Tangente à une courbe paramétrée

On considère une courbe paramétrée, c'est-à-dire une application $f : I \to \mathbf{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$. On pose $f(t) = (x(t), y(t))$ et $\Gamma = f(I)$. Par abus de langage on parle aussi de la courbe Γ. Bien entendu, en général, on fait des hypothèses de régularité sur f. On considère un point $M_0 = f(t_0) \in \Gamma$. Il s'agit de définir ce qu'est une tangente en M_0 (y compris dans le cas d'un point singulier) et d'en donner des caractérisations.

1. Une définition.

Il y a de nombreuses manières d'aborder le problème, avec des points de vue analytique, géométrique ou algébrique. Je choisis ici la voie géométrique.

Le principe est le suivant. On considère les droites passant par M_0. Parmi ces droites, ce qu'on demande à la tangente c'est d'être plus proche de la courbe que les autres droites, au voisinage de M_0. Précisément :

Théorème et définition 1. *On conserve les notations précédentes. On note d la distance (par exemple euclidienne) dans le plan. Soit D une droite passant par M_0. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
1) Il existe une droite Δ passant par M_0 telle que la distance $d(f(t), D)$ est négligeable devant $d(f(t), \Delta)$ quand t tend vers t_0.
2) Pour toute droite Δ passant par M_0, distincte de D, la distance $d(f(t), D)$ est négligeable devant $d(f(t), \Delta)$ quand t tend vers t_0.
On dit alors que D est tangente à Γ en M_0.

Démonstration. Il est clair que 2) implique 1). Pour prouver la réciproque, on peut supposer, quitte à faire une translation sur la variable et un déplacement dans le plan, qu'on a $t = 0$, $M_0 = (0, 0)$ et que D est la droite $x = 0$. Une droite Δ passant par M_0 a pour équation $ax + by = 0$, avec a, b non tous deux nuls. La distance de $f(t)$ à D est égale à $d(t) = |x(t)|$, celle de $f(t)$ à Δ est égale à $d_\Delta(t) = \dfrac{|ax(t) + by(t)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cdot$ S'il existe une droite Δ telle que $d(t) = o(d_\Delta(t))$, on a nécessairement $b \neq 0$ et $x(t) = o(y(t))$. Mais alors $x(t)$ est aussi un $o(a'x(t) + b'y(t))$ pour tous a', b' avec $b' \neq 0$.

Remarque 2. Si la courbe admet une tangente elle est unique. En effet, si D et D' sont deux tangentes et d et d' les distances de $f(t)$ à ces droites, on aurait à la fois $d = o(d')$ et $d' = o(d)$ ce qui est absurde.

2. Propriété caractéristique.

Le théorème suivant fait le lien entre tangente et sécantes :

Théorème 3. *Avec les notations précédentes, Γ admet une tangente si et seulement si la pente de la sécante : $p(t) = \dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$, ou son inverse $\dfrac{x(t)-x(t_0)}{y(t)-y(t_0)}$, admet une limite finie*[1]*. Si la limite de p est égale λ, la tangente est la droite de pente λ passant par M_0. Si l'inverse de p a la limite 0, la tangente est la droite verticale passant par M_0.*

Démonstration. On se ramène au cas $t_0 = 0$, $M_0 = (0,0)$. Supposons que $p(t) = y(t)/x(t)$ admette la limite λ quand x tend vers 0, l'autre cas est analogue. Il s'agit de voir que $y(t) - \lambda x(t)$ est un petit o de $ax(t) + by(t)$ quand $a + b\lambda$ est non nul. On écrit $\dfrac{y-\lambda x}{ax+by} = \dfrac{\frac{y}{x}-\lambda}{a+b\frac{y}{x}}$. Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $a + b\lambda$, de sorte que cette quantité tend bien vers 0. Réciproquement, si Γ admet pour tangente la droite $y - \lambda x$, cela signifie, entre autres, que $y(t) - \lambda x(t)$ est un petit o de $x(t)$. La quantité $\dfrac{y(t)-\lambda x(t)}{x(t)} = \dfrac{y(t)}{x(t)} - \lambda$ a donc pour limite 0, ce qui signifie bien que y/x tend vers λ.

