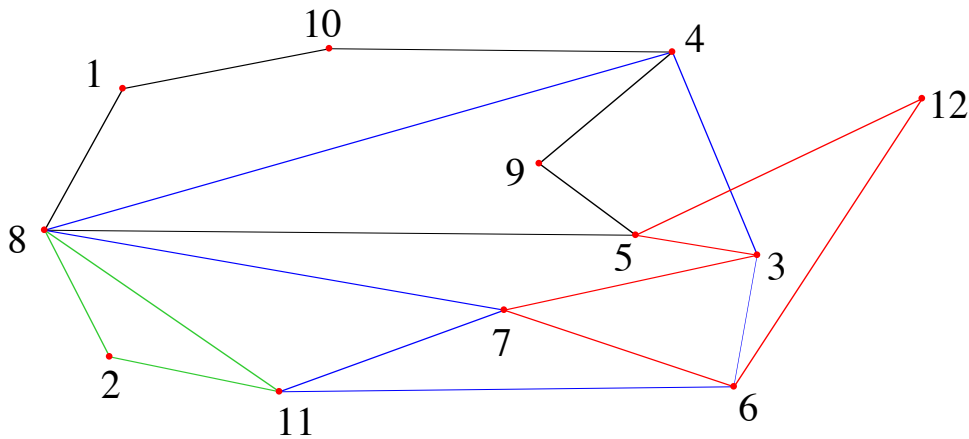


FIGURE 3 – Construction d'un chemin Eulérien

On part d'un sommet $x = x_1$. *Sur l'exemple, on part⁴ du sommet 1.* Comme le graphe est connexe, il y a une arête issue de x_1 (sinon x_1 est tout seul). Cette arête aboutit en x_2 . *Ici, on prend $x_2 = 8$.* Il y a une arête qui repart de x_2 (car x_2 est un sommet pair). On construit ainsi une chaîne $\gamma = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ maximale⁵. Je dis que l'on a alors $x_r = x_1$. En effet, puisque la chaîne est maximale, toutes les arêtes passant par x_r sont utilisées dans γ . Or, si $x_r \neq x_1$, il y a un nombre pair d'arêtes passant par x_r pour chaque fois que $x_r = x_i$ avec $1 < i < r$, plus l'arête $\{x_{r-1}x_r\}$ ce qui contredit le fait que x_r est pair. La chaîne γ est donc un cycle. *Ici, c'est 1, 8, 5, 9, 4, 10, 1.*

Si ce cycle est eulérien on a fini. Sinon, l'une des arêtes inutilisées a un sommet dans γ . (Si les sommets des arêtes inutilisées étaient tous hors de γ le graphe ne serait pas connexe, on ne pourrait joindre un sommet de γ à un sommet non dans γ .) Soit donc $x_i := y_1$ un sommet de γ avec une arête $\{y_1, y_2\}$ non dans γ . *Sur l'exemple, on a $y_1 = 5$.* Le sommet y_2 étant pair, il y a une arête issue de y_2 qui n'est ni la précédente, ni une arête de γ (les arêtes de γ utilisent un nombre pair de degrés en chaque

3. Je traite le cas de tous les sommets de degrés pairs, pour l'autre il suffit d'ajouter une arête fictive entre les sommets d'ordre impair.

4. La procédure utilisée ici est particulièrement maladroite, mais comme on va la confier à une machine ...

5. Au sens où l'on ne peut pas la prolonger à partir de x_r , mais, attention, la chaîne n'est pas de longueur maximale.

sommet). On construit alors une chaîne y_1, y_2, \dots, y_s , dont les arêtes sont distinctes de celles de γ , maximale et le même raisonnement que ci-dessus montre qu'on a nécessairement $y_1 = y_s$. On a ici le cycle 5, 3, 7, 6, 12, 5. Mais alors on obtient un nouveau cycle, plus long que γ , en insérant le second cycle dans le premier : $x_1, x_2, \dots, x_i = y_1, y_2, \dots, y_s = x_i, x_{i+1}, \dots, x_r = x_1$, ici, 1, 8, 5, 3, 7, 6, 12, 5, 9, 4, 10, 1. À chaque étape, le nombre d'arêtes inutilisées diminue strictement. Comme X est fini, le processus finit par donner un cycle qui utilise toutes les arêtes, donc un cycle eulérien. Sur l'exemple on commence par le cycle noir, puis rouge, puis bleu, puis vert. On obtient à la fin le cycle eulérien : 1, 8, 11, 2, 8, 5, 3, 7, 6, 12, 5, 9, 4, 8, 7, 11, 6, 3, 4, 10, 1.

5 Matrice d'adjacence et nombre de chemins

5.1 Définition

5.1 Définition. Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté d'ordre n . On peut numéroter $X = \{1, 2, \dots, n\}$. La **matrice d'adjacence** de G est la matrice $n \times n$ dont le coefficient $m_{i,j}$ vaut 1 si (i, j) est une arête et 0 sinon.

