Droites du plan : une version analytique

Daniel Perrin

1 Introduction

Le but de ce texte est de donner des éléments pour traiter l'exposé de CAPES numéro 27 (numérotation 2013). Par rapport à mon texte plus ancien sur le sujet, j'abandonne[1] *l'ambition de donner un traitement axiomatique pour me concentrer sur ce qu'est actuellement la géométrie, au moins au lycée, à savoir uniquement analytique et vectorielle. Je précise que je comprends cet exposé comme relevant de la* **géométrie** *et que je considère qu'y traiter des tangentes et des asymptotes est un détournement de sujet.*

Pour le CAPES, un bon principe est de bâtir un plan autour de développements possibles. Ici il y a notamment les théorèmes 3.2 (les équations), 3.7 (le théorème de concours), 3.8 (le théorème à 4 *droites), les médianes, 4.11 (Pappus) et 5.1 (Newton). Attention, il faut avoir préparé ces développements pour être capable de les faire le jour J.*

2 Prérequis

Le niveau est au moins celui de la classe de troisième. Cela signifie que l'on tient pour acquis les programmes de collège. On sait donc ce qu'est le plan affine euclidien, ses points et ses droites et les notions usuelles le concernant : incidence, parallélisme, orthogonalité, distance et angle. On dispose aussi des résultats du collège et notamment Thalès et Pythagore. On suppose aussi connus les systèmes linéaires, que l'on commence à rencontrer dès le collège.

On suppose aussi connues[2] les bases de la géométrie analytique : notion de repère (orthonormé ou non) et de coordonnées (mais on revient sur les équations des droites).

On suppose enfin connue la notion de vecteur (vue en seconde). Là encore, je donnerai des indications pour répondre à d'éventuelles questions.

1. Cela ne signifie pas que je cautionne les actuels programmes, dont j'ai écrit en maints endroits combien ils étaient désastreux.

2. Vu le niveau choisi, c'est possible, puisque ces notions sont vues dès la cinquième (et utilisées surtout en troisième). À mon avis c'est plus prudent de supposer cela connu, mais j'en redonne ci-dessous une définition (en prévision de questions).

3 Définition analytique des droites

3.1 Repères et coordonnées

On considère un repère du plan, c'est-à-dire trois points, une origine o et deux points u et v non alignés avec o. On peut bien entendu supposer que ce repère est orthonormé : (ou) et (ov) perpendiculaires et $ou = ov = 1$, mais ce n'est pas obligatoire et cela peut être maladroit lorsque les problèmes à traiter sont de nature affine. Les droites (ou) et (ov) sont orientées par la donnée de o, u et o, v. On les appelle axe des x et des y et, si m est sur (ou) (resp. (ov)), l'abscisse de m sur le repère o, u (resp. o, v) est notée x (resp. y). En termes vectoriels cela signifie, pour m sur l'axe des x, qu'on a $\overrightarrow{om} = x\overrightarrow{ou}$. On pose $\overline{om} = x$ et on appelle **mesure algébrique** cette quantité. Bien que cette notion ne soit plus au programme, je l'utiliserai pour éviter des discussions interminables sur les cas de figure. Pour un point m quelconque du plan, on considère ses projetés p et q sur (ou) et (ov) parallèlement à (ov) et (ou) respectivement.

3.1 Proposition-Définition. *Avec les notations précédentes, les abscisses (x, y) des points p, q sur les axes sont appelées respectivement* **l'abscisse et l'ordonnée** *(ou les coordonnées) de m dans le repère o, u, v.*

L'application Φ de P dans $\mathbf{R}^2$ qui à un point m associe ses coordonnées est une bijection.

Démonstration. Il est clair que x, y déterminent de manière unique les points p et q donc aussi m en traçant les parallèles aux axes passant par p, q. Cela montre que Φ est bijective.

3.2 Équations des droites

On a le théorème suivant[3] :

3.2 Théorème. *Soit D une droite du plan.*

1) Si D est parallèle à (ov) et si elle coupe l'axe (ou) en un point d'abscisse α, D est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant $x = \alpha$.

2) Si D n'est pas parallèle à (ov), il existe deux réels α, β, uniques, tels que D est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant $y = \alpha x + \beta$.

