Isométries du plan

Daniel Perrin

1 Introduction

1.1 Avertissement

Le but de ce texte est d'offrir une piste pour traiter l'exposé de CAPES numéro 37 (liste 2011) qui porte sur les isométries du plan [1]. Mon objectif est de proposer un traitement "intermédiaire" entre ce que l'on peut faire au lycée, avec les programmes en vigueur aujourd'hui [2] et ce qui est développé au niveau du CAPES, notamment dans nos deux polycopiés sur la géométrie affine et la géométrie euclidienne. Précisément, il s'agit de traiter le sujet sans autre matériel que les contenus actuels du lycée, donc sans supposer une connaissance de l'algèbre linéaire et une définition "avancée" d'un espace affine, mais en essayant cependant de le faire de façon rigoureuse.

Cela étant, dans la perspective de l'oral du CAPES, ce texte est à prendre avec précaution, et je l'assortirai de quelques conseils :

• Pour alléger l'exposé, on peut admettre un certain nombre de points, par exemple le fait que les isométries sont bijectives. La nature affine des isométries peut, elle aussi, être occultée ou admise. J'ai signalé en général ces points dans le texte par le signe ($\sharp$).

• Le paragraphe sur les isométries positives et négatives est sans doute trop compliqué pour l'oral. Il est donc plus raisonnable à cet endroit là d'utiliser soit le déterminant, soit la définition des angles orientés vue au lycée (même si elle n'est pas très rigoureuse).

• En revanche, le théorème 3.4 (décomposition des isométries en produit de réflexions) constitue une valeur sûre pour un exposé de CAPES.

1.2 Le cadre

On travaille dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Ce mot n'a pas d'autre sens que celui qu'il a pour les lycéens : on dispose de points, de droites et des

1. Cet exposé a aussi un rapport avec le numéro 19, qui porte sur les transformations planes et les nombres complexes, mais je n'aborderai pas cet aspect.

2. Je dis bien aujourd'hui, et pas demain, puisque les isométries vont pratiquement disparaître des programmes de lycée.

propriétés d'incidence qui les relient, ainsi que des notions usuelles de la géométrie : parallélisme, orthogonalité, longueur, angle, etc. Les vecteurs sont connus depuis la classe de seconde et on note $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. Il n'est pas nécessaire de dire qu'ils forment un espace vectoriel, mais comme on sait les additionner et les multiplier par un scalaire, c'est juste une question de mots. Le produit scalaire de deux vecteurs est introduit en première et il permet de retrouver la notion de longueur comme norme et celle d'angle [3] non orienté, *via* le cosinus. On a la notion de repère orthonormé (qu'on abrégera en *ron*) en prenant un point et deux vecteurs orthogonaux et de norme 1. Il revient au même de se donner trois points O, I, J du plan avec $OI = OJ$ et $(OI) \perp (OJ)$. En revanche, dans un premier temps, on ne parlera ni d'orientation du plan, ni d'angles orientés, attendant de disposer du matériel introduit au paragraphe 4 ci-dessous pour le faire rigoureusement.

1.2.1 Notations

On note $(\vec{v}|\vec{w})$ le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et AB la distance des points A et B (ou longueur du segment $[AB]$).

1.3 Rappels

1.3.1 Inégalité triangulaire

1.1 Proposition. *Soient A, B, C trois points du plan. On a $AC \leq AB+BC$. L'égalité $AC = AB + BC$ vaut si et seulement si A, B, C sont alignés avec B entre A et C.*

Plus précisément, si l'on pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$, les points A, B, C sont alignés si l'on a l'une des relations $a = b + c$, $b = c + a$ ou $c = a + b$.

Inversement, si l'on se donne deux points distincts A, B avec $AB = c$ et deux réels a, b vérifiant l'une des trois relations ci-dessus, il existe un unique point C aligné avec A et B tel que $BC = a$ et $CA = b$.

