Mesures algébriques

La question des mesures algébriques est délicate et une vraie réponse nécessite de mettre sur la table un système d'axiomes complet de la géométrie. J'essaie de donner ici une réponse raisonnable.

1. Définition.

On considère une droite D. La difficulté est de savoir ce qu'on suppose sur cette droite. En tous cas, c'est un ensemble, muni d'une relation d'ordre total (et même de deux relations opposées, a priori) et d'une distance. On note MN la distance de M à N. En fait, on a besoin de plus. On choisit deux points O et I que l'on prend comme repère. Cela donne deux choses : l'unité de longueur (qui est la distance OI) et une orientation de la droite (de O vers I). Cela signifie qu'on choisit l'une des relations d'ordre, celle pour laquelle on a $O \leq I$.

Cela permet de donner une première définition de la mesure algébrique.

Définition 1. *Soient $M, N \in D$. On définit $\overline{MN}$ comme égal à $\pm MN$, le signe étant $+$ si on a $M \leq N$ (M "avant" N ou "à gauche" de N) et $-$ sinon.*

Cette définition est la plus intuitive, mais pas toujours facile à manipuler. Par exemple, pour la relation de Chasles : $\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP}$, il faut distinguer six cas de figures selon les positions des points.

Pour la deuxième définition il faut un peu plus d'informations.
On peut montrer (en ajoutant encore quelques axiomes) qu'il y a une unique bijection $\varphi : D \to \mathbf{R}$ qui envoie O sur 0 et I sur 1, qui est croissante : $M \leq N \iff \varphi(M) \leq \varphi(N)$ et une isométrie : $MN = d(\varphi(M), \varphi(N))$. Avec cela on peut poser :

Définition 2. *Soient $M, N \in D$.*
1) L'abscisse x_M de M dans le repère O, I est l'image de M par φ.
2) La mesure algébrique $\overline{MN}$ est le nombre réel $x_N - x_M$.

Il est clair que les deux définitions sont équivalentes. En effet, si on a $M, N \in D$, on a $MN = d(\varphi(M), \varphi(N)) = |x_N - x_M|$, de sorte que la valeur absolue est la même. De plus, comme φ est croissante, on a $M \leq N \iff \varphi(M) \leq \varphi(N) \iff x_M \leq x_N$, de sorte que le signe est bon lui aussi.

Avec la deuxième définition, la relation de Chasles est immédiate car c'est $x_P - x_M = (x_N - x_M) + (x_P - x_N)$.

2. Thalès.

Je montre par exemple le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit ABC un triangle et soit $B' \in (AB)$, distinct de A et B. La parallèle à (BC) passant par B' coupe (AC) en C'. Alors, on a* $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$.

Démonstration. Il y a de multiples façons de faire. Ce que je propose, au niveau collège, c'est de commencer par discuter la position des points, en distinguant les cas de figure : si B' est entre A et B, alors C' est entre A et C ; si B' est au-delà de B, alors C' est au-delà de C ; si B' est au-delà de A, C' est au-delà de A. On notera que tout cela est juste une affaire de segments : $B' \in [AB]$, $B \in [AB']$, $A \in [B'B]$.
Au collège on se contenterait de constater ces résultats sur la figure. Pour les prouver, on s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 4. *Soient D_1, D_2, D_3 trois droites parallèles et D, D' deux sécantes qui coupent ces droites en A_1, A_2, A_3 et A'_1, A'_2, A'_3 respectivement. On suppose $A_2 \in [A_1A_3]$. Alors, on a $A'_2 \in [A'_1A'_3]$.*

Démonstration. Là encore, il faut savoir sur quoi l'on s'appuie. Je suppose qu'on a dans les axiomes (ou les théorèmes) les faits suivants sur les demi-plans :

Axiome 5. *Soit Δ une droite. Elle partage le plan en deux demi-plans. Deux points A, B sont dans le même demi-plan limité par Δ si et seulement si $[AB]$ ne coupe pas Δ.*

On peut alors prouver le lemme. On considère les demi-plans limités par D_2. Comme $[A_1A_3]$ coupe D_2 en A_2, les points A_1 et A_3 sont dans deux demi-plans différents par rapport à D_2. Comme D_1 ne coupe pas D_2 elle est tout entière dans un demi-plan, donc A'_1 est dans le même demi-plan que A_1. De même, A'_3 est dans le même demi-plan que A_3. Il en résulte que A'_1 etA'_3 ne sont pas dans le même demi-plan limité par D_2, de sorte que $[A'_1A'_3]$ coupe D_2 et donc le point A'_2 est dans $[A'_1A'_3]$.

Cette constatation (ou preuve) permet de voir que les signes des rapports sont bien les mêmes. Pour finir Thalès il reste à montrer l'égalité des rapports en valeur absolue, ce qui peut, par exemple, se faire en utilisant les aires (d'ailleurs, dans les preuves par les aires on utilise implicitement le résultat sur la position).