5.2 Remarques.

- 1) La matrice M est symétrique pour un graphe simple, avec des 0 sur la diagonale. Pour un graphe orienté il y a encore des zéros sur la diagonale, mais la matrice n'est pas symétrique en général.
- 2) Il y a des variantes évidentes pour les multigraphes (là il peut y avoir des termes diagonaux et s'il y a plusieurs arêtes de x à y , le coefficient de la matrice est le nombre d'arêtes de x à y).

5.2 Puissance

Le résultat suivant est facile, mais capital :

5.3 Théorème. Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté, $X = \{1, 2, \dots, n\}$, soit M sa matrice d'adjacence et soit M^r la puissance r -ième de M . Alors le terme d'indices i, j de M^r est le nombre de chemins de longueur r allant de i à j .

Démonstration. C'est une récurrence sur r . Pour $r = 1$ c'est clair. Passons de r à $r + 1$. Posons $S = (s_{i,j}) = M^r$. Pour aller de i à j en $r + 1$ pas on va d'abord de i à un sommet k en r pas, puis de k à j en un pas. Pour aller de i à k en r pas il y a $s_{i,k}$ chemins possibles par l'hypothèse de récurrence. Pour aller de k à j il y en a $m_{k,j}$. Pour aller de i à j via k il y a donc $s_{i,k}m_{k,j}$

chemins et, en tout, de i à j : $\sum_{k=1}^n s_{i,k} m_{k,j}$ ce qui est bien le terme i, j de $SM = M^{r+1}$.

5.4 Remarque. Lorsque la puissance de la matrice montre qu'il y a des chaînes de longueur r allant de a à b , encore faut-il les trouver. Un algorithme pour cela est le suivant. On regarde les chaînes γ_i de longueur $r - 1$ issues de a . Soit c_i l'extrémité de γ_i . Si c_i n'est pas adjacent à b on jette γ_i . Sinon on considère les chaînes de longueur $r - 2$ issues de a et on garde celles dont l'extrémité est adjacente à c_i , etc.

6 Coût dans un graphe valué (ou pondéré)

6.1 Définition

6.1 Définition. On appelle **graphe valué ou pondéré** la donnée d'un graphe orienté $G = (X, A)$ et d'une application $\gamma : A \rightarrow \mathbf{R}^+$ (appelée **application poids** ou **coût**). On indique sur chaque arête son poids (ou son coût). Le coût d'un chemin Γ est la somme des coûts de ses arêtes, on le note $c(\Gamma)$. On note $\gamma(i, j)$ au lieu de $\gamma((i, j))$ et on convient que $\gamma(i, j)$ vaut ∞ s'il n'y a pas d'arête joignant i à j .

6.2 Exemples. Tous les problèmes de circulation, avec longueur, temps, coût, ou dénivelée, l'organisation des tâches d'une entreprise, etc.

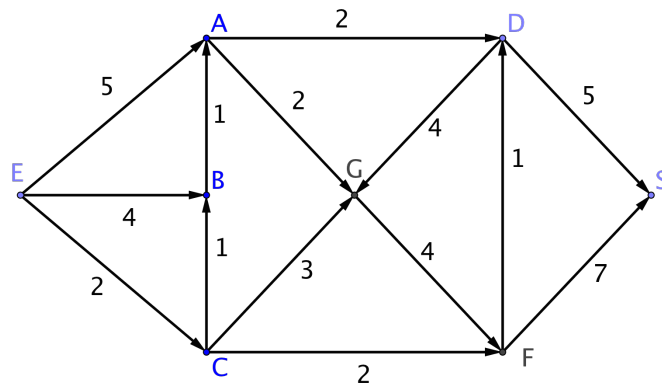


FIGURE 4 – Un graphe pondéré

6.2 L'algorithme de Dijkstra

Le problème essentiel de la théorie est la recherche de chemins de coût minimum reliant deux sommets donnés. Un algorithme important pour y parvenir est l'algorithme de Dijkstra. J'explique cet algorithme sur l'exemple du graphe ci-dessus, mais j'en donne aussi une démonstration. Pour le CAPES, on peut se contenter de donner la preuve des cas initiaux : φ_1 et φ_2 .

6.2.1 Initialisation de l'algorithme

On part du sommet E et on cherche le chemin le plus court (i.e. le moins coûteux) de E aux autres sommets. Pour cela on fait un tableau, dont les colonnes correspondent aux sommets et les lignes à des coûts. On commence par une ligne zéro, dont les entrées $\varphi_0(M)$ sont les coûts des chemins en 0 pas de E à M . On a donc 0 en E et ∞ en les autres. On souligne $E = x_0$ et on l'appelle le sommet actif.

6.2.2 Premier pas

Sur la première ligne, on indique, en dessous de chaque sommet M , le coût $\varphi_1(M)$ du chemin en un pas de E à M (le coût est ∞ s'il n'y a pas d'arête). On choisit le sommet de moindre coût (ici $x_1 = C$), c'est le nouveau sommet actif et on le souligne.

6.2.3 Preuve du premier pas

6.3 Proposition. *Le chemin de moindre coût de $E = x_0$ à $C = x_1$ est l'arête (E, C) .*

Démonstration. En effet, si on considère un chemin Γ de E à C , et si on appelle M le premier point après E sur ce chemin, on a $c(\Gamma) \geq \gamma(E, M) = \varphi_1(M) \geq \varphi_1(C)$.

