Droites du plan

Daniel Perrin

1 Introduction

Le but de ce texte est de donner des éléments pour traiter l'exposé de CAPES numéro 27 (numérotation 2013). En vérité, les exposés 27 et 28 CAPES posent plusieurs problèmes, dont le principal est le programme. Comme on n'a que le programme des classes de collège et de lycée à notre disposition (le programme des BTS est vraiment inutilisable, surtout en géométrie), il est totalement impossible d'avoir un traitement un tant soit peu rigoureux des questions géométriques de base, sans s'écarter largement des rails du programme. Dans le système précédent, il y avait (implicitement) une approche par les espaces vectoriels et les espaces affines, voire par la géométrie analytique, celle de $\mathbf{R}^n$*, qui conduisait à utiliser le programme complémentaire. Ici, on ne sait vraiment plus sur quel pied danser.*

J'ai donc fait un choix, plus facile pour la leçon 28 que pour la 27, celui de partir d'une approche euclidienne (ou plutôt euclido-hilbertienne), mais en essayant de donner aussi des éléments sur les approches vectorielle et analytique. **Attention***, il y a ici beaucoup trop de choses pour la leçon de CAPES et il faut faire des choix, voir à la fin.*

Je référerai souvent à mon cours de M1, disponible sur WIMS. Une autre référence possible, mais épuisée, est le livre d'Annie Cousin-Fauconnet.

2 Les axiomes et les premiers résultats

Sur tout ce paragraphe, voir mon cours de M1, paragraphe 3.

Une façon de traiter cette leçon est de partir du programme du collège, notamment du programme de sixième, qui introduit parallèles et perpendiculaires. Le problème c'est qu'à ce niveau on admet pratiquement toutes les propriétés. Je donne ici un aperçu des axiomes et des résultats sur lesquelles se fonde cet enseignement, dans une approche euclidienne. Bien entendu, ce que j'écris ici est beaucoup trop sommaire pour être rigoureux. Par ailleurs, je ne suis pas sûr qu'il soit prudent d'aborder ces points devant un jury de CAPES, mais ils me semblent importants pour des futurs professeurs.

2.1 Les axiomes

On postule l'existence d'un ensemble appelé **plan** et noté P. Cet espace est formé de points et contient des parties remarquables appelées **droites** soumises aux axiomes ci-dessous :

1) Par deux points a, b distincts passe une droite et une seule notée (ab).

2) Chaque droite D est munie d'une relation d'ordre total sans plus petit ni plus grand élément.

Cet axiome permet de définir le segment $[ab] = \{x \in (ab) \mid a \leq x \leq b\}$, ainsi que la demi-droite $[ab) = \{x \in (ab) \mid a \leq x\}$ (si $a < b$).

3) Une droite D contenue partage le plan en trois parties non vides et disjointes : D et deux demi-plans ouverts notés P^+ et P^-. Deux points a, b de P sont dans le même demi-plan (on dit aussi "du même côté de D") si et seulement si $[ab]$ ne rencontre pas D.

2.1 *Remarque.* L'hypothèse sur la relation d'ordre assure que les droites sont infinies.

2.2 Secteurs, etc.

Voir mon cours de M1, §3.3, version 2011-2012.

2.3 Intersection et parallélisme

Le premier axiome donne aussitôt :

2.2 Proposition. *Deux droites distinctes D et D' se coupent en au plus un point. Si elles sont disjointes on dit qu'elles sont* **parallèles**. *On convient d'englober dans le parallélisme le cas où les droites sont égales.*

2.3 Axiome. (Postulat d'Euclide)

Par un point donné passe une parallèle et une seule à une droite donnée.

2.4 Conséquences

2.4 Théorème. (Transitivité du parallélisme des droites) *Si D, D', D'' sont trois droites avec D parallèle à D' et D' parallèle à D'', D est parallèle à D''.*

2.5 Définition. *On appelle* **parallélogramme** *la donnée de quatre points a, b, c, d tels que les droites (ab) et (cd) (resp. (ad) et (bc)) soient parallèles. On dit que le parallélogramme est non aplati si les quatre points ne sont pas* *alignés. On note*[1] *ce parallélogramme abcd. Les côtés sont les segments* $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$ *et* $[da]$, *les diagonales les segments* $[ac]$ *et* $[bd]$.

2.5 Géométrie métrique

Pour avoir les notions de distance et d'angle, donc de perpendiculaire, il faut se donner des axiomes supplémentaires. On se place dans le cadre euclidien, mais on se permet de l'exprimer en langage moderne. On a une notion de longueur, donc une distance sur le plan[2]. On note ab la longueur du segment $[ab]$. On a aussi une notion d'angle (voir mon cours de M1 2011 sur le sujet). On note $\widehat{aob}$ l'angle du secteur $[\widehat{aob}]$. Nous commettrons un crime de lèse-Euclide et un anachronisme majeur en voyant distance et angle comme des nombres réels. Dans Euclide, on dispose tout de suite des cas d'isométrie (le premier est la proposition 4 du Livre I, les autres sont à peine plus loin). On obtient les propriétés des distances (inégalité triangulaire) et des angles (somme de deux angles d'un triangle plus petite que π). On peut aussi parler de symétrie centrale et axiale, même si ces mots ne sont pas dans Euclide. Avec le postulat des parallèles on a les propriétés des angles alternes-internes (sens direct et réciproque).

