Les équations des ellipses

On travaille dans le plan $E = \mathbf{R}^2$ muni de sa forme euclidienne canonique $x^2 + y^2$.

1 Formes quadratiques

Rappelons que si $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ est une forme quadratique, sa forme polaire φ est définie par :

$$\varphi((x, y), (x', y')) = axx' + b(xy' + x'y) + cyy'$$

et qu'on a, si e, f sont deux vecteurs et λ, μ deux scalaires, $q(\lambda e + \mu f) = \lambda^2 q(e) + 2\lambda\mu\varphi(e, f) + \mu^2 q(f)$. Une base e, f de E est dite orthogonale pour q (ou φ) si elle vérifie $\varphi(e, f) = 0$. La forme q est dite définie positive si on a $q((x, y)) > 0$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

1.1 Proposition. *Si e, f est orthogonale pour q, et si x, y sont les coordonnées dans la base e, f, on a $q(x, y) = Ax^2 + By^2$.*

1.2 Proposition. *Il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour la forme euclidienne.*

Démonstration. On cherche e et f sous la forme $e = (x, y)$, $f = (y, -x)$ ce qui assure leur orthogonalité pour la forme euclidienne. On doit donc résoudre $(a - c)xy + b(y^2 - x^2) = 0$. Si b est nul le vecteur $(1, 0)$ convient. Sinon, on prend $x = 1$ et on cherche y tel que $by^2 + (a - c)y - b = 0$. Comme le discriminant de cette équation est $(a - c)^2 + 4b^2 > 0$, il en existe.

1.3 *Remarque.* Ce que nous avons fait revient à diagonaliser la matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dans une base orthogonale (voire orthonormée).

2 Ellipses

On suppose qu'on a défini géométriquement les ellipses et qu'elles sont caractérisées par le fait d'avoir une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé.

2.1 Proposition. *Soit O, i, j un repère cartésien (pas nécessairement orthonormé), x, y les coordonnées associées et soit $q(x, y)$ une forme définie positive. L'ensemble des points définis par l'équation $q(x, y) = \lambda$ avec $\lambda > 0$ est une ellipse.*

Démonstration. En vertu de 1.2 il existe une base orthonormée dans laquelle q est diagonale : $AX^2 + BY^2$ et, comme q est définie positive, $A/\lambda, B/\lambda$ sont > 0, de sorte qu'on peut les écrire sous la forme $1/a^2$, $1/b^2$.

2.2 Théorème. *Les ellipses sont exactement les images des cercles par les applications affines bijectives.*

Démonstration. Il est clair que tous les cercles sont dans la même orbite sous $GA(E)$ et qu'une ellipse est l'image d'un cercle par une affinité orthogonale. Il reste à voir que l'image d'un cercle par une bijection affine est une ellipse et on peut se limiter au cercle unité Γ et supposer que l'origine est fixe. On a alors une application linéaire u, dont on peut supposer que l'inverse est donnée par $u^{-1}(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = (X, Y)$. Si (X, Y) est sur le cercle unité on a $X^2 + Y^2 = 1$, et $u(\Gamma)$ est donné par l'équation $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$. Comme le premier membre est une forme quadratique définie positive, il s'agit bien d'une ellipse.

3 Équations des ellipses

3.1 Théorème. *Une équation de la forme :*

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

définit une ellipse si et seulement si on a les relations : $ac - b^2 > 0$ et

$$A := (bd - ae)^2 - (d^2 - af)(b^2 - ac) > 0.$$

Démonstration. Si on a les conditions, on a $a \neq 0$ et on peut supposer $a > 0$. On écrit alors F sous la forme :

$$F(x, y) = a\big(x + \frac{b}{a}y + \frac{d}{a}\big) + \frac{ac - b^2}{a}\big(y + \frac{ae - bd}{ac - b^2}\big)^2 - \frac{A}{a(ac - b^2)}$$

et on conclut par 2.1

Réciproquement, si $V(F)$ es une ellipse, on montre d'abord que a est non nul (sinon, $V(F)$ est vide ou non borné). On peut alors supposer $a > 0$ et on commence à écrire F sous la forme ci-dessus. On montre alors que si $ac - b^2$ est négatif ou nul $V(F)$ est vide ou non borné. On finit l'écriture et si A est < 0 (resp. $= 0$) $V(F)$ est vide (resp. réduit à un point).