1.3.2 Médiatrice

1.2 Proposition-Définition. *Soient A, B deux points distincts de $\mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient $MA = MB$ est une droite affine.*

3. Précisons les choses. Si on a trois points A, O, B, l'angle non orienté $\widehat{AOB}$ est pour moi un nombre de $[0, \pi]$ (ce que d'autres appellent mesure en radians de l'angle). Pour le définir on peut supposer que OA et OB sont de longueur 1 et l'angle est alors la longueur de l'arc découpé sur le cercle unité de centre O par le secteur saillant $[AOB]$. C'est aussi l'arccosinus du produit scalaire $(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OB})$.

Précisément, si O est le milieu de $[AB]$, $\mathcal{D}$ est la droite passant par O et perpendiculaire à (AB). On dit que $\mathcal{D}$ est la **médiatrice** *de A, B.*

Démonstration. On écrit $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$ et on calcule $MA^2 = MO^2 + OA^2 + 2(\overrightarrow{MO}|\overrightarrow{OA})$ et de même avec B. L'égalité $MA = MB$ est alors équivalente à $(\overrightarrow{MO}|\overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{MO}|\overrightarrow{OB})$ soit $(\overrightarrow{MO}|\overrightarrow{AB}) = 0$, ce qui équivaut à (OM) perpendiculaire à (AB) ou $M = O$ et on a le résultat.

1.3.3 Projection orthogonale

1.3 Proposition-Définition. *Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{P}$ et soit M un point. Il existe un unique point $P \in \mathcal{D}$ qui est tel que $\overrightarrow{PH}$ soit orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{D}$. On le nomme* **projeté orthogonal** *de M sur $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Le plus simple est de le faire analytiquement. On choisit un *ron* formé d'un point $O \in \mathcal{D}$, d'un vecteur $\vec{i}$ de $\vec{\mathcal{D}}$ et d'un vecteur $\vec{j}$ orthogonal à $\mathcal{D}$. On écrit $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et on cherche $P \in \mathcal{D}$, donné par $\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{i}$ tel que $\overrightarrow{PM} = (x - \lambda)\vec{i} + y\vec{j}$ soit orthogonal à $\vec{i}$. On trouve $\lambda = x$.

2 Les isométries

2.1 Définition des isométries et premières propriétés

2.1 Définition. *Une application f du plan dans lui-même est appelée une* **isométrie** *si elle conserve les longueurs*[4]*, c'est-à-dire si l'on a, pour tous A, B dans $\mathcal{P}$, $f(A)f(B) = AB$.*

2.2 Notation. Lorsqu'on a une transformation f du plan, on notera en général avec un prime les images des points : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, etc.

On note déjà qu'une isométrie est nécessairement injective. Voici quelques autres propriétés :

2.3 Proposition.
1) Une isométrie conserve l'alignement (précisément, elle transforme trois points alignés en trois points alignés, mais aussi trois points non alignés en trois points non alignés). De plus, elle conserve l'ordre sur les droites (c'est-à-dire la relation "entre").
2) Toute isométrie est bijective.

4. On peut, pour simplifier, supposer que f est bijective, mais ce n'est pas nécessaire, voir 2.3 ci-dessous. Comme annoncé, les points qui deviennent inutiles si l'on fait cette hypothèse supplémentaire sont signalé par le signe ($\sharp$).

Démonstration. 1) Supposons A, B, C alignés avec, par exemple, B entre A et C. On a donc $AC = AB + BC$ en vertu de 1.1. On en déduit, avec les notations de 2.2, $A'C' = A'B' + B'C'$ ce qui montre que B' est aligné avec A', C' et entre A' et C'.

Inversement, si A, B, C ne sont pas alignés et si on pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, on a les inégalités strictes $a < b+c$, $b < c+a$ et $c < a+b$ et les mêmes relations pour A', B', C', ce qui montre que A', B', C' ne sont pas alignés (cf. 1.1).

Le lemme suivant est trivial si f est supposée bijective :

2.4 Lemme. ($\sharp$) *Si A, B sont deux points distincts, d'images A' et B', toute la droite $(A'B')$ est dans l'image de f.*

Démonstration. (du lemme) Si M' est sur $(A'B')$ et si l'on pose $A'M' = a$ et $B'M' = b$, on a l'une des relations $A'B' = a + b$, $a - b$ ou $b - a$ (cf. 1.1). Toujours en vertu de 1.1, il existe alors un point M de (AB) avec $AM = a$ et $BM = b$ et la même relation avec $AB = A'B'$. Si on pose $M'' = f(M)$, M'' est sur $(A'B')$ et on a aussi $A'M'' = a$ et $B'M'' = b$, de sorte que $M' = M''$ est bien dans l'image de f.

