Longueur d'arc, aire de secteur, fonctions trigonométriques, limite de $\sin x/x$ en 0

Daniel PERRIN

Introduction

Le but de ce texte est d'analyser deux démonstrations géométriques (i.e. sans référence à l'exponentielle complexe) de l'encadrement $\sin x \leq x \leq \tan x$, point de passage obligé vers le calcul de la limite de $\sin x/x$ en 0 et vers les dérivées des fonctions trigonométriques. Ces deux preuves, respectivement à base de longueurs et d'aires, devraient permettre d'expliquer l'inégalité ci-dessus au lycée (en seconde ou en première), en utilisant essentiellement les connaissances de géométrie du collège. Nous examinons ici leurs fondements mathématiques.

1 Rappels de géométrie euclidienne

On travaille dans un plan affine euclidien E, le même que celui qu'on peut définir avec une axiomatique vectorielle, mais défini plutôt ici par des axiomes "à la Euclide", sous-jacents dans la géométrie du collège. Comme nous ne détaillons pas ces axiomes, certains points des démonstrations demeureront dans l'ombre, mais nous essayerons d'expliciter les résultats sur lesquels nous nous appuyons. Le lecteur peut trouver un exposé cohérent de ces questions dans le livre d'Annie Cousin-Fauconnet [CF]. Nous supposerons en particulier connues les notions usuelles de distance, orthogonalité, parallélisme, etc. et les théorèmes de Thalès et Pythagore. Voici quelques résultats supplémentaires dont nous aurons besoin :

1.1 Rappels.
1) Dans un triangle isocèle les angles à la base sont égaux.
2) La somme des angles d'un triangle est égale à π (ou à un angle plat ou à deux droits).
3) Si ABC est isocèle en A, les angles en B et C sont aigus (plus petit qu'un

droit).
4) Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande que les autres côtés.
5) Dans un triangle ABC, si l'angle $\widehat{A}$ est obtus (plus grand qu'un droit), le côté opposé BC est plus grand que les autres.
6) Si la droite D est tangente au cercle $\Gamma(O, R)$ au point A, tous les points $M \in D$ distincts de A vérifient $OM > R$.

Démonstration. Le point 3) résulte de 1) et 2), le point 4) de Pythagore et le point 5) en découle en traçant les perpendiculaires à (AB) et (BC) en A. Enfin, le point 6) résulte du fait que la tangente est perpendiculaire au rayon et de Pythagore.

2 Longueur d'un arc de cercle

2.1 Définition

Quand on commence à travailler avec les lignes trigonométriques vues comme fonctions il est nécessaire d'avoir à sa disposition la notion de longueur d'un arc de cercle et son lien avec les angles. On renvoie au polycopié [DHP] pour des précisions sur cette notion, à un niveau plus élevé. Au niveau où nous nous plaçons, nous explicitons les points qui nous seront nécessaires. Le principe de base qui permet de définir les longueurs des courbes planes est le fait suivant :

La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre : si on a une courbe Γ qui joint A et B on a $l(\Gamma) \geq AB$.

Plus généralement si on a une *ligne polygonale P inscrite* dans Γ, c'est-à-dire une suite de points $A_0 = A, A_1, \cdots, A_n = B$ de Γ (respectant le sens de parcours de Γ), la longueur de Γ est plus grande que celle de P, autrement dit on a : $l(\Gamma) \geq l(P) = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$ et l'idée de la définition de la longueur consiste à dire que la longueur de la courbe va être la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites quand celles-ci approchent convenablement Γ. Attention, le résultat nécessite l'hypothèse sur le sens du parcours (penser à un trajet qui comporterait de multiples retours en arrière !). Il conviendrait donc de préciser ce point (en général ce sens est défini à partir d'un paramétrage de la courbe). Dans le cas d'un arc de cercle, pour rester au niveau lycée, voici ce que nous utiliserons :

