Décomposition en symétries obliques

Daniel PERRIN

On montre le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit X le plan affine réel et soit $f : X \to X$ une application affine de déterminant 1. Alors f est produit de deux symétries obliques.*

Démonstration. On commence par montrer le résultat dans le cas vectoriel :

Lemme 2. *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et soit $u : E \to E$ une application linéaire de déterminant 1. Alors u est produit de deux symétries obliques.*

Démonstration. On note d'abord qu'un endomorphisme s de E est une symétrie oblique si et seulement si on a $\text{dét}\, s = -1$ et $\text{Tr}\, s = 0$. On distingue ensuite les cas suivants :
• L'endomorphisme u a deux valeurs propres réelles distinctes λ et $1/\lambda$. Comme u est diagonalisable, on conclut en regardant le produit de matrices :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

• L'endomorphisme u a deux valeurs propres complexes conjuguées (donc de module 1). Il est donc conjugué d'une rotation et on conclut avec :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}.$$

• L'endomorphisme u admet la valeur propre ± 1 double et n'est pas diagonalisable. Il est conjugué à une transvection ou à l'opposé d'une transvection et on conclut avec les formules :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

• Le cas $u = \pm\text{Id}$ est évident.

On passe au cas affine. Si $\vec{f}$ n'a pas la valeur propre 1, f a un point fixe et on est ramené au cas vectoriel. Si $\vec{f}$ a la valeur propre 1 (nécessairement double) il y a deux cas. Si $\vec{f}$ est l'identité, f est une translation $t_{\vec{v}}$ et le résultat est classique : on appelle δ la direction de $\vec{v}$, on choisit une droite D quelconque non parallèle à δ et on pose $D' = t_{-\vec{v}/2}(D)$. On a alors $t_{\vec{v}} = s_{D,\delta}\, s_{D',\delta}$. Sinon, $\vec{f}$ est une transvection, et, en vertu du théorème de décomposition (cf. [DHP] 4.7.5), f s'écrit $f = g\, t_{\vec{v}}$ où g admet un point fixe (donc est une transvection "vectorielle") et où le vecteur $\vec{v}$ est dans le sous-espace fixe de $\vec{f} = \vec{g}$. On décompose alors $g = s_1 s_2$ où s_2 a pour direction $\vec{v}$, cf. $(*)$, puis on décompose $t_{\vec{v}} = s_2 s_3$ comme ci-dessus et on obtient $f = s_1 s_3$ comme souhaité. Dans un repère convenable on a $f(x, y) = (x + \lambda y + a, y)$, $s_1(x, y) = (-x, y)$, $s_3(x, y) = (-x - \lambda y - a, y)$.