Exemples 4. On suppose toujours $t_0 = 0$, $M_0 = (0,0)$.
1) Si x et y admettent des développements limités : $x(t) = at^p + o(t^p)$ et $y(t) = bt^q + o(t^q)$ avec $a, b \neq 0$ et $p, q \in N^*$, la tangente existe ; c'est l'axe des x (resp. des y) si on a $p < q$ (resp. $q < p$) et c'est la droite $y = bx - ay$ si on a $p = q$.
2) La condition précédente est réalisée notamment s'il existe un entier $p > 0$ tel que la fonction f soit p fois dérivable et sa dérivée p-ème $(x^{(p)}(t), y^{(p)}(t))$ non nulle.
3) La courbe peut avoir une tangente en M_0 même si f n'a pas de dérivée non nulle en t_0. C'est le cas, par exemple, de $f(t) = (e^{-\frac{a}{t^2}}, e^{-\frac{b}{t^2}})$ avec $a \neq b$. En effet, si on a, disons, $a < b$, on a $y/x = e^{\frac{-(b-a)}{t^2}}$ et cette quantité a pour limite 0, de sorte que la tangente est l'axe des x.
4) Il y a des courbes sans tangentes, par exemple, $x = t$, $y = t \sin \dfrac{1}{t}$ n'a pas de tangente à l'origine.

3. Une autre définition.

Proposition 5. *On suppose que $f(t) - f(t_0)$ ne s'annule pas dans un intervalle I contenant t_0, sauf en t_0. La courbe Γ a une tangente en M_0 au sens de la définition 1 si et seulement si il existe deux fonctions u, λ définies au voisinage de t_0, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda(t) \in \mathbf{R}^*$ vérifiant :*
1) $f(t) - f(t_0) = \lambda(t)u(t)$ pour tout $t \in I$,
2) la fonction u admet une limite non nulle $u_0 = (a, b)$ en t_0.

Démonstration. On suppose d'abord qu'on a la condition de la proposition 5 et, par exemple, que a est non nul. Cela implique $u_1(t)$ non nul au voisinage de t_0. On a alors $x(t) - x(t_0)$ non nul et $\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)} = \dfrac{u_2(t)}{u_1(t)}$ tend vers b/a. On conclut par le théorème 3.

[1] On suppose ici que ces expressions ont un sens. Pour $p(t)$ par exemple on suppose $x(t) - x(t_0) \neq 0$ pour t voisin de t_0 et distinct de t_0

Réciproquement, supposons $t_0 = 0$, $f(t_0) = (0,0)$ et la tangente égale à $x = 0$. On a vu que cela signifie que x est un $o(y)$, donc qu'il existe une fonction $\epsilon(t)$, tendant vers 0, telle que l'on ait $x(t) = \epsilon(t)y(t)$. Mais alors on a $f(t) = (x(t), y(t)) = y(t)\big(\epsilon(t), 1\big)$ et on a l'autre définition avec $\lambda(t) = y(t)$ et $u(t) = \big(\epsilon(t), 1\big)$. On a bien $y(t) \neq 0$ puisqu'on a supposé $f(t) \neq 0$.

Remarque 6. Il y a deux conditions qui interviennent dans les énoncés ci-dessus. Celle de la proposition 5 : sur un voisinage de t_0, $f(t)$ est distinct de $f(t_0)$. Celle du théorème 3 : sur un voisinage I de t_0 on a $x(t) \neq x(t_0)$ pour tout $t \in I$ ou $y(t) \neq y(t_0)$ pour tout $t \in I$. La première semble *a priori* plus faible. Cependant, dans le cas où il y a une tangente c'est la même chose comme le calcul précédent le montre. Sinon, les conditions sont différentes, comme le montre l'exemple $x(t) = t\cos(1/t)$, $y(t) = t\sin(1/t)$.