($\sharp$) On peut alors finir de prouver la surjectivité de f. On choisit trois points A, B, C non alignés et on considère leurs images A', B', C'. Soit M' un point de $\mathcal{P}$. Si M' est sur l'une des droites joignant les points A', B', C' on applique le lemme 2.4. Si M' n'est pas dans l'une des droites on regarde (disons) $(C'M')$ qui coupe $(A'B')$ en N' et on est ramené au cas précédent.

2.5 Corollaire.
1) L'image par une isométrie d'une droite est une droite.
2) Une isométrie conserve le parallélisme des droites.
3) Une isométrie conserve l'orthogonalité.

Démonstration. Le premier point est conséquence de ce qui précède. Pour 2), si deux droites sont parallèles, leurs images sont des droites, dont l'intersection est vide (car une isométrie est bijective), donc qui sont parallèles. Pour l'orthogonalité enfin : si on suppose $(AB) \perp (AC)$, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ par Pythagore. Cela vaut encore pour les images de A, B, C puisque f conserve les distances et on conclut par la réciproque de Pythagore.

2.6 Corollaire. *L'ensemble des isométries est un groupe.*

Démonstration. Il est clair que l'identité est une isométrie et que la composée de deux isométries en est une. Comme une isométrie est bijective, elle admet une transformation inverse qui est aussi une isométrie.

2.2 Quelques exemples

2.2.1 Translations

2.7 Proposition-Définition. *Soit $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$. On définit la* **translation** *de vecteur $\vec{v}$ comme l'application qui à M associe M' vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. On la note $t_{\vec{v}}$. C'est une isométrie.*

Démonstration. En effet, si l'on a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v}$, le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme et on a aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ donc $AB = A'B'$.

2.2.2 Symétries centrales

2.8 Proposition-Définition. *Soit O un point de $\mathcal{P}$. On définit la* **symétrie** *de centre O et on note σ_O la transformation qui à M associe M' tel que O soit le milieu de $[MM']$ (ou encore tel que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$). C'est une isométrie.*

Démonstration. On a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{AB}$, d'où $A'B' = AB$.

2.3 Applications affines ($\sharp$)

Même si l'on s'efforce ici de ne pas utiliser tout l'attirail de l'algèbre linéaire, ce paragraphe peut être omis à l'oral du CAPES.

On commence par dire ce qu'est une application linéaire dans le cadre géométrique des vecteurs :

2.9 Définition. *Une application $\vec{f}$ de $\vec{\mathcal{P}}$ dans $\vec{\mathcal{P}}$ est dite* **linéaire** *si elle vérifie : $\vec{f}(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{v})$ et $\vec{f}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{f}(\vec{v}) + \vec{f}(\vec{w})$ pour tous vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel λ.*

2.10 Définition. *Une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est dite* **affine** *si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) Si, pour $A, B, C, D \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors on a $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$.

Le point 1) montre que la formule $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ définit une application $\vec{f}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même. On suppose alors :

2) L'application $\vec{f}$ est linéaire.

Une façon plus intuitive de comprendre ce qu'est une application affine consiste à utiliser la géométrie analytique :

2.11 Proposition. *Soit O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ un repère de $\mathcal{P}$. Si M est un point de $\mathcal{P}$ on note x, y ses coordonnées. On a donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Soit f une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Alors, si x', y' sont les coordonnées de $M' = f(M)$ dans le repère, elles sont données à partir de x, y par des fonctions affines : $x' = ax + by + \alpha$, etc.*

Rappelons aussi la proposition suivante :

2.12 Proposition. *Une application affine bijective conserve les droites, le parallélisme, les barycentres.*

Démonstration. Si $\mathcal{D}$ est une droite définie par un point O et vecteur directeur $\vec{v}$, tout point M de $\mathcal{D}$ vérifie $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{v}$ où λ est un réel. Avec les notations de 2.2 on a alors $\overrightarrow{O'M'} = \vec{f}(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{v})$. Autrement dit, $f(\mathcal{D})$ est la droite définie par O' et par $\vec{v}' = \vec{f}(\vec{v})$.