6.2.4 Deuxième pas

On indique pour tous les sommets M un nouveau coût $\varphi_2(M)$ qui est le minimum entre le chemin en un pas et le chemin en deux pas passant par C . Autrement dit, on pose :

$$(*) \quad \varphi_2(M) = \text{Min}(\varphi_1(M), \varphi_1(C) + \gamma(C, M)).$$

On notera que pour E et C rien ne change et on s'abstient de répéter les coûts obtenus. On regarde alors parmi les sommets autres que $E = x_0$ et

$C = x_1$ celui de coût indiqué minimum. Ici c'est $B = x_2$, nouveau sommet actif. Voici le tableau obtenu à ce stade :

	E	A	B	C	D	F	G	S
φ_0	<u>0</u>	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
φ_1		$5E$	$4E$	<u>$2E$</u>	∞	∞	∞	∞
φ_2		$5E$	<u>$3E$</u>		∞	4	5	∞

On a aussi indiqué, à côté du coût de chaque point, le point qui précédait dans le chemin choisi.

6.2.5 Preuve du second pas

6.4 Proposition. *Le coût $\varphi_2(B)$ est le coût minimum d'un chemin allant de $E = x_0$ à $B = x_2$.*

Démonstration. D'abord, il existe un chemin (en un ou deux pas) admettant ce coût (ici c'est le chemin en un pas). Ensuite, si on a un chemin Γ joignant $E = x_0$ à $B = x_2$, il y a deux cas :

- Le successeur de E est $C = x_1$. On a le chemin $E - C - M - \dots - B$ et la formule $c(\Gamma) \geq \gamma(E, C) + \gamma(C, M) = \varphi_1(C) + \gamma(C, M) \geq \varphi_2(M)$, par (*). Mais par minimalité de B , cette quantité est bien $\geq \varphi_2(B)$.

- Le successeur de E est un point $M \neq C$. On a donc $c(\Gamma) \geq \gamma(E, M) = \varphi_1(M) \geq \varphi_2(M)$ par (*). On conclut encore avec la minimalité de $\varphi_2(B)$.

6.2.6 La suite de l'algorithme

On recommence la procédure en indiquant sur chaque sommet M le minimum $\varphi_3(M)$ entre le coût indiqué précédemment et celui obtenu en faisant un pas à partir de B , et on souligne le sommet (s'il y en a plusieurs on en choisit un quelconque, par exemple selon l'ordre alphabétique) de coût minimum parmi ceux qui ne le sont pas déjà. On indique, à côté du coût de chaque sommet, le point qui précédait dans le chemin choisi. On poursuit cet algorithme jusqu'à avoir épuisé tous les sommets.

Voilà le tableau des résultats successifs (on a souligné le sommet actif à chaque pas, i.e. celui de coût minimum, éventuellement choisi parmi plusieurs) :

	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>S</i>
φ_0	<u>0</u>	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
φ_1		<u>5E</u>	<u>4E</u>	<u>2E</u>	∞	∞	∞	∞
φ_2		<u>5E</u>	<u>3E</u>		∞	<u>4C</u>	<u>5C</u>	∞
φ_3		<u>4B</u>			∞	<u>4C</u>	<u>5C</u>	∞
φ_4					<u>6A</u>	<u>4C</u>	<u>5C</u>	∞
φ_5					<u>5F</u>		<u>5C</u>	<u>11F</u>
φ_6							<u>5C</u>	<u>10D</u>
φ_7								<u>10D</u>

(On notera qu'à l'étape 3 on a deux choix de points actifs possibles : *A* ou *F*.)

Nous allons montrer que le chemin minimum pour aller de *E* à *S* est de coût 10. De plus l'algorithme fournit un trajet de coût minimal obtenu en lisant le tableau en sens inverse. La dernière étape avant *S* est fournie par le sommet actif lors du changement de 11 à 10 pour *S*, c'est donc *D*, puis on regarde le changement pour *D* de 6 à 5, le sommet actif était *F* et celui pour *F* de ∞ à 4, le sommet actif était *C* et le chemin est donc *ECFDS*.

6.3 Formalisation et preuve de l'algorithme de Dijkstra

Soit $G = (X, A, \gamma)$ un graphe orienté pondéré. On pose $X = \{0, 1, \dots, n\}$. On suppose X **connexe** (sinon, certains trajets sont impossibles).

6.3.1 Description de l'algorithme

À l'étape k , avec $0 \leq k \leq n$, cet algorithme produit une fonction $\varphi_k : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ appelée coût provisoire d'indice k et un point x_k (les x_k sont les points actifs ou "soulignés") de X construits de la façon suivante.

Pour $k = 0$ on pose $x_0 = 0$, $\varphi_0(0) = 0$ et $\varphi_0(x) = \infty$ pour $x \neq 0$.

Le passage du cran k au cran $k + 1$ s'effectue ainsi :

- On pose $\varphi_{k+1}(x_i) = \varphi_k(x_i)$ pour $i = 0, \dots, k$ et, pour $x \neq x_1, \dots, x_k$,

$$(*) \quad \varphi_{k+1}(x) = \text{Min}(\varphi_k(x), \varphi_k(x_k) + \gamma(x_k, x)).$$

- On choisit pour x_{k+1} un élément $x \neq x_0, \dots, x_k$ tel que $\varphi_{k+1}(x)$ soit minimum.