2.1 Définition. *Soit Γ un cercle de centre O et soient A, B deux points de Γ. Soit $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ un arc joignant A et B (c'est-à-dire l'intersection du cercle avec l'un des secteurs (AOB)). On appelle ligne polygonale inscrite dans γ*

une suite de points $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \cdots, A_n)$ de γ, avec $A_0 = A$ et $A_n = B$ et tels que A_{i+1} ne soit pas dans le secteur $(A_1 O A_i)$ (celui qui qui est contenu dans (AOB)). La longueur $l(\mathcal{A})$ de cette ligne polygonale est la somme des distances :

$$A_0A_1 + \cdots + A_{n-1}A_n.$$

La longueur $l(\gamma)$ de γ est définie comme la borne supérieure des longueurs de toutes les lignes polygonales inscrites dans γ.

2.2 *Remarques.*
1) *A priori* la longueur d'arc pourrait être infinie. Bien entendu, il n'en est rien. On peut le montrer avec la technique qui nous permettra de prouver l'inégalité $x \leq \tan x$, cf. ci-dessous 4.2. On peut aussi le voir en englobant le cercle Γ dans un polygone convexe assez grand et en utilisant le fait que si un polygone convexe est inclus dans un autre son périmètre est plus petit, cf. par exemple [R].
2) La condition mise sur les points A_i reprend l'idée de sens de parcours. Elle a pour objet d'éviter les lignes polygonales qui feraient des allers et retours et ne seraient donc pas nécessairement plus petites que la longueur d'arc.
3) Comme le segment $[AB]$ est une ligne polygonale particulière, on a $l(\gamma) \geq AB$ (on voit que la définition que nous venons de donner respecte notre premier principe : la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre).
4) Avec cette définition il est facile de voir que la longueur d'arc est additive (si un arc $\overset{\frown}{AC}$ est réunion de $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$, sa longueur est la somme des longueurs) et invariante par isométrie.
5) On peut montrer aussi (mais c'est un peu moins évident) que la longueur d'une ligne polygonale dont le pas tend vers 0 tend vers $l(\gamma)$, précisément :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \quad \mathrm{Max}\,(A_iA_{i+1}) < \eta \Longrightarrow l(\gamma) - l(\mathcal{A}) < \epsilon.$$

6) Au lycée il n'est évidemment pas question de donner la définition 2.1, la borne supérieure n'étant pas connue. On se contentera de dire les choses suivantes, qui sont fortement intuitives et qui nous suffiront :

a) on admet qu'un arc a bien une longueur, additive et invariante par isométrie,

b) cette longueur est plus grande que celle des lignes polygonales (sans marche arrière), en particulier que celle de la corde $[AB]$,

c) si on prend une ligne polygonale avec suffisamment de points, on peut approcher aussi près qu'on veut la longueur d'arc.

En vertu de la remarque 2.2.4, tous les cercles de rayon 1 ont même longueur (car ils sont isométriques, on passe de l'un à l'autre par translation). On pose donc :

2.3 Définition. *La longueur (ou périmètre) d'un cercle de rayon* 1 *est notée* 2π.

(Ceci est donc une **définition** du nombre π.)

2.2 Angles et polygones réguliers

La notion de longueur d'un arc de cercle permet de mesurer les angles : si on a un secteur angulaire $\widehat{xOy}$, la mesure en radians de son angle (ou tout simplement, son angle, non orienté) est, par définition, la longueur de l'arc découpé par ce secteur sur le cercle de centre O et de rayon 1. En vertu de 2.3, cet angle est $< 2\pi$. Nous admettrons, réciproquement, que pour tout nombre $\theta \in [0, 2\pi[$ et toute demi-droite $[Ox)$ il existe deux demi-droites $[Oy_1)$ et $[Oy_2)$ telles que $\widehat{xOy_1} = \widehat{xOy_2} = \theta$. (Il y a besoin d'un axiome pour assurer cela, en général). Précisément, si $\vec{i}, \vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ sont des vecteurs unitaires des demi-droites, l'un des repères (disons $O, \vec{i}, \vec{j}_1$) est direct et l'autre rétrograde. (Pour les lycéens la notion d'orientation sera donnée par l'idée naturelle de sens de rotation, horaire et anti-horaire (ou trigonométrique).)

