Hyperbole

Soient a, c des nombres tels que $0 < a < c$, $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$. Je montre :

Théorème. *L'ensemble $\mathcal{H}$ des points $M = (x, y)$ qui vérifient $|MF' - MF| = 2a$ et l'ensemble $\mathcal{H}'$ des points qui vérifient $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$ sont identiques.*

Démonstration.

0) Calculs préliminaires :

$$MF^2 = x^2 + y^2 - 2cx + c^2, \quad MF'^2 = x^2 + y^2 + 2cx + c^2, MF'^2 - MF^2 = 4cx.$$

1) Montrons que $\mathcal{H}$ est contenu dans $\mathcal{H}'$. Soit $M = (x, y) \in \mathcal{H}$.

Supposons d'abord $MF' \geq MF$. On a donc $MF' - MF = 2a$. Avec $MF'^2 - MF^2 = (MF' - MF)(MF' + MF)$, on en déduit $MF' + MF = \dfrac{2cx}{a}$, puis $MF' = a + \dfrac{c}{a}x$.

Supposons $MF' \leq MF$. On a $MF - MF' = 2a$ d'où $MF' = -a - \dfrac{c}{a}x$.

Dans les deux cas, on a $MF'^2 = a^2 + \dfrac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx = x^2 + y^2 + 2cx + c^2$, d'où :

$$x^2 \frac{c^2 - a^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$$

et le point M est dans $\mathcal{H}'$.

2) Montrons que $\mathcal{H}'$ est contenu dans $\mathcal{H}$. Soit $M = (x, y) \in \mathcal{H}'$. On note qu'on a $x^2 = a^2 + \dfrac{a^2 y^2}{c^2 - a^2}$, donc $|x| \geq a > a^2/c$. On note aussi qu'on a : $x^2 + y^2 = a^2 - c^2 + \dfrac{c^2}{a^2}x^2$.

On en déduit, en remplaçant $x^2 + y^2$ dans les calculs préliminaires :

$$MF^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 \quad \text{et} \quad MF'^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2.$$

• Premier cas : $MF = \dfrac{c}{a}x - a$. Cela impose $x \geq 0$, d'où $MF' = \dfrac{c}{a}x + a$ et on a alors $MF' - MF = 2a$.

• Deuxième cas : $MF = a - \dfrac{c}{a}x$. Alors x est < 0 (sinon, on a $x > a^2/c$ et MF est < 0). On a alors $MF' = -a - \dfrac{c}{a}x$. En effet, on vérifie que cette quantité est > 0 (toujours le fait que $|x|$ est plus grand que a^2/c). Mais alors, on a $MF - MF' = 2a$.

Dans les deux cas on a montré que M est dans $\mathcal{H}$.