6.3.2 Deux remarques fondamentales

Les remarques suivantes sont des conséquences de la définition des φ_i et des x_i :

(**) Pour x fixé, $\varphi_k(x)$ est une fonction décroissante de k .

(***) Si x n'est pas l'un des points soulignés x_1, \dots, x_k , on a $\varphi_{k+1}(x) \geq \varphi_{k+1}(x_{k+1})$.

Notons aussi que, comme on souligne un nouveau point à chaque étape, tous les points sont soulignés à l'étape n .

6.3.3 Conséquences de la connexité

6.5 Proposition. *On reprend les notations précédentes.*

1) Pour chaque entier k avec $0 \leq k < n$ il existe un point $x \neq x_0, \dots, x_k$ et une arête $(x_i x)$ avec $0 \leq i \leq k$.

2) Pour tout $k = 0, \dots, n$, $\varphi_k(x_k)$ est fini.

Démonstration. 1) Sinon, le graphe ne serait pas connexe puisqu'on ne pourrait pas joindre les points x_0, \dots, x_k aux autres points.

2) On montre ce résultat par récurrence sur k . C'est clair pour $k = 0$ et on passe de k à $k + 1$ en considérant un point x relié à un x_i , $i \leq k$. On a donc $\varphi_{k+1}(x) \leq \varphi_i(x_i) + \gamma(x_i, x)$, qui est fini par l'hypothèse de récurrence et le choix de x . De plus, comme on a $\varphi_{k+1}(x_{k+1}) \leq \varphi_{k+1}(x)$, on voit que $\varphi_{k+1}(x_{k+1})$ est fini.

6.3.4 Le résultat

6.6 Théorème. *On reprend les notations précédentes.*

1) Si x_k est le point souligné à l'étape k , il y a un chemin de $x_0 = 0$ à x_k de coût $\varphi_k(x_k)$ et tout autre chemin de 0 à x_k est de coût $\geq \varphi_k(x_k)$.

2) De plus, on obtient un chemin de coût minimal joignant $x_0 = 0$ à $x = x_r$ par récurrence descendante sur r . Le point x_k qui précède x_r est celui qui correspond au plus grand indice k où $\varphi_k(x_r)$ saute i.e. qui est tel que $\varphi_{k+1}(x_r) < \varphi_k(x_r)$. C'est le point qui est écrit dans le tableau en regard de x_r lorsque celui-ci devient actif.

Démonstration. 1) Pour l'existence du chemin on montre le lemme suivant :

6.7 Lemme. *Pour tout $k = 0, 1, \dots, n$ et pour tout $x \in X$ on a l'alternative suivante :*

- ou bien on a $\varphi_k(x) = \infty$,
- ou bien il existe un chemin de 0 à x et de coût $\varphi_k(x)$.

En particulier, vu 6.5, il existe un chemin de coût $\varphi_k(x_k)$ de 0 à x_k .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k . La propriété est évidente pour $k = 0$. Passons de k à $k + 1$. Soit x avec $\varphi_{k+1}(x) \neq \infty$. On a $\varphi_{k+1}(x) = \text{Min}(\varphi_k(x), \varphi_k(x_k) + \gamma(x_k, x))$. Si le minimum est $\varphi_k(x)$ on conclut avec l'hypothèse de récurrence, si c'est $\varphi_k(x_k) + \gamma(x_k, x)$, il y a un chemin de 0 à x_k de coût $\varphi_k(x_k)$ par l'hypothèse de récurrence, auquel on ajoute l'arête (x_k, x) .

Pour voir que $\varphi_k(x_k)$ réalise le minimum, on raisonne encore par récurrence sur k . Le résultat est clair pour $k = 0$. Supposons l'assertion prouvée pour k et passons à $k + 1$.

Soit Γ un chemin allant de 0 à x_{k+1} . Il s'agit de montrer qu'on a $c(\Gamma) \geq \varphi_{k+1}(x_{k+1})$. Le chemin passe par l'un des points soulignés x_i , $i \leq k$, (il passe au moins par x_0). Soit x_i le dernier des points soulignés situé sur Γ avant x_{k+1} et soit x le point suivant de Γ . Ce point (éventuellement égal à x_{k+1}) n'est donc pas parmi les x_i , $0 \leq i \leq k$. Par l'hypothèse de récurrence, le coût du chemin Γ jusqu'à x_i est $\geq \varphi_i(x_i)$ et on a donc $c(\Gamma) \geq \varphi_i(x_i) + \gamma(x_i, x)$. Cette quantité est $\geq \varphi_{i+1}(x)$ par (*), puis $\geq \varphi_{k+1}(x)$ par (**) et enfin, comme x n'est pas l'un des x_i pour $i \leq k$, $\geq \varphi_{k+1}(x_{k+1})$ par (***) .