Avec cette remarque on peut montrer l'existence de polygones réguliers à n côtés. Si Γ est un cercle de centre O et de rayon R et si $A = A_1$ est un point de Γ, le polygone régulier à n côtés d'origine A_1 est défini par les n points $A_1, \cdots, A_n$ où l'angle $\widehat{A_1OA_k}$ vaut $2k\pi/n$, compté dans le sens trigonométrique.

2.3 Approximation de π

Le résultat suivant (qui donne une méthode d'approximation du nombre π par les polygones réguliers qui remonte à Archimède) sera utile pour montrer le rapport entre l'aire du disque et le périmètre du cercle :

2.4 Proposition. *Soit P_n un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon* 1. *Soient c_n la longueur des côtés de P_n et $p_n = nc_n$ son périmètre. On a $c_n \leq 2\pi/n$. La longueur c_n tend vers* 0 *quand n tend vers $+\infty$ et on a $2\pi = \lim p_n$.*

Démonstration. Les angles au centre de P_n sont tous égaux à $2\pi/n$ et l'inégalité $c_n \leq 2\pi/n$ résulte de la définition de l'angle comme longueur d'arc et du fait que la corde est plus courte que l'arc. Cela montre que, quand n tend vers

$+\infty$, le côté des polygones P_n, qui est égal à c_n, tend vers 0 et donc, par 2.2.5, la longueur du cercle est bien la limite des longueurs des P_n.

2.4 Fonctions trigonométriques

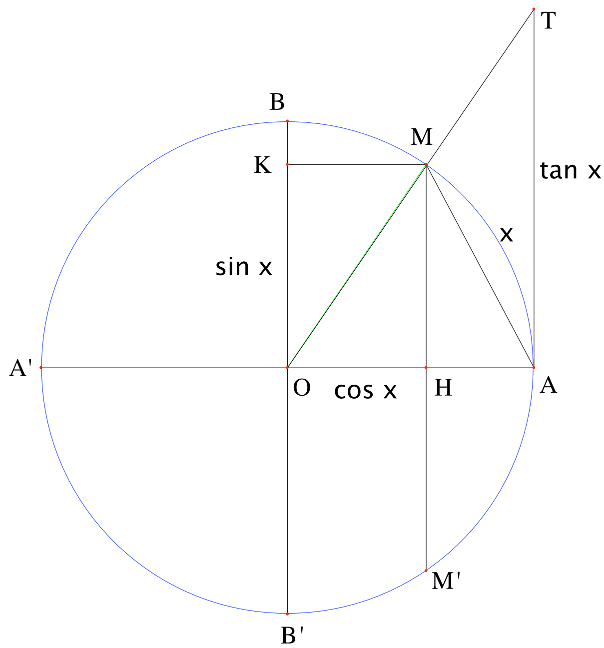

Figure 1

Pour définir les fonctions trigonométriques, considérons un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$ et notons A, B les points vérifiant $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$. On appelle demi-plan supérieur le demi-plan limité par (OA) qui contient B et inférieur l'autre. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1 (qui passe par A et B) et soit M un point de ce cercle. On considère celui des deux arcs $\widehat{AM}$ qui contient les points du demi-plan supérieur au voisinage de A. Soit $x = x(M)$ la longueur de $\widehat{AM}$. On a donc $x < 2\pi$. Soit H (resp. K) le projeté orthogonal de M sur (OA) (resp. (OB)). On définit cosinus et sinus comme suit sur $[0, 2\pi[$, si $x = x(M)$ on pose : $\overline{OH} = \cos x$, $\overline{OK} = \sin x$. Le théorème de Pythagore donne la relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{1}$$

Si $\cos x$ est non nul (i.e. si M est distinct de B et B') on pose $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Si T est le point d'intersection de (OM) et de la tangente au cercle en A, on a $\overline{AT} = \tan x$. En effet, cela résulte de Thalès, qui donne la relation : $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{HM}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OH}}$.