Démonstration.

3. Il est vu dès la troisième, et il me semble important de l'énoncer et de savoir le prouver.

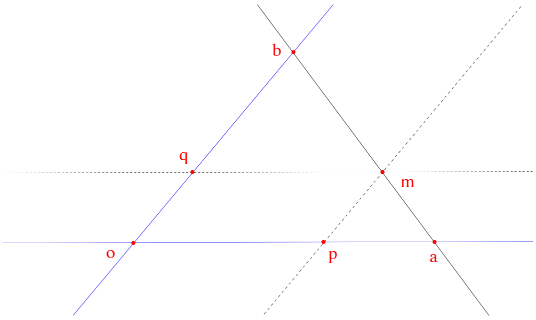

FIGURE 1 – Équation d'une droite

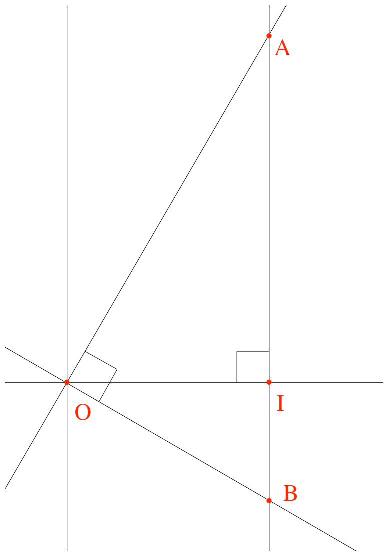

FIGURE 2 – Coefficients directeurs

Le point 1) est clair. Pour 2), on élimine d'abord le cas où D est parallèle à (ou) qui donne l'équation $y = \beta$. On considère ensuite le point d'intersection b de D avec (ov) qui a pour ordonnée β et le point d'intersection a de D et (ou) qui a pour abscisse γ. Soit m un point de D et soient p, q ses projetés sur les axes. On a donc $\overline{op} = x$ et $\overline{oq} = y$. Le théorème de Thalès dans aob donne la relation : $\dfrac{\overline{ap}}{\overline{ao}} = \dfrac{\overline{pm}}{\overline{ob}}$ et, comme on a $\overline{pm} = \overline{oq}$ et $\overline{ap} = \overline{ao} + \overline{op}$, on obtient $\dfrac{x-\gamma}{-\gamma} = \dfrac{y}{\beta}$, soit $y = -\frac{\beta}{\gamma}x + \beta$ qui est bien de la forme annoncée. On voit que les coefficients sont bien déterminés par D (*via* les points a et b).

La réciproque vient de la réciproque de Thalès.

3.3 Proposition. *Les droites d'équations $y = \alpha x + \beta$ et $y = \alpha' x + \beta'$ sont parallèles si et seulement si on a $\alpha = \alpha'$. Si le repère est orthonormé, elles sont perpendiculaires si et seulement si on a $\alpha\alpha' = -1$.*

Démonstration. Pour le parallélisme, c'est Thalès. Pour l'orthogonalité on se ramène au cas des droites passant par l'origine. On considère alors le triangle rectangle AOB bâti sur les deux droites et dont l'hypoténuse est la droite $x = 1$, voir fig. 2. On a $\overline{IA} = \alpha$ et $\overline{IB} = \alpha'$. Par Pythagore on en déduit $OA^2 = \alpha^2 + 1$ et $OB^2 = \alpha'^2 + 1$. Par ailleurs on a $\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} = \alpha' - \alpha$. Comme AOB est rectangle on a donc $AB^2 = (\alpha' - \alpha)^2 = OA^2 + OB^2 = \alpha^2 + 1 + \alpha'^2 + 1$ d'où le résultat. La réciproque utilise la réciproque de Pythagore.

3.4 Corollaire. *Les droites du plan sont définies par les équations $ux + vy + w = 0$ avec u, v non tous deux nuls. Les droites d'équations $ux + vy + w = 0$*

et $u'x + v'y + w' = 0$ sont parallèles (resp. perpendiculaires) si et seulement si l'on a $uv' - u'v = 0$ (resp. $uu' + vv' = 0$).