Deux résultats concernant les perpendiculaires sont importants à ce niveau :

2.6 Proposition. *1) Si deux droites* D, D' *sont perpendiculaires à une même troisième, elle sont parallèles.*

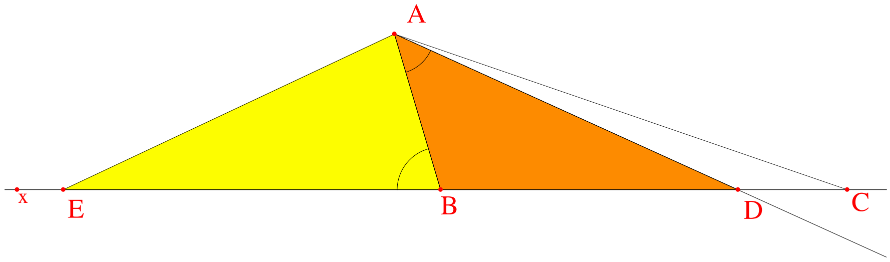
2) Si deux droites D, D' *sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Au niveau du collège, on ne peut qu'admettre ces résultats, mais il est intéressant de discuter leur preuve dans le cadre de la géométrie d'Euclide.

1) Ce point est valable sans le postulat d'Euclide. Il repose sur le lemme suivant :

2.7 Lemme. *Dans un triangle* ABC, *la somme de deux angles est* $< \pi$.

Démonstration. On suppose que la somme des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ est $\geq \pi$. Soit $[Bx)$ la demi-droite opposée à $[BC)$. On a donc $\pi - \widehat{ABC} = \widehat{ABx} \leq \widehat{BAC}$, de sorte qu'on peut reporter l'angle $\widehat{ABx}$ dans $\widehat{BAC}$. On obtient le point D. On porte alors E sur $[Bx)$ tel que $BE = BD$. Les triangles ABE et BAD sont isométriques (par le premier cas d'isométrie). On en déduit qu'on



a $\widehat{EAB} = \widehat{DBA} = \pi - BAD$. Cela montre que E, A, D sont alignés et c'est absurde.

Avec ce lemme on a 2.6.1. En effet, si D, D' sont perpendiculaires à Δ en A, B et si elles se coupent en C, le triangle ABC a deux angles droits ce qui contredit le lemme.

Pour le point 2) en revanche, on a besoin du postulat d'Euclide (le résultat est faux en géométrie hyperbolique). La recette est simple, si Δ est perpendiculaire à D en A et coupe D' en B, les angles alternes-internes en A, B sont égaux (on utilise le postulat d'Euclide ici) et comme l'un est droit, l'autre aussi.

Un autre résultat important est l'existence de perpendiculaires :

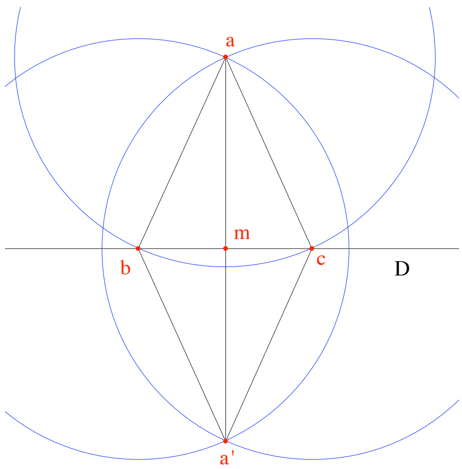
2.8 Proposition. *Soit D une droite et a un point. Il existe une unique perpendiculaire à D passant par a.*

Démonstration. Au collège, le résultat est admis. En voici une preuve à la manière d'Euclide. Supposons le point a non situé sur D (l'autre cas s'y ramène en traçant une parallèle).

On trace un cercle de centre a et de rayon assez grand pour qu'il coupe D en b et c, voir figure ci-dessous. On trace ensuite le cercle de centre b (resp. c) passant par a. Ces cercles se coupent en a et a' et la droite (aa') est la perpendiculaire cherchée. En effet, on note d'abord que les triangles aba' et aca' sont isométriques (trois côtés égaux). On en déduit $\widehat{bam} = \widehat{cam}$. Cela montre que les triangles abm et acm sont isométriques (deux côtés et un angle) et on en déduit qu'on a $\widehat{bma} = \widehat{cma}$. Comme ces angles sont supplémentaires, ils sont droits.

L'unicité de la perpendiculaire résulte de 2.6.1.

1. À permutation circulaire près.
2. Premier exemple de liberté prise par rapport à Euclide ; il n'utilise pas cette notion.