2) On montre par récurrence sur $r = 0, 1, \dots, n$ qu'il existe un chemin Γ minimal de x_0 à x_r (donc de coût $\varphi_r(x_r)$) vérifiant la propriété (P) suivante :

Pour tout $i \leq r$, le point précédant x_i sur le chemin Γ est le point x_k correspondant au plus grand indice k tel que $\varphi_{k+1}(x_i) < \varphi_k(x_i)$.

Pour $r = 0$ il n'y a rien à démontrer et on suppose donc $r > 0$. Supposons la propriété établie pour les indices $< r$ et passons à r . Soit k le plus grand entier tel que $\varphi_{k+1}(x_r) < \varphi_k(x_r)$. Un tel entier existe car on a $\varphi_r(x_r) < \varphi_0(x_r) = \infty$ et il est $< r$ car on a $\varphi_{k+1}(x_r) = \varphi_k(x_r)$ pour $k \geq r$. On a donc : $\varphi_r(x_r) = \dots = \varphi_{k+1}(x_r) < \varphi_k(x_r)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un chemin Γ , minimal, allant de x_0 à x_k , et vérifiant la propriété (P). Comme on a $\varphi_{k+1}(x_r) < \varphi_k(x_r)$, la relation (*) donne $\varphi_r(x_r) = \varphi_{k+1}(x_r) = \varphi_k(x_k) + \gamma(x_k, x_r)$. Le chemin obtenu en prolongeant Γ par l'arête $x_k x_r$ convient.

7 Coloriages

7.1 Définitions

7.1 Définition. Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. On appelle **coloriage** de G une application $f : X \rightarrow C$ (où C est un ensemble fini de cardinal k dont les éléments sont appelés les couleurs) telle que si x et y sont adjacents on a $f(x) \neq f(y)$. Le plus petit entier k possible est le **nombre chromatique** de G , noté $\chi(G)$.

7.2 Remarques.

- 1) Dans les applications qui utilisent le coloriage il y a le plus souvent une notion **d'incompatibilité**.
- 2) Si H est un sous-graphe de G , on a $\chi(H) \leq \chi(G)$. C'est le plus souvent ainsi qu'on minore $\chi(G)$, notamment avec les exemples suivants. Mais, attention, il se peut que ces minoration ne soient pas optimales comme le montre l'exemple suivant :

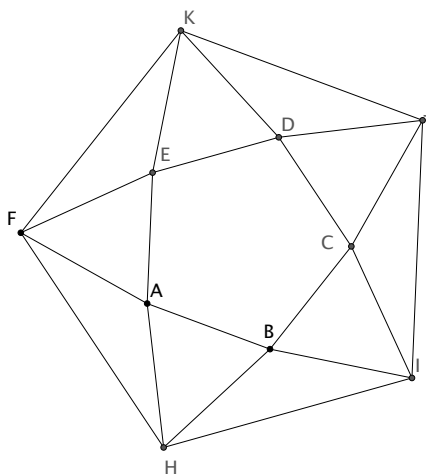


FIGURE 5 – Un graphe avec $\chi = 4$ dont tous les sous-graphes ont $\chi = 3$

- 3) Pour un graphe complet on a $\chi(G) = |X|$ (*exercice : et c'est le seul qui vérifie ça*). Il en résulte que $\chi(G)$ est supérieur ou égal à l'ordre du plus grand sous-graphe complet de G .
- 4) Si G est le graphe cyclique d'ordre n on a $\chi(G) = 2$ (resp. 3) si n est pair (resp. impair).
- 5) Signalons qu'on ne connaît pas d'algorithme qui donne à coup sûr une coloration optimale pour un graphe quelconque, voir ci-dessous quelques tentatives.

7.2 Majoration du nombre chromatique

7.3 Proposition. Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. On a $\chi(G) \leq r + 1$ où r désigne le maximum des degrés des sommets de G .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n = |X|$. L'assertion est évidente pour $n = 1$. Passons de n à $n + 1$. On a un sommet x de degré r maximum. On considère le graphe G' d'ordre n obtenu en enlevant x et toutes les arêtes qui y mènent. On peut colorier G' avec $r + 1$ couleurs au plus. Les r voisins de x n'utilisent pas toutes les couleurs, donc il en reste une pour x , cqfd.

7.4 Remarque. Un théorème de Brooks (1941) affirme qu'on a $\chi(G) \leq r$ (et pas seulement $r + 1$) sauf pour le graphe complet et pour les cycles d'ordre impair. Ce théorème n'est pas évident, mais en voici un cas particulier facile.

7.5 Proposition. Soit G un graphe simple connexe non régulier (c'est-à-dire dont tous les sommets n'ont pas le même degré) et soit $r(G)$ le maximum des degrés des sommets de G . Alors, on a $\chi(G) \leq r(G)$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur l'ordre de G . Le premier cas possible est un graphe d'ordre 3 avec un sommet de degré 2 et deux de degré 1 et on le colorie évidemment avec deux couleurs. Pour l'hérédité, on choisit un sommet x de G de degré $d < r(G)$ et on le retire, ainsi que les arêtes issues de x . Comme G est connexe on a $d > 0$. On obtient un graphe G' , qui peut être non connexe, mais on note G'_1, \dots, G'_n ses composantes connexes. Si l'on montre que l'on peut colorier G' (c'est-à-dire chaque G'_i) avec $r(G)$ couleurs on a gagné car l'une de ces couleurs au moins n'est pas utilisée pour colorier les voisins de x , de sorte qu'on peut colorier x avec cette couleur. Si on a $r(G'_i) < r(G)$, on applique 7.3. Sinon, on a $r(G'_i) = r(G)$, mais tous les sommets de G'_i ne sont pas de degré $r(G)$. En effet, chaque composante contient un voisin de x (sinon le graphe initial ne serait pas connexe) et le degré des voisins de x a diminué, car d est > 0 ! Le graphe G'_i est donc connexe et non régulier, il est d'ordre plus petit que G , donc, par l'hypothèse de récurrence, on peut le colorier avec $r(G)$ couleurs.