Pour les barycentres : on écrit, par exemple, $\lambda\overrightarrow{GA} + \mu\overrightarrow{GB} + \nu\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et on utilise la linéarité.

2.4 Les isométries sont affines

2.13 Proposition. *Une isométrie est une application affine.*

Démonstration. Soit f une isométrie. On montre le lemme suivant :

2.14 Lemme. *Soit $ABDC$ un parallélogramme et soient A', B', C', D' les images de ses sommets par f. Alors $A'B'D'C'$ est un parallélogramme.*

Démonstration. Cela résulte du fait que f conserve le parallélisme.

Revenons à la proposition. Le point 1) de la définition d'une application affine résulte de la traduction de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ par le fait que $ABDC$ est un parallélogramme. Pour l'additivité de $\vec{f}$, si on pose $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, on a aussi un parallélogramme $ABDC$. Enfin, pour le produit par un scalaire, c'est la conservation de la longueur et de la relation entre.

2.15 Corollaire. *Si f est une isométrie et si $\vec{f}$ est l'application linéaire associée, $\vec{f}$ conserve le produit scalaire (donc les angles non orientés).*

Démonstration. Cela résulte du fait que le produit scalaire peut se calculer à partir de la norme, donc de la longueur.

3 Les réflexions

On définit maintenant les réflexions et on montre qu'elles engendrent le groupe des isométries.

3.1 Définition

3.1 Définition. *Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{P}$ et soit $M \in \mathcal{P}$. Soit P le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. La* **réflexion** *$\tau_{\mathcal{D}}$ est la transformation qui associe à M le point M' qui vérifie $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{MP}$.*

3.2 *Remarque.* Une variante de la définition est la suivante : τ fixe $\mathcal{D}$ et à $M \notin \mathcal{D}$ associe M' tel que (MM') est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et que le milieu de $[MM']$ est sur $\mathcal{D}$.

3.2 Premières propriétés

3.3 Proposition.
1) La transformation $\tau_{\mathcal{D}}$ est une isométrie de $\mathcal{P}$.
2) C'est une involution qui est l'identité sur $\mathcal{D}$.
3) Si M' est l'image de M et si $M' \neq M$, $\mathcal{D}$ est la médiatrice de M, M'.

Démonstration. 1) Soient M, N deux points du plan. On écrit $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN}$ où P, Q sont les projetés orthogonaux de M, N sur $\mathcal{D}$. On en déduit $MN^2 = MP^2 + PQ^2 + QN^2 + 2(\overrightarrow{MP}|\overrightarrow{QN})$. En appliquant $\tau_{\mathcal{D}}$ on trouve $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN'} = -\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QN}$ et on a bien $MN^2 = M'N'^2$.

Le point 2) est évident.

3) Soit M un point de $\mathcal{P}$, P son projeté sur $\mathcal{D}$, M' son symétrique et soit N un point de $\mathcal{D}$. On a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$ d'où $MN^2 = MP^2 + PN^2$. Le calcul est identique pour M' et on a $M'N^2 = MN^2$, ce qui montre que N est sur la médiatrice $\mathcal{D}'$ de M, M'. On a donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, de sorte que ces deux droites sont égales.

3.3 Les réflexions engendrent le groupe des isométries

À mon avis, la démonstration du fait que les réflexions engendrent le groupe des isométries est l'une des plus intéressantes à mener devant un jury. C'est pourquoi je la donne en détail.

3.4 Théorème. *Soit f une isométrie de $\mathcal{P}$. Alors, f est produit d'au plus trois[5] réflexions.*

Démonstration. La démonstration se fait en plusieurs étapes :

3.5 Lemme. *Si f fixe trois points A, B, C non alignés, f est l'identité (donc produit de zéro réflexion[6]).*

5. Le cas d'une symétrie glissée montre que ce nombre est optimal.
6. Ou de deux réflexions égales, si l'on ne souhaite pas utiliser cette convention.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{P}$ et M' son image. Comme f fixe A, B, C et est une isométrie, on a $AM = AM'$, $BM = BM'$ et $CM = CM'$. Si M était distinct de M', la médiatrice de M, M' contiendrait donc les trois points A, B, C ce qui est absurde puisqu'ils ne sont pas alignés.