3.3 Propriétés d'incidence

Le corollaire précédent permet une pratique alternative de la géométrie : dans cette optique, le plan n'est autre que l'ensemble $\mathbf{R}^2$ et les droites sont définies par les équations $ux + vy + w = 0$. Je montre d'abord dans ce paragraphe comment on peut, avec cette entrée, retrouver les axiomes et les résultats d'Euclide, puis je donne quelques compléments sur des conditions de concours. Je me contente ici de donner les énoncés et des indications de preuve succinctes. Les preuves reposent essentiellement sur la résolution de systèmes linéaires. Il est fait allusion à cette situation dans le programme de seconde. Pour le CAPES, on peut se contenter de donner le résultat 3.7 et une application.

3.5 Proposition. *Soient D, D' deux droites du plan, d'équations $ux + vy + w = 0$ et $u'x + v'y + w' = 0$ avec (u, v) et (u', v') différents de $(0, 0)$.*

1) L'intersection $D \cap D'$ est réduite à un point si et seulement si on a $uv' - u'v \neq 0$.

2) Si $uv' - u'v$ est nul il y a deux cas :

a) Si $uw' - u'w$ et $vw' - v'w$ sont nuls, on a $D = D'$. C'est le cas où les deux équations sont proportionnelles.

b) Si $uw' - u'w$ ou $vw' - v'w$ est non nul les droites sont parallèles (i.e. $D \cap D' = \emptyset$.

Démonstration. C'est la résolution du système :

$$\begin{cases} ux + vy + w = 0 \\ u'x + v'y + w' = 0. \end{cases}$$

(On peut par exemple supposer $u \neq 0$.)

On retrouve comme corollaire de cette proposition plusieurs résultats qui sont des axiomes ou des résultats d'Euclide :

3.6 Corollaire. *1) Par deux points passe une droite et une seule.*

2) Le parallélisme est une relation d'équivalence.

3) On a le postulat d'Euclide.

Démonstration. Pour le premier point on résout en u, v, w le système :

$$\begin{cases} ux_1 + vy_1 + w = 0 \\ ux_2 + vy_2 + w = 0. \end{cases}$$

Le second point se voit sur la condition : équations proportionnelles. Enfin, pour le troisième, on normalise l'équation de la droite en imposant $u = 1$ (ou $u = 0$, $v = 1$) et le w est alors déterminé.

3.4 Le théorème de concours

On considère trois droites D, D', D'' du plan, d'équations $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$ avec $\delta(x,y) = ax + by + c$, $\delta'(x,y) = a'x + b'y + c'$ et $\delta''(x,y) = a''x + b''y + c''$. Cela suppose que les nombres a et b (resp. a' et b', resp. a'' et b'') ne sont pas tous deux nuls. Rappelons que δ et δ' définissent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles : $\delta = k\delta'$ avec $k \in \mathbf{R}^*$.

Un théorème important est le suivant :

3.7 Théorème. *On reprend les notations ci-dessus et on suppose les droites D et D' distinctes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) les droites D, D', D'' sont concourantes ou parallèles,
2) il existe des scalaires λ et λ' (non tous deux nuls) tels que $\delta'' = \lambda\delta + \lambda'\delta'$.

Démonstration.
2) $\Longrightarrow$ 1) Supposons d'abord qu'on a $\delta'' = \lambda\delta + \lambda'\delta'$. Si D et D' ne sont pas parallèles, elles se coupent en $m = (x,y)$ et on a donc $\delta(m) = \delta'(m) = 0$. Mais alors on a aussi $\delta''(m) = \lambda\delta(m) + \lambda'\delta'(m) = 0$ de sorte que m est sur D''.

Si D et D' sont parallèles, montrons que D'' leur est parallèle. Si $D'' = D'$ c'est évident. Supposons donc $D'' \neq D'$, ce qui implique $\lambda \neq 0$. On a donc $\delta = \dfrac{\delta''}{\lambda} - \dfrac{\lambda'}{\lambda}\delta'$. Si D'' n'était pas parallèle à D' elle couperait D' en $m = (x,y)$. On aurait donc $\delta''(m) = \delta'(m) = 0$, d'où $\delta(m) = 0$ avec la relation précédente. Mais cela contredit le parallélisme de D et D'.