3 Les aires

3.1 Les axiomes des aires

Les élèves ont utilisé les aires au collège et ils sont familiers avec les propriétés suivantes, que l'on peut prendre comme axiomes :

3.1 Théorème-Définition. *On choisit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E. Il existe une mesure des aires planes, c'est-à-dire une application μ définie sur une partie $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(E)$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, vérifiant les propriétés suivantes :*
0) si C est le carré unité construit sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C est dans $\mathcal{Q}$ et on a $\mu(C) = 1$,
1) μ est **simplement additive** *i.e., si on a des parties $A, B \in \mathcal{Q}$* **disjointes** *(c'est-à-dire vérifiant $A \cap B = \emptyset$) on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
2) μ est **invariante par isométrie** *(i.e. par rotation, translation, symétrie) : si A est dans $\mathcal{Q}$ et si g est une isométrie, $g(A)$ est dans $\mathcal{Q}$ et on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$,*
3) μ est **homogène** *: si A est dans $\mathcal{Q}$ et si h est une homothétie de rapport λ, $h(A)$ est dans $\mathcal{Q}$ et on a $\mu(h(A)) = \lambda^2 \mu(A)$.*

3.2 *Remarques.*
1) Les parties de $\mathcal{Q}$ sont les parties dites quarrables, c'est-à-dire celles dont on sait calculer les aires. On admettra qu'elles comprennent les polygones, convexes ou non, mais aussi les parties bornées usuelles : disque, secteur, etc.
2) On notera la conséquence de l'axiome 1) : si $A, B \in \mathcal{Q}$ et $A \subset B$ on a $\mu(A) \leq \mu(B)$: “le tout est plus grand que la partie” comme disaient les anciens. En effet, on a alors $\mu(B) = \mu(A) + \mu(A - B)$ (au moins si la partie $A - B$ est aussi dans $\mathcal{Q}$).
3) L'axiome 3) est conséquence des autres, mais il est commode de le mettre aussi.

À partir des axiomes ci-dessus on montre sans difficulté que l'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur et on en déduit que l'aire du triangle vaut *base* $\times$ *hauteur*$/2$.

3.2 L'aire du disque

Le théorème suivant peut, bien entendu, être admis au lycée, mais c'est lui qui explique que le nombre π qui intervient avec le périmètre est aussi celui qui intervient avec les aires.

3.3 Théorème. *L'aire d'un disque D de rayon 1 est égale à π.*

Démonstration. Soit P_n un polygone régulier à n côtés inscrit dans le disque D, c_n son côté, $p_n = nc_n$ son périmètre. Appelons a_n l'apothème de P_n, c'est-à-dire la distance OH du centre O du cercle au côté $[AB]$ de P_n. Bien entendu, cette distance ne dépend pas du côté choisi. En effet, on a, par Pythagore appliqué au triangle OAH rectangle en H : $OH^2 + AH^2 = OA^2$ soit $a_n^2 + \dfrac{c_n^2}{4} = 1$. Comme c_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (cf. 2.4), on voit que a_n a pour limite 1.

Soit Q_n le polygone obtenu à partir de P_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{a_n}$. L'image du côté $[AB]$ de P_n est le côté $[A'B']$ de Q_n, dont le milieu H' est sur le cercle. Comme $[A'B']$ est perpendiculaire au rayon $[OH']$, il est tangent au cercle, de sorte que Q_n est un polygone circonscrit au cercle et contient le disque D.

On a ainsi $P_n \subset D \subset Q_n$ et donc $\mu(P_n) \leq \mu(D) \leq \mu(Q_n)$.