3.6 Lemme. *Si f fixe deux points distincts A, B, c'est l'identité ou la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D} = (AB)$.*

Démonstration. Si f n'est pas l'identité, il existe $C \notin (AB)$ tel que $C' = f(C)$ soit différent de C. On a $AC = AC'$ et $BC = BC'$, de sorte que $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[CC']$. La réflexion $\tau_{\mathcal{D}}$ fixe A, B et transforme C en C', comme f. Le lemme 3.5 appliqué à $\tau_{\mathcal{D}} \circ f$ montre que f est égale à $\tau_{\mathcal{D}}$.

3.7 Lemme. *Si f fixe un point A elle est produit d'au plus deux réflexions.*

Démonstration. Si f n'est pas l'identité, il existe $B \neq A$ tel que $B' = f(B) \neq B$. En composant f avec la réflexion par rapport à la médiatrice de B, B' (qui fixe A) on se ramène au cas de 3.6 et f est produit de deux réflexions au plus.

Le théorème est maintenant immédiat car si f ne fixe pas A on se ramène à l'un des cas précédents [7] en composant avec la réflexion par rapport à la médiatrice de A, A' et f est produit de trois réflexions au plus.

3.3.1 Transitivité sur les repères

La démonstration admet le corollaire suivant :

3.8 Corollaire. *Étant donnés deux ron du plan O, I, J et O', I', J', il existe une unique isométrie qui envoie O sur O', I sur I' et J sur J'.*

4 Isométries positives et négatives et angles orientés

Il s'agit de donner un sens à la notion d'isométries positives et négatives (on parle aussi d'isométries directes et indirectes, voire rétrogrades et on les appelle encore déplacements et anti-déplacements). Il y a deux façons bien connues de traiter cette question. La première est celle que l'on peut utiliser au lycée en définissant les isométries positives comme celles qui conservent les angles **orientés**. On peut rendre cette approche parfaitement rigoureuse (en ne se contentant pas de faire appel à l'intuition pour définir le sens

7. Il se peut qu'on se ramène d'emblée au cas 1), penser à une translation.

trigonométrique), mais c'est assez délicat. La seconde, que l'on emploie en licence, consiste à utiliser le déterminant, les isométries directes étant celles de déterminant positif (en fait égal à 1) et les indirectes celles de déterminant négatif. Notre objectif est de donner une définition intermédiaire, qui n'utilise pas le recours au sens des angles et qui soit indépendante de la notion de déterminant. Pour cela, on part des réflexions (dont on sait bien au bout du compte qu'elles doivent être négatives) et on va définir une transformation directe (resp. indirecte) comme produit d'un nombre pair (resp. impair) de réflexions. Attention, pour que cette définition soit cohérente, il faut prouver qu'un produit d'un nombre pair de réflexions ne saurait être égal au produit d'un nombre impair de réflexions.

($\sharp$) Le lecteur qui trouverait ce paragraphe trop délicat peut décider d'utiliser l'une ou l'autre des deux autres méthodes : celle du lycée ou les déterminants, avec les inconvénients évoqués ci-dessus. Il peut aussi admettre une partie des résultats, mais doit alors savoir au moins prouver 4.1.

4.1 Remarques préliminaires

4.1.1 Une remarque facile

4.1 Proposition. *Une réflexion n'est égale ni à l'identité, ni au produit de deux réflexions.*

Démonstration. Il est clair qu'une réflexion n'est pas l'identité car elle ne fixe qu'une droite. Soit $\rho = \tau_1\tau_2$ le produit de deux réflexions par rapport à des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Si ρ est une réflexion, elle fixe deux points A et B distincts. On a alors $\tau_1(A) = \tau_2(A) = A'$ et $\tau_1(B) = \tau_2(B) = B'$. Si on a $A = A'$ et $B = B'$, on a $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = (AB)$, ρ est l'identité et c'est absurde. Si, disons, on a $A \neq A'$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont toutes deux égales à la médiatrice de A, A', ρ est encore l'identité et c'est toujours absurde.