1) $\Longrightarrow$ 2) Supposons maintenant que les trois droites sont parallèles ou concourantes. Soit p un point de D' non situé sur D (ça existe car ces droites sont distinctes). Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\delta''(p) - \lambda\delta(p) = 0$ (il suffit de prendre $\lambda = \dfrac{\delta''(p)}{\delta(p)}$ puisque $\delta(p)$ est non nul). La droite Δ d'équation [4] $\delta'' - \lambda\delta = 0$ passe donc par p.

On distingue alors deux cas.

1) Si les droites sont concourantes en m (nécessairement différent de p), la droite Δ passe aussi par m. Comme elle passe par m et p c'est donc D' et son équation est proportionnelle à δ' : $\delta'' - \lambda\delta = \lambda'\delta'$.

4. Si on a $\delta'' = \lambda\delta$, on a déjà fini.

2) Si les droites sont parallèles, la droite Δ est aussi parallèle à D (c'est le sens direct) et elle passe par p. Le postulat d'Euclide montre que c'est D' et on conclut comme dans le premier cas.

3.5 Une application : le théorème à quatre droites

L'application suivante est très jolie, mais pas si facile :

3.8 Théorème. *Soient A, B, C, D quatre droites en position générale (c'est-à-dire sans relation de parallélisme ni de concours). On considère les droites A', B', C' joignant respectivement les points d'intersection de B, C et A, D (resp. C, A et B, D, resp. A, B et C, D), puis les droites A'', B'', C'' joignant respectivement les points d'intersection de B, C et B', C' (resp. C, A et C', A', resp. A, B et A', B'). Alors, A'', B'', C'' sont concourantes ou parallèles.*

Démonstration. On confond ici droites et équations [5]. Comme les équations des droites dépendent de trois paramètres et que A, B, C sont en position générale, on peut écrire l'équation de D comme combinaison linéaire de celles de A, B, C : $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$ (c'est encore une question de systèmes d'équations linéaires). On a donc $\beta B + \gamma C = D - \alpha A$ et la droite qui admet cette équation concourt à la fois avec B, C et avec A, D. C'est donc A'. De même, on a $B' = \gamma C + \alpha A = D - \beta B$ et $C' = \alpha A + \beta B = D - \gamma C$.

On considère ensuite l'équation $B' - C' = \gamma C - \beta B$. C'est l'équation d'une droite qui concourt avec B', C' mais aussi avec B, C : c'est A''. De même, on a $B'' = C' - A'$ et $C'' = A' - B'$. Mais alors, on a $A'' + B'' + C'' = 0$ et ces droites sont concourantes ou parallèles ! !

3.6 Une autre application : le concours des médianes

Ici, le mieux est d'utiliser un repère non orthogonal. On a un triangle ABC et on prend comme origine B et comme axes (BC) et (BA), de telle sorte que les coordonnées des points sont $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $A = (0, 1)$. Les milieux des côtés sont alors les points $A' = (1/2, 0)$, $B' = (1/2, 1/2)$ et $C' = (0, 1/2)$. Les équations des médianes (AA'), (BB') et (CC') sont respectivement $y = -2x + 1$, $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ou encore $2x + y - 1 = 0$. On vérifie que le point $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est sur les trois médianes ou on applique 3.7.