Calculons alors $\mu(P_n)$. Comme P_n est réunion de n triangles isocèles tous isométriques à OAB, on a :

$$\mu(P_n) = n\,\mu(OAB) = n \times \frac{1}{2} OH \times AB = \frac{1}{2} n\, c_n\, a_n = \frac{1}{2} a_n\, p_n.$$

Mais, on a vu que a_n tend vers 1 et p_n vers 2π (cf. 2.4) de sorte que $\mu(P_n)$ tend vers π quand n tend vers $+\infty$.

Par ailleurs on a, par homothétie, $\mu(Q_n) = \dfrac{1}{a_n^2}\mu(P_n)$ et on voit que $\mu(Q_n)$ tend aussi vers π. En vertu du théorème des gendarmes on a donc $\mu(D) = \pi$.

3.3 L'aire des secteurs circulaires

On a vu ci-dessus le lien entre angle et arc. Voici maintenant le lien avec l'aire des secteurs :

3.4 Proposition. *Un secteur S d'angle x d'un disque de rayon 1 est d'aire $\dfrac{x}{2}$. Autrement dit, l'aire du secteur est proportionnelle à la longueur d'arc.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $x = 2\pi r$ avec r rationnel, $r = \dfrac{p}{q}$. Dans ce cas, on partage le secteur en p secteurs d'angles égaux à $\dfrac{2\pi}{q}$, le disque D tout entier étant recouvert, lui, par q tels secteurs. Mais, comme ces petits secteurs sont tous isométriques, leur aire est donc égale à celle du disque divisée par q, soit π/q et celle du secteur est $p\pi/q = x/2$.

Pour le cas général, on encadre x par des rationnels : $r_1 < x < r_2$ et on encadre le secteur entre les secteurs S_1 et S_2 de même demi-droite origine que S et d'angles r_1 et r_2 : $S_1 \subset S \subset S_2$. On a donc $\mu(S_1) \leq \mu(S) \leq \mu(S_2)$ donc $r_1/2 \leq \mu(S) \leq r_2/2$. Cela montre que $\mu(S)$ est égal à $x/2$. (Sinon, si, disons, $\mu(S) < x/2$ on trouve un rationnel r_1 avec $\mu(S) < r_1/2 < x/2$ et on aboutit à une contradiction.)

4 Les inégalités fondamentales

Notre objectif est de prouver les inégalités (pour $x \in [0, \pi/2[$) :

$$\sin x \leq x \leq \tan x. \tag{2}$$

4.1 La démonstration de (2) par les aires

Le triangle OAM est inclus dans le secteur $S = (OAM)$, lui-même inclus dans le triangle OAT. En vertu des propriétés des aires ("le tout est plus grand que la partie") on a donc les inégalités :

$$\mathcal{A}(OAM) = \frac{1}{2}OA \times HM \leq \mathcal{A}(S) \leq \mathcal{A}(OAT) = \frac{1}{2}OA \times AT$$

ou encore, en vertu de $\overline{OK} = \overline{HM}$ et de la proposition 3.4 :

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cette démonstration est très simple, les inégalités résultent de la croissance de l'aire, le seul point épineux est la proportionnalité de l'aire du secteur et de la longueur d'arc qui n'est pas évidente, mais qu'un élève de seconde admettra sans peine.

4.2 La démonstration de (2) par les longueurs

Par Pythagore on a $\sin x = MH < MA$. Comme la corde MA est plus petite que l'arc $\widehat{MA} = x$ on a la première inégalité de (2). Pour l'autre on se reportera à la figure 2 ci-dessous.