4.1.2 Deux réflexions

On précise ici les produits de deux réflexions.

4.2 Proposition. *1) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de $\mathcal{P}$, concourantes en O et soient τ_1, τ_2 les réflexions associées. Si $\mathcal{D}_3$ est une droite quelconque passant par O, on peut écrire $\tau_1\tau_2 = \tau_3\tau_4$ (resp. $\tau_4'\tau_3$) où τ_3 est la réflexion par rapport à $\mathcal{D}_3$ et où τ_4 (resp. τ_4') est une réflexion par rapport à une droite passant par O.*

2) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles et soient τ_1, τ_2 les réflexions associées. Si Δ est une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}_i$ en A_i, on a $\tau_1\tau_2 = t_{\vec{v}}$ avec

$\vec{v} = 2\overrightarrow{A_2A_1}$. *Si $\mathcal{D}_3$ est une droite quelconque parallèle aux $\mathcal{D}_i$, on peut écrire $\tau_1\tau_2 = \tau_3\tau_4 = \tau_4'\tau_3$ où τ_3 est la réflexion par rapport à $\mathcal{D}_3$ et où τ_4 (resp. τ_4') est une réflexion par rapport à une droite parallèle aux $\mathcal{D}_i$.*

Démonstration. 1) Il s'agit [8] de montrer que $\sigma = \tau_1\tau_2\tau_3$ est une réflexion. Soit $A \in \mathcal{D}_3$, $A \neq O$, et $A' = \sigma(A)$. Si $A = A'$, σ fixe deux points. C'est donc soit l'identité (mais alors τ_3 est produit de deux réflexions et c'est absurde par 4.1) soit une réflexion et on a gagné. Sinon, soit τ la réflexion par rapport à la médiatrice de A, A'. La composée $\tau\sigma$ fixe O et A. C'est donc soit l'identité et dans ce cas on a $\sigma = \tau$ et on a gagné, soit une réflexion. Mais alors, comme elle fixe O et A, c'est τ_3 et on a donc $\tau\tau_1\tau_2\tau_3 = \tau_3$, donc $\tau\tau_1\tau_2 = \mathrm{Id}$ et c'est absurde (toujours 4.1).

2) On note d'abord que si Δ' est une autre perpendiculaire aux $\mathcal{D}_i$ qui les coupe en A_1' et A_2', on a $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1'A_2'}$ (car $A_1A_2A_2'A_1'$ est un parallélogramme). Si M se projette en H_1, H_2 sur les droites et si on pose $M' = \tau_2(M)$ et $M'' = \tau_1(M')$, on a $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH_2} = 2\overrightarrow{H_2M'}$ et $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'H_1}$, donc $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{H_2H_1} = 2\overrightarrow{A_2A_1}$, d'où le premier point.

Pour le second point, si A_3 est le point d'intersection de $\mathcal{D}_3$ et de Δ, on considère le point A_4 qui vérifie $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_3A_4}$ et il suffit de prendre pour droite $\mathcal{D}_4$ la parallèle aux $\mathcal{D}_i$ passant par A_4.

Au passage, on a montré :

4.3 Corollaire. *Soient τ_i, $i = 1, 2, 3$ trois réflexions d'axes $\mathcal{D}_i$. Si les droites $\mathcal{D}_i$ sont concourantes ou parallèles, le produit $\tau_1\tau_2\tau_3$ est une réflexion.*

4.2 Les produits pairs de réflexions

4.4 Proposition. *Tout produit de quatre réflexions (et plus généralement d'un nombre pair de réflexions) est produit de deux réflexions.*

Démonstration. Une récurrence immédiate montre qu'il suffit de traiter le cas du produit de quatre. Soit donc $f = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$ le produit de quatre réflexions autour de quatre droites $\mathcal{D}_i$. Notons que si trois réflexions consécutives ont leurs axes concourants ou parallèles, 4.3 permet de conclure. On élimine désormais ce cas, que l'on dira trivial.