5. Précisément, formes affines définissant ces équations.

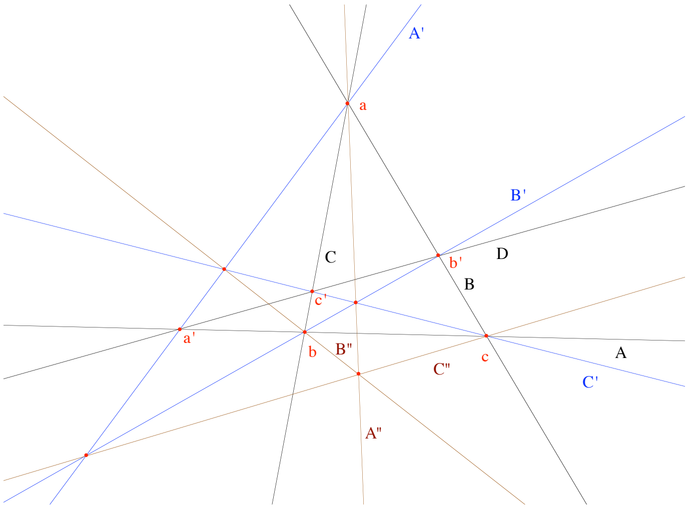

Figure 3 – Le théorème à quatre droites

3.7 Encore une application : le concours des hauteurs

3.9 Théorème. *Soit ABC un triangle, H, K, L les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Alors $(AH), (BK), (CL)$ sont concourantes.*

Démonstration. On utilise un repère orthonormé d'origine H, avec (BC) comme axe des x et (AH) comme axe des y. On pose $A = (0, a)$, $B = (b, 0)$ et $C = (c, 0)$. On écrit d'abord les équations de (AB) et (AC) qui sont respectivement [6] $y = a - \dfrac{a}{b}x$ et $y = a - \dfrac{a}{c}x$, puis celle de (CL) et (BK) qui sont perpendiculaires aux précédentes (on utilise le fait que le produit des coefficients directeurs vaut -1). On trouve respectivement $\delta_C = \dfrac{b}{a}x - \dfrac{bc}{a}$ et $\delta_B = \dfrac{c}{a}x - \dfrac{bc}{a}$. Comme l'équation de (AH) est $x = 0$, on peut conclure par 3.7 en notant qu'on a $\delta_C - \delta_B = \dfrac{b-c}{a}x$, mais il est aussi simple de chercher l'intersection de (BK) et (CL) et de noter que son abscisse est nulle.

3.8 Pour apprendre à calculer avec des paramètres

L'intérêt [7] de l'exercice suivant est d'apprendre aux élèves à calculer avec plusieurs paramètres, chose que l'on fait insuffisamment à l'heure actuelle et

6. On peut dégager en lemme le fait que la droite qui joint $(p, 0)$ et $(0, q)$ a pour équation $y = -\frac{q}{p}x + q$.

7. En fait, cet exercice est une variante du théorème de Brianchon, dual de Pappus.

qui est très utile dans les applications, notamment en physique.

On considère un rectangle $ABCD$ et un point P intérieur au rectangle. La parallèle à (AB) passant par P coupe (AD) en J et (BC) en L. La parallèle à (BC) passant par P coupe (AB) en I et (CD) en K.

1) Pour quelles positions de P les deux droites (IL) et (JK) sont-elles parallèles ? Interpréter géométriquement la condition obtenue. Préciser la direction de ces droites.

2) On suppose les droites (IL) et (JK) sécantes en M. Montrer que M est sur (AC).

Pour traiter l'exercice, on choisit A comme origine, on suppose que les coordonnées de B sont $(b, 0)$, celles de D, $(0, d)$ et celles de P, (p, q). On calcule les coordonnées des points I, J, K, L, puis les équations des droites (IL) et (JK). On peut compléter l'exercice en demandant des preuves géométriques, ou en discutant la nature du quadrilatère $IJKL$, etc.

4 Définition vectorielle des droites

On passe maintenant à l'approche vectorielle des droites. Comme ci-dessus, je commence par un paragraphe de rappels, ici sur les vecteurs. Au CAPES, ces rappels doivent être mis en pré-requis. Je les donne ici parce qu'ils peuvent permettre de répondre à des questions.

4.1 Rappels sur les vecteurs

4.1.1 La relation d'équipollence

4.1 Définition. *Soient (a, b) et (c, d) deux couples de points (on parlait autrefois de bipoints). On dit qu'ils sont* **équipollents** *si $abdc$ est un parallélogramme ou si l'on a, à la fois, $a = b$ et $c = d$.*

4.2 Théorème. *La relation d'équipollence est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Réflexivité et symétrie sont évidentes. La transitivité est le théorème du prisme, voir par exemple :

`http://www.math.u-psud.fr/ perrin/Conferences/ThalesDP.pdf.`

C'est là qu'on utilise le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu et la droite des milieux.