7.3 L'algorithme glouton

C'est l'algorithme le plus trivial pour colorier un graphe. On ordonne (arbitrairement) les sommets de 1 à n . On affecte une couleur à 1, disons rouge, puis on parcourt les sommets dans l'ordre. Si 2 n'est pas adjacent à 1 on le colorie aussi en rouge. S'il est adjacent, il faut une deuxième couleur, disons bleu. On passe à 3. S'il n'est adjacent ni à 1 ni à 2 on le colorie avec

l'une des couleurs précédentes, disons la première, s'il est adjacent à l'un et pas à l'autre on utilise la couleur non interdite, s'il est adjacent aux deux on le colorie, disons, en vert. On procède ainsi pour tous les sommets. Il revient au même de colorier d'abord tout ce qu'on peut en rouge, puis en bleu, etc.

Même si, sur certains exemples, l'algorithme donne le résultat, il est, en général, assez mauvais. Par exemple si on considère une chaîne de longueur 4 formée de sommets a, b, c, d (dans cet ordre dans la chaîne), mais que l'on numérote, dans l'ordre, a, d, c, b , on coloriera a en rouge, d aussi (il n'est pas adjacent), ce qui obligera à utiliser deux couleurs pour b et c . Pourtant ce graphe se colorie évidemment avec deux couleurs seulement.

7.4 Algorithme de Welsh et Powell

L'algorithme de Welsh et Powell est une amélioration de l'algorithme glouton. Tout est dans l'ordre choisi des sommets. Pour le glouton on a pris un ordre quelconque. Ici on considère un ordre un peu moins bête qui consiste à ordonner les sommets par ordre décroissant des degrés (pour tenir compte d'abord des points qui présentent le plus de contraintes) et, à degré égal, par un ordre arbitraire, disons alphabétique. On obtient un ordre x_1, x_2, \dots, x_n . On colorie alors, disons en rouge, le premier sommet x_1 dans cet ordre, on a ainsi $x_1 = x_{r_1}$ (premier sommet rouge) puis en rouge le premier de la liste qui n'est pas lié à x_1 , on obtient x_{r_2} , puis en rouge toujours le premier sommet qui n'est lié ni à x_{r_1} ni à x_{r_2} . Quand il n'y a plus de sommet non lié aux précédents on colorie, disons en vert, le premier sommet non colorié, et on recommence.

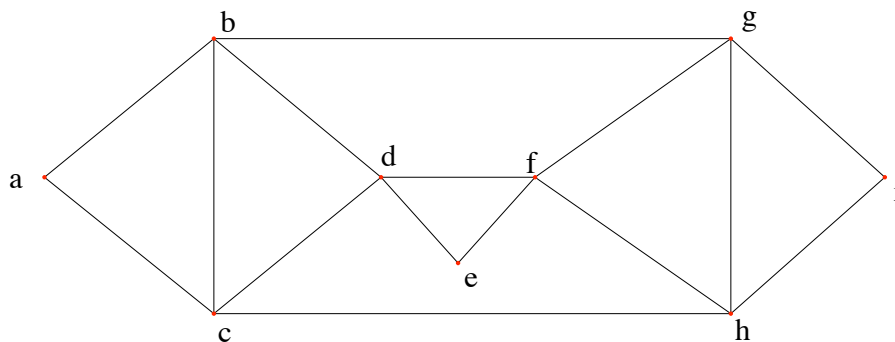
Cet algorithme n'est pas très bon non plus, comme on le voit sur un exemple aussi simple que celui d'une chaîne $abcdef$. Il y a 4 sommets de degré 2 ($bcde$) et 2 de degré 1 (af). Si on ordonne bêtement : $becdaf$, on a le coloriage $r = b, e$, stop, $v = caf$ et $n = d$ (r, v, n sont les couleurs rouge, vert, noir). Mais, si on ordonne $bcdeaf$, on trouve $r = bda$ et $v = cef$: deux couleurs seulement !

Une amélioration de cet algorithme consiste à regarder d'abord le degré $d(x)$ d'un sommet, mais, en cas d'égalité, de regarder ensuite la somme $d_1(x)$ des degrés de ses voisins, puis éventuellement des voisins de ses voisins⁶, etc. Dans le cas présent on a $d_1 = 3$ pour b et e , mais 4 pour c et d et la règle est donc de commencer par c ou d . Cet algorithme fonctionne alors dans le cas étudié en utilisant d et d_1 . Pour une chaîne de 8 sommets il faut utiliser d, d_1, d_2 . On voit facilement que cet algorithme (avec l'ensemble des

6. Cette idée demanderait à être précisée pour savoir si on compte plusieurs fois un sommet qui est voisin de plusieurs manières.

d_i) permet de colorier les chaînes avec 2 couleurs, ce qui n'est pas une grande découverte, mais montre que l'algorithme n'est pas idiot.