• Supposons d'abord que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en O et $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ en O'. On a $O \neq O'$ (sinon on est dans le cas trivial) et on considère la réflexion τ d'axe (OO'). En vertu de 4.2, on peut remplacer $\tau_1\tau_2$ par $\tau_1'\tau$ et $\tau_3\tau_4$ par $\tau\tau_4'$ et on a $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 = \tau_1'\tau_4'$.

8. Dans l'un des cas, mais l'autre est identique.

• Supposons ensuite que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en O, mais que $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ sont parallèles. On peut, sans changer $\tau_1\tau_2$, remplacer $\mathcal{D}_2$ par la parallèle à $\mathcal{D}_3$ passant par O et on est dans le cas trivial pour les trois dernières réflexions.

• Supposons enfin $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ parallèles. Alors, $\mathcal{D}_3$ n'est pas parallèle aux deux premières (sinon on est dans le cas trivial). Elle coupe donc $\mathcal{D}_2$ en O. On peut alors remplacer $\mathcal{D}_2$ par une droite $\mathcal{D}'_2$ passant par O et non parallèle à $\mathcal{D}_1$ sans changer $\tau_2\tau_3$, et on est ramené à l'un des deux premiers cas.

4.3 Le théorème de parité

4.5 Théorème. *Un produit d'un nombre pair de réflexions n'est jamais égal à un produit d'un nombre impair de réflexions.*

Démonstration. La proposition précédente permet de remplacer un produit pair par un produit de deux réflexions et un produit impair par une réflexion ou un produit de trois. On a vu l'impossibilité de la cohabitation de 1 et 2 en 4.1. Il reste le cas de 2 et 3. Mais, si l'on a $\tau_1\tau_2\tau_3 = \sigma_1\sigma_2$, on écrit cette égalité $\tau_1\tau_2\tau_3\sigma_2 = \sigma_1$, le produit de quatre est un produit de deux et on a une contradiction avec 4.1.

4.6 Corollaire. *L'ensemble des produits d'un nombre pair de réflexions est un sous-groupe du groupe des isométries. Ses éléments sont appelés isométries positives ou directes ou* **déplacements** *et les autres sont les isométries négatives ou rétrogrades ou les anti-déplacements. La composition dans le groupe des isométries obéit à la règle des signes : le produit de deux isométries de même signe est une isométrie positive, le produit de deux isométries de signes différents est une isométrie négative.*

4.4 Angles orientés

Maintenant qu'on a défini les isométries positives et négatives, on peut parler d'angles orientés. Commençons par orienter le plan :

4.7 Définition. *Parmi les ron, on en choisit un particulier $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ que l'on décrète* **direct***. Si $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ est un autre ron, en vertu de 3.8 il existe une unique isométrie f qui envoie $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$. On dit que $\mathcal{R}'$ est direct (resp. indirect) si f est positive (resp. négative).*

4.8 *Remarque.* Au lycée, on considère comme intuitivement évident qu'il y a deux types de repères : ceux qui tournent dans le sens trigonométrique et ceux qui tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. La justification de cette assertion est dans ce qui précède.

4.9 *Remarques.*
1) Si $O, \vec{i}, \vec{j}$ est direct, $O, \vec{i}, -\vec{j}$ est indirect. En effet, on passe de l'un à l'autre par une réflexion autour de la droite définie par O et $\vec{i}$.
2) Si on se donne un point O et un vecteur $\vec{v}$, on a un unique *ron* direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont le premier vecteur est égal à $\vec{v}/||\vec{v}||$. En effet, il y a *a priori* deux vecteurs $\vec{j}$ unitaires convenables, mais le point 1) montre qu'un seul convient.

On peut maintenant orienter les angles.

4.10 Définition. *Soient A, O, B trois points distincts et soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le ron direct défini par $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA}$ (le vecteur $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ est alors bien déterminé). Si l'angle non orienté $\widehat{AOB}$ est égal à $\theta \in [0, \pi]$, on définit l'angle* **orienté** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *comme égal à θ si B et J sont dans le même demi-plan limité par (OA) et à $-\theta$ sinon.*

4.11 *Remarque.* Si B est sur la demi-droite opposée à $[OA)$, la définition ci-dessus ne s'applique pas. Si l'on s'approche de cette position dans le demi-plan supérieur, l'angle orienté tend vers π si l'on s'en approche dans le demi-plan inférieur, il tend vers $-\pi$. C'est pourquoi on décide que pour les angles orientés on a $\pi = -\pi$, autrement dit qu'on travaille modulo 2π. Un angle orienté est donc un réel pris modulo 2π, donc un élément de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Les résultats précédents permettent de montrer les propriétés bien connues des angles orientés :

4.12 Proposition. *1) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non nuls, on a $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$.*
2) On a $(\vec{u}, \vec{-}u) = \pi$, $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$.