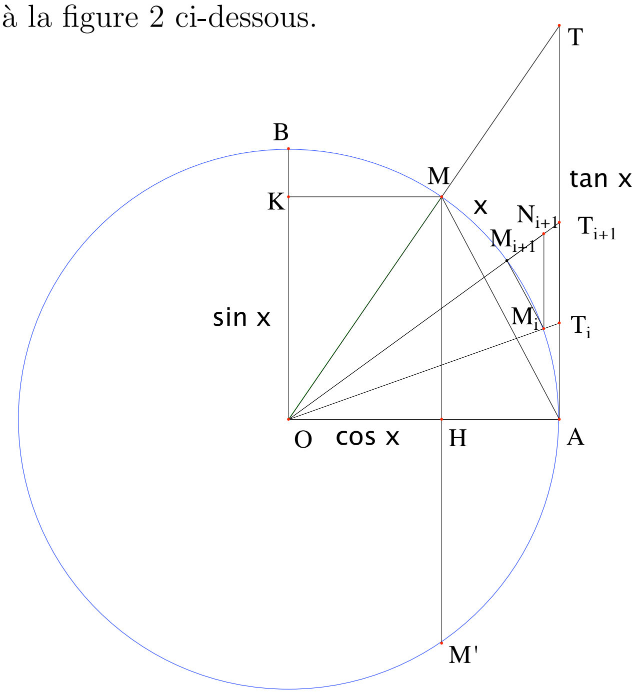

Figure 2

Il s'agit de montrer que la longueur de l'arc AM est inférieure à AT. Pour cela on considère une ligne polygonale quelconque inscrite dans l'arc : $A = M_0, M_1, \cdots, M_n = M$ et, par passage à la borne supérieure, il suffit de montrer que la longueur de cette ligne est $\leq AT$. Pour chaque i on mène la droite (OM_i) qui recoupe la tangente en T_i. On a $AT = T_0T_n = T_0T_1 + \cdots + T_iT_{i+1} + \cdots + T_{n-1}T_n$ car ces points sont alignés. On aura donc gagné si on montre que pour tout i on a $M_iM_{i+1} \leq T_iT_{i+1}$. Pour cela on mène la parallèle à la tangente passant par M_i. Elle recoupe le segment $[M_{i+1}T_{i+1}]$ en N_{i+1}. Comme le point T_i est à l'extérieur du cercle (cf. 1.1.6), on a $OM_i < OT_i$ et donc $M_iN_{i+1} < T_iT_{i+1}$ (par homothétie ou Thalès). Par ailleurs, le triangle OM_iM_{i+1} est isocèle, donc ses angles à la base sont égaux et sont donc aigus (cf. 1.1.3). Il en résulte que l'angle $M_i\widehat{M_{i+1}}N_{i+1}$ est obtus. Dans le triangle $M_iM_{i+1}N_{i+1}$, comme le plus grand côté est opposé au plus grand angle (cf. 1.1.5), c'est donc M_iN_{i+1} qui est plus grand que M_iM_{i+1} et on a gagné.

À côté de la technique de majoration (Thalès, angle obtus, etc.), cette preuve présente, pour des élèves de lycée, une difficulté supplémentaire qui tient à la définition de la longueur comme borne supérieure. Ce qu'on montre *ici c'est que les lignes polygonales inscrites sont toutes plus petites que la tangente. Pour conclure le mieux est sans doute un raisonnement par l'absurde. Si on avait $x > \tan x$, comme on peut approcher la longueur d'arc aussi près que l'on veut par celle des lignes polygonales, on trouverait une ligne de longueur l avec $\tan x < l < x$, d'où la contradiction. Mais ce raisonnement est évidemment difficile pour un lycéen !*

5 Les conséquences de l'inégalité fondamentale

5.1 La limite de $\sin x/x$

La relation (2) montre d'abord que $\sin x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (par valeurs supérieures). En vertu de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, comme $\cos x$ est ≥ 0, on voit que $\cos x$ tend vers 1 quand x tend vers 0. On déduit alors de (2), pour $x > 0$, l'encadrement :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

qui montre que la limite cherchée est bien 1.