Cependant, cet algorithme peut échouer, comme le montre l'exemple suivant :

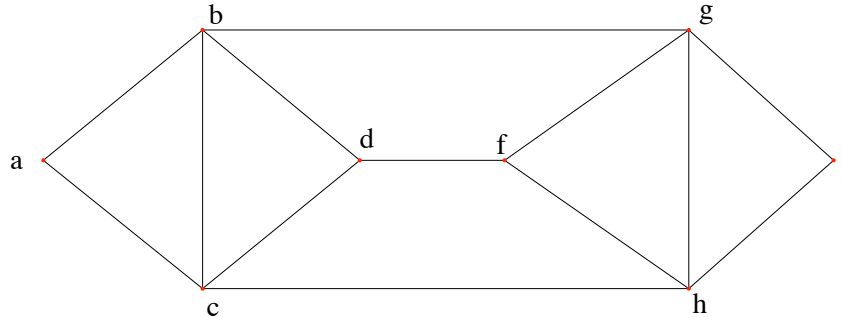


En effet, les sommets $bcdfgh$ sont de degré 4 et aei de degré 2. Si l'on regarde d_1 , tous les sommets de degré 4 valent 14. Pour d_2 les meilleurs sommets sont $bcgh$ (car tous les sommets sont des voisins de voisins de ceux-là), puis ensuite df . Pourtant, si on utilise l'ordre $bcghdfaei$, il faut 4 couleurs pour colorier avec Welsh-Powell. Dans cet exemple, le même algorithme utilisé sans le raffinement montre qu'avec qu'avec l'ordre $dfbcghaei$ trois suffisent.

Il y a pire : dans l'exemple suivant (le même avec e en moins), Welsh-Powell ne marche jamais (quel que soit l'ordre choisi).

En effet, les sommets de plus grand degré sont $bcgh$. Un coloriage selon l'algorithme va donc colorier d'abord bh en rouge et cg en vert et il faudra deux couleurs pour df . Pourtant il y a un coloriage avec 3 couleurs : $r = adg$, $v = cfi$ et $n = bh$!

Une variante, qui permet de trouver le bon coloriage dans ce cas est de faire l'algorithme de Welsh-Powell "dynamique" : à chaque étape on considère le graphe obtenu en enlevant les sommets déjà coloriés et les arêtes qui y aboutissent et on choisit celui qui est maximum au sens de Welsh-Powell raffiné (WPR). Dans le cas précédent, on colorie b et h en rouge. Il reste alors une chaîne $acdfgi$ et on a vu que WPR permet de la colorier avec deux couleurs. De même, l'algorithme de Welsh-Powell raffiné dynamique (WPRD) permet de colorier le graphe précédent avec trois couleurs.



7.5 Applications

Voici un exemple inspiré de Cogis-Robert. Cinq étudiantes, Amélie, Bénédicte, Caroline, Dorothée, Elodie doivent passer des oraux de rattrapage d'une heure. Précisément, Amélie doit passer devant le jury 1, Bénédicte devant le 2, Caroline devant les jurys 2 et 3, Dorothée devant les 1 et 3 et Elodie, qui est un cancre, devant les trois jurys 1,2,3.

Il s'agit d'organiser la session de façon qu'elle dure le moins longtemps possible. La modélisation la plus simple⁷ consiste à regarder le graphe dont les sommets sont les couples étudiants-jurys : $A1, B2, C2, C3, D1, D3$ et $E1, E2, E3$ et dont les arêtes correspondent aux impossibilités : pas deux étudiants avec le même jury, ni un étudiant devant deux jurys à la fois, autrement dit à lier les couples Mi, Mj ou Pi, Qi par des arêtes. Un coloriage consiste à choisir une heure de passage pour chaque couple, en respectant les incompatibilités. Si on applique le glouton avec l'ordre naturel alphabétique : $A1, B2, C2, C3, D1, D3, E1, E2, E3$ il faut 4 heures : $A1, B2, D3 ; C2, D1, E3 ; C3, E1 ; E2$. Avec Welsh-Powell, soit l'ordre $E1, E2, E3, C2, C3, D1, D3, A1, B2$, 3 heures suffisent : $E1, C2, D3 ; E2, C3, D1 ; E3, A1, B2$, et c'est optimal.