4.13 Proposition. *Soit τ une réflexion d'axe $\mathcal{D}$, O et A des points distincts de $\mathcal{D}$, M un point distinct de O et M' son image. On a $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'})$ et donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'})$.*

Démonstration. Les angles non orientés $\widehat{MOA}$ et $\widehat{M'OA}$ sont égaux mais comme τ est négative, les angles orientés $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA})$ sont opposés et on en déduit le résultat.

5 Classification des isométries du plan

5.1 Les rotations planes

On suppose $\vec{P}$ orienté, c'est à dire qu'on a choisi un *ron* particulier, dont on a décidé qu'il était direct, cf. 4.7.

5.1 Proposition-Définition. *Soit O un point de $\mathcal{P}$ et θ un angle orienté. La* **rotation** *de centre O et d'angle θ est la transformation $\rho = \rho(O,\theta)$ définie comme suit. On a $\rho(O) = O$. Si M est un point différent de O, son image M' est l'unique point défini par les deux relations $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.*

Démonstration. On vérifie qu'il existe bien un unique point M' vérifiant les conditions.

5.2 Proposition. *1) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites passant par O, munies de vecteurs unitaires $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ tels que l'on ait $(\vec{v}, \vec{v}') = \varphi$. Alors le produit $\rho = \tau_{\mathcal{D}'}\tau_{\mathcal{D}}$ est la rotation de centre O et d'angle 2φ.*

2) Toute rotation est une isométrie directe.

Démonstration. Il est clair que O est fixe par ρ. Si M est distinct de O, posons $M' = \tau_{\mathcal{D}}(M)$ et $M'' = \tau_{\mathcal{D}'}(M') = \rho(M)$. Soit $A \in \mathcal{D}$ et $A' \in \mathcal{D}'$. La proposition 4.13 donne $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'})$ et $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}) = 2(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA'})$. La relation de Chasles donne alors $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$.

5.3 *Remarque.* On notera que l'angle de la rotation ne dépend pas du choix des vecteurs unitaires sur les droites. En effet, si, par exemple, on change $\vec{v}$ en $-\vec{v}$, l'angle φ est changé en $\varphi + \pi$ mais on a $2(\varphi + \pi) = 2\varphi$ modulo 2π. L'angle φ peut être défini modulo π : c'est l'angle de droites $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

5.2 Glissages

5.4 Définition. *On appelle* **glissage** *ou* **symétrie glissée** *la composée d'une réflexion d'axe D et d'une translation non triviale d'axe parallèle à D.*

5.3 La classification

5.5 Théorème. *1) Les déplacements du plan sont l'identité, les translations et les rotations.*

2) Les anti-déplacements du plan sont les réflexions et les glissages.

Démonstration. 1) Un déplacement qui n'est pas l'identité est produit de deux réflexions. Si les axes sont parallèles il s'agit d'une translation (voir 4.2), sinon d'une rotation (voir 5.2).

2) Si un anti-déplacement n'est pas une réflexion, il est produit de trois réflexions. On montre alors qu'il est produit d'une réflexion et d'une translation, dont on décompose le vecteur selon la direction de $\mathcal{D}$ et la direction orthogonale. Pour conclure il reste à prouver le lemme suivant :

5.6 Lemme. *Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\vec{v}$ un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$. Alors le produit $\tau_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{v}}$ (resp. $t_{\vec{v}} \circ \tau_{\mathcal{D}}$) est la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}'$ déduite de $\mathcal{D}$ par la translation de vecteur $-\frac{\vec{v}}{2}$ (resp. $\frac{\vec{v}}{2}$).*

Ce que le lecteur ne manquera pas de faire ...