5.2 Prolongement des fonctions trigonométriques

Soit M un point du cercle unité correpondant à l'arc x avec $0 < x < \pi/2$ et soit M' le point symétrique par rapport à (OA). La longueur du petit arc $\overset{\frown}{OM'}$ vaut x en vertu de la conservation de la longueur d'arc par symétrie. La longueur du grand arc $\overset{\frown}{OM'}$ vaut donc $2\pi - x$ par additivité. Par symétrie, on a donc $\cos(2\pi - x) = \cos x$ et $\sin(2\pi - x) = -\sin x$. On en déduit que, quand x tend vers 2π, les fonctions cosinus et sinus tendent respectivement vers 1 et 0, c'est-à-dire vers $\cos 0$ et $\sin 0$. Ceci, et le fait que lorsque x tend vers 2π le point M tende vers A, ou encore l'image classique de l'enroulement de la droite sur le cercle, justifie qu'on prolonge les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbf{R}$ tout entier par périodicité de période 2π.

On note alors qu'on a $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$, ce qui ramène l'étude au cas où x est ≥ 0. En particulier, on a ainsi $\lim_{x \to 0} \sin x/x = 0$.

5.3 Les formules d'addition

Il s'agit de prouver, de manière élémentaire, les formules usuelles de trigonométrie. On se reportera à la figure ci-dessous dans laquelle le cercle est de rayon 1 :

On a $\overline{OM} = \cos b$, $\overline{ON} = \cos a$, $\overline{OP} = \sin a$, $\overline{OQ} = \sin b$.

5.3.1 Par le produit scalaire

On a $\cos(b-a) = \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. On en déduit les autres formules par les changements usuels.

5.3.2 Par les aires

On montre $\sin(b-a) = \sin b \cos a - \sin a \cos b$. Pour cela on interprète $\sin(b-a)$ comme $\overline{BH}$ ou encore comme $2\,\mathcal{A}(OAB)$ et on note qu'on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OAB) &= \mathcal{A}(ONDQ) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(ADBC) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(OMBQ) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(ONAP)\\ &= \cos a \sin b - \frac{1}{2}(\cos a - \cos b)(\sin b - \sin a) - \frac{1}{2}\cos b \sin b - \frac{1}{2}\cos a \sin a\\ &= \frac{1}{2}(\sin b \cos a - \sin a \cos b).\end{aligned}$$

On en déduit les autres formules par les changements usuels.

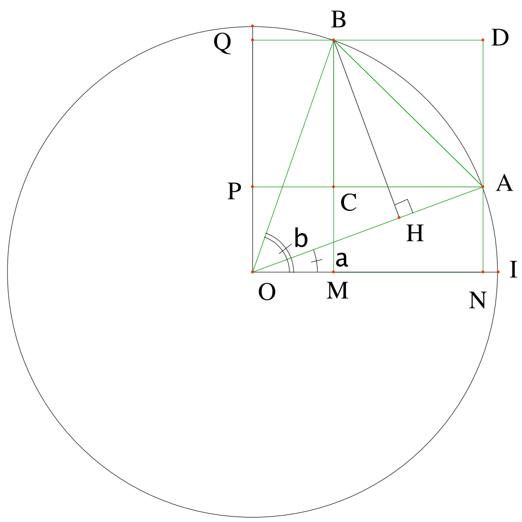

Figure 3

5.4 La dérivée du sinus

On peut montrer maintenant que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus. On commence par montrer que la limite de $\dfrac{1-\cos h}{h}$ quand

h tend vers 0 est nulle (il suffit d'écrire $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$ et d'utiliser la limite de $\sin h/h$). Ensuite, on écrit, pour x et h réels : $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$ et la conclusion résulte d'un calcul de limite facile à partir de l'égalité :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x\,(\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h}{h}\cos x.$$

6 Références

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[DHP] DAVID Marie-Claude, HAGLUND Frédéric, PERRIN Daniel, *Géométrie euclidienne*, Polycopié CAPES, Orsay, 2001.

[R] ROGALSKI Marc, *Carrefours entre Analyse, Algèbre, Géométrie*, Ellipses, 2001.