8 Graphes probabilistes

La notion de graphe probabiliste est liée à celle de chaîne de Markov. Voir sur ma page web à la rubrique CAPES, Algèbre, Matrices. Ces problèmes sont tout à fait intéressants, mais, dans ce cas, je considère que la représentation

7. Mais pas évidente à trouver.

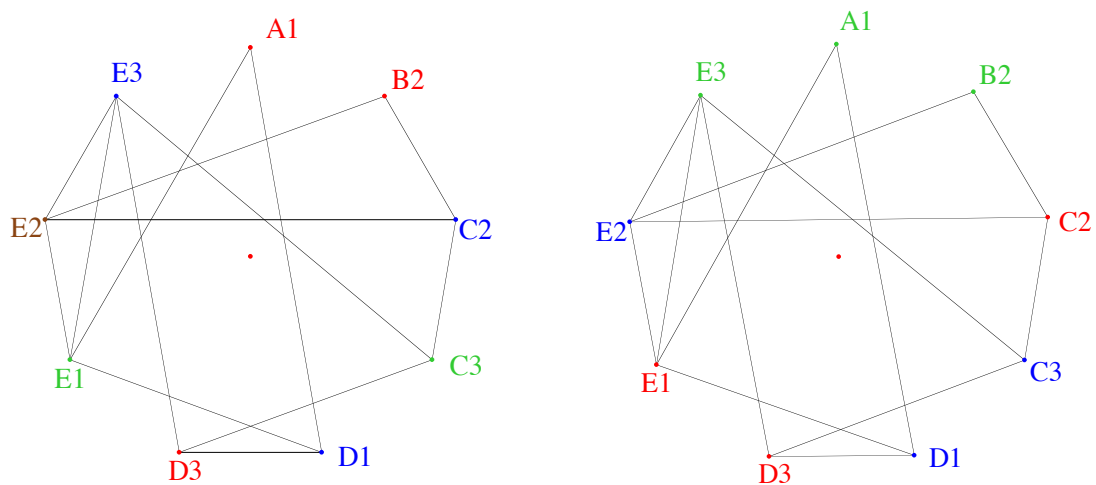


FIGURE 6 – Coloriage du graphe des examens, à gauche par l’algorithme glouton, à droite par Welsh-Powell

de la situation par un graphe n’apporte pas grand chose, contrairement aux thèmes évoqués ci-dessus.

9 Références

[CG] **Olivier Cogis, Claudine Robert**, *Théorie des graphes, problèmes, théorèmes, algorithmes*, Vuibert 2003.

[A] **Arnoux Pierre et al**, *Graphes pour la terminale ES*, IREM Marseille 2002

(disponible en ligne, 99 pages)

[S] **Sigward Éric**, *Illustration des nouveaux programmes 2002-2003 de mathématiques en terminale ES*

[www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002 /institut/ipr/graphes](http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/graphes)

ou

<http://www2.ac-lille.fr/math/nouvprogTES.htm>

(46 pages)

[T] **Tangente numéro 75-76, etc.**

<http://tangente.poleditions.com/>

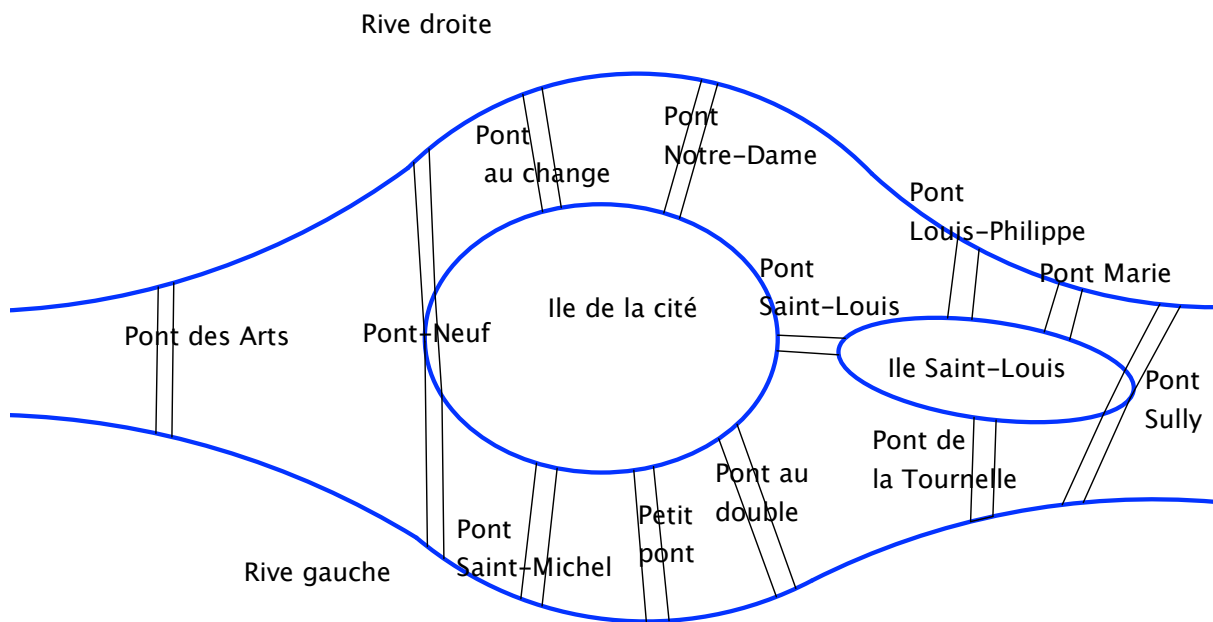


FIGURE 7 – Sous les ponts de Paris ...