4.3 Définition. *On note $\overrightarrow{ab}$ la classe d'équivalence de (a, b) et on l'appelle* **vecteur** *a, b. L'ensemble des vecteurs de P est noté $\vec{P}$. Le vecteur correspondant à tous les couples (a, a) est le vecteur nul $\vec{0}$.*

4.4 Proposition. *Soit $\vec{v}$ un vecteur et o un point. Il existe un unique point $m \in P$ tel que $\overrightarrow{om} = \vec{v}$.*

Démonstration. Si $\vec{v} = \vec{0}$ on prend $m = o$. Sinon, on choisit un représentant (a, b) de $\vec{v}$ et on mène par o la parallèle à (ab) et par b la parallèle à (ao). Elles se coupent en m (on utilise la transitivité du parallélisme[8]), qui convient.

4.1.2 Somme vectorielle et relation de Chasles

4.5 Proposition-Définition. *Soient $\vec{v}, \vec{w}$ deux vecteurs non nuls et o un point. Soient $a, b \in P$ tels que $\vec{v} = \overrightarrow{oa}$, $\vec{w} = \overrightarrow{ob}$ (voir 4.4). Soit c le point d'intersection de la parallèle à (ob) passant par a et de la parallèle à (oa) passant par b (de sorte que $oacb$ est un parallélogramme). Alors on a $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ob} = \vec{w}$ et le vecteur $\overrightarrow{oc}$ est indépendant du choix du point o. On définit la somme vectorielle en posant $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{oc}$. Si l'un des vecteurs est nul, on définit la somme comme égale à l'autre. On a la relation (dite de Chasles) $\overrightarrow{oc} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ac}$.*

Démonstration. L'indépendance de o est une variante du théorème du prisme.

4.1.3 Multiplication par un scalaire

4.6 Définition. *Soit $\vec{v}$ un vecteur et λ un nombre réel. On choisit un représentant $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$. Soit m le point de (ab) défini par $\overline{am} = \lambda \overline{ab}$. Le vecteur $\overrightarrow{am}$ est indépendant du choix de a et on le note $\lambda \vec{v}$. Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits colinéaires s'il existe un scalaire λ tel que l'on ait $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ ou l'inverse. Il revient au même d'imposer l'existence de scalaires λ, μ non tous deux nuls vérifiant $\lambda \vec{v} + \mu \vec{w} = \vec{0}$*

4.7 Proposition. *Propriétés des espaces vectoriels (associativité, distributivité, etc.)*

4.1.4 La dimension 2

4.8 Théorème. *Soient $\vec{v}$, $\vec{w}$ deux vecteurs de $\vec{P}$, non colinéaires. Alors, tout vecteur $\vec{u} \in \vec{P}$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Les plans $\vec{P}$ et P sont en bijection avec $\mathbf{R}^2$*

Démonstration. On choisit une origine o et on écrit $\vec{v} = \overrightarrow{oa}$, $\vec{w} = \overrightarrow{ob}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{oc}$. On trace les parallèles à (oa) et (ob) passant par c qui coupent respectivement (ob) et (oa) en b', a'. On a alors $\vec{u} = \overrightarrow{oa'} + \overrightarrow{ob'}$ et la conclusion.

8. Donc le postulat d'Euclide : il n'y a pas de vecteurs dignes de ce nom en géométrie non euclidienne.

On peut alors mettre en évidence les notions de base (du plan vectoriel $\vec{P}$) et de repère (du plan affine P).

4.2 Caractérisation vectorielle des droites

Nous y sommes ! On peut enfin donner la caractérisation vectorielle d'une droite du plan affine P :

4.9 Proposition. *Soient o un point de P et $\vec{v}$ un vecteur non nul, de représentant $\overrightarrow{ab}$. On pose $D(o, \vec{v}) = \{m \in P \mid \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{om} = \lambda \vec{v}\}$. Alors, $D(o, \vec{v})$ est la droite D passant par o et parallèle à (ab). Le vecteur $\vec{v}$ est un* **vecteur directeur** *de D*

La proposition suivante résume les principales propriétés de l'écriture précédente :

4.10 Proposition. *1) Deux droites $D(a, \vec{v})$ et $D(b, \vec{w})$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Elles sont égales si l'on a, de plus, $a \in D(b, \vec{w})$ ou $b \in D(a, \vec{v})$.*

2) Si D est une droite et si a, b sont des points distincts de D, la demi-droite $[ab)$ (resp. le segment $[ab]$) est l'ensemble $\{m \in D \mid \overrightarrow{am} = \lambda \overrightarrow{ab}\}$ avec $\lambda \geq 0$ (resp. $\lambda \in [0, 1]$).

Comme dans le cas analytique, cette caractérisation peut être la source d'une définition des droites lorsque l'on part des notions d'espace vectoriel et espace affine.

4.3 Une jolie application des vecteurs : la variante affine de Pappus

4.11 Théorème. *Soient D, D' deux droites sécantes en o et soient $A, B, C \in D$ et $A', B', C' \in D'$ des points distincts et distincts de o. On suppose que les droites (AB') et $(A'B)$ (resp. (AC') et $(A'C)$ sont parallèles. Alors les droites (BC') et $(B'C)$ le sont aussi.*

Démonstration. On choisit un repère d'origine o avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs directeurs de D et D'. On appelle $a, b, c; a', b', c'$ les abscisses ou les ordonnées des points correspondants. Le vecteur $\overrightarrow{AB'}$ a pour coordonnées $(-a, b')$ et on a, de même, $\overrightarrow{BA'} = (-b, a')$. Dire que les droites (AB') et $(A'C)$ sont parallèles c'est dire que ces vecteurs sont colinéaires et c'est donc $aa' = bb'$. De même, dire que (AC') et $(A'C)$ sont parallèles c'est $aa' = cc'$, et pour (BC') et $(B'C)$ c'est $bb' = cc'$. La conclusion est alors évidente.

4.12 *Remarque.* On peut aussi écrire les équations des droites, par exemple (AB') a pour équation $y = -\frac{b'}{a}x + b'$ et écrire l'égalité des coefficients directeurs.

5 Encore un joli résultat : le théorème de Newton

5.1 Théorème. *Soient D, D' deux droites parallèles et o un point non situé sur D, D'. Trois droites issues de o coupent respectivement D, D' en a, a', ; b, b' ; c, c'. On appelle p (resp. q) les points d'intersection de $(a'b)$ et (ab') (resp. (bc') et $(b'c)$). Alors, la droite (pq) est parallèle à D et D'.*

Démonstration.

Par le sens direct de Thalès, on a $r := \frac{\overline{pb'}}{\overline{pa}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{ba}} = -\frac{\overline{ob'}}{\overline{ob}} = \frac{\overline{b'c'}}{\overline{cb}} = \frac{\overline{qb'}}{\overline{qc}}$ et le résultat s'ensuit par la réciproque de Thalès.

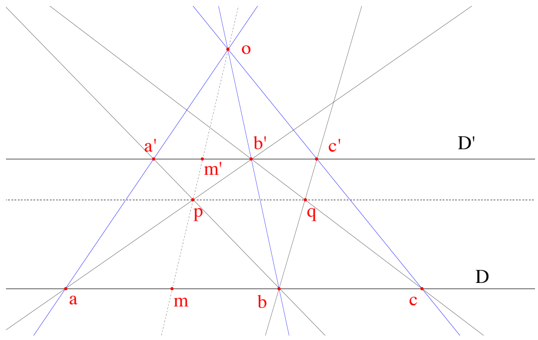

FIGURE 4 – Le théorème de Newton

Attention, si l'on n'a pas utilisé les mesures algébriques, il faut préciser que les points p, q sont entre les parallèles pour être sûr d'être dans la position "triangle" de Thalès.

Un autre résultat c'est que les points m et m' de la figure sont les milieux de a, b et a', b'. Il sufit pour cela de noter que le rapport r ci-dessus est aussi égal à $\frac{\overline{m'b'}}{\overline{ma}}$ et à $-\frac{\overline{m'b'}}{\overline{mb}}$.

Une jolie application consiste à construire **à la règle seule** *une parallèle à une droite donnée D lorsqu'on dispose déjà d'une parallèle à D.*