3 Le chemin vers Thalès

Notre objectif est maintenant d'introduire les notions qui apparaissent en fin de collège et au début du lycée, à savoir :

• *justifier le fait que le graphe d'une fonction linéaire ou affine est une droite, ce qui peut mener à une définition analytique des droites,*

• *définir les vecteurs et retrouver une caractérisation, voire une définition, vectorielle des droites.*

Pour cela, il faut avoir à disposition les propriétés affines du plan (le parallélogramme, la droite des milieux, Thalès). Il y a plusieurs pistes pour cela. La première, sans doute la plus simple au niveau du CAPES, est d'admettre les propriétés dont on a besoin. Nous allons préciser les prérequis nécessaires de ce côté là. La seconde piste est de faire comme Euclide, ou Hilbert, ou [Perrin2050], en utilisant les cas d'isométrie. Il est clair que c'est un peu désagréable car la question est affine et pas métrique. C'est cependant ce que je vais rappeler brièvement ici.

3.1 Euclide à la rescousse

Avec les propriétés du plan euclidien rappelées ci-dessus, on obtient les propriétés fondamentales du parallélogramme, résumées dans la proposition suivante, que je propose de prendre comme **pré-requis** dans cette leçon.

3.1 Proposition. *Soit abcd un parallélogramme.*

1) Les côtés opposés sont égaux.

2) Les diagonales $[ac]$ *et* $[bd]$ *se coupent en leur milieu.*

3) Réciproquement, si les diagonales $[ac]$ *et* $[bd]$ *se coupent en leur milieu, abcd est un parallélogramme.*

Démonstration. 1) On considère les triangles abc et cda. Ils ont en commun le côté $[ac]$ et on a les égalités d'angles alternes-internes $\widehat{cab} = \widehat{acd}$ et $\widehat{acb} = \widehat{cad}$. Par le deuxième cas d'égalité, ils sont isométriques, donc on a $ab = cd$. Le raisonnement est identique de l'autre côté.

2) Soit o le point d'intersection des diagonales $[ac]$ et $[bd]$ (qu'il existe est affaire de convexité, voir cours de M1, 3.20). Les triangles oab et ocd sont égaux par le deuxième cas et on en déduit $oa = oc$ et $ob = od$.

3) On considère encore les triangles oab et ocd. Cette fois ils sont isométriques par le premier cas (avec les angles opposés par le sommet en o). On en déduit l'égalité des autres angles, qui sont en position d'alternes-internes, et on conclut par la réciproque de la propriété des angles et des parallèles.

3.2 La droite des milieux

3.2 Théorème. *Soit abc un triangle, b' le milieu de $[ab]$. La parallèle à (bc) passant par b' coupe $[ac]$ en c'. Alors c' est le milieu de $[ac]$. Inversement, si b' est milieu de $[ab]$ et c' celui de $[ac]$, la droite $(b'c')$ est parallèle à (bc).*

Démonstration. Soit d le symétrique de c' par rapport à b'. Le quadrilatère $bc'ad$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. Il en résulte que (bd) est parallèle à (ac'), donc à (cc'), et $bcc'd$ est donc aussi un parallélogramme. Avec le résultat sur les côtés opposés on obtient $ac' = db = c'c$.

La réciproque se déduit du sens direct et du postulat d'Euclide.

3.3 Le théorème de Thalès

Pour énoncer le théorème de Thalès et **surtout sa réciproque**, *il est commode de parler de mesure algébriques sur une droite, même si cette notion n'est plus au programme de l'enseignement secondaire. Par ailleurs, cette notion intervient aussi pour définir les coordonnées des points.*

3.3 Définition. *Soit D une droite dont on choisit deux points distincts o et u comme repère (par exemple de distance 1, mais ce n'est pas essentiel) et qu'on ordonne en supposant $o < u$ (on dit qu'on* **oriente** *D ou qu'on en fait un* **axe***). Soient $a, b \in D$ et soit $\lambda = ab/ou$. On appelle* **mesure algébrique** *de a, b (dans cet ordre et relativement au repère donné) et on note $\overline{ab}$ le nombre réel égal à λ si $a \leq b$ et à $-\lambda$ si $a > b$. Pour un point m de D, on appelle* **abscisse** *de m la mesure algébrique $\overline{om}$.*

3.4 *Remarque.* Trois propriétés sont essentielles, s'agissant de mesures algébriques :

1) La relation de Chasles : si a, b, c sont alignés on a $\overline{ac} = \overline{ab} + \overline{bc}$.

2) Si a, b, c, d sont alignés sur D, avec $c \neq d$, le rapport $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$ est indépendant du choix du repère de D.

3) L'application qui à m associe son abscisse $\overline{om}$ définit une bijection de D sur $\mathbf{R}$.

On obtient alors :

3.5 Théorème. (Théorème de Thalès) *Soient abc un triangle et des points $b' \in (ab)$, $c' \in (ac)$. On suppose que les droites (bc) et $(b'c')$ sont parallèles. Alors on a $\dfrac{\overline{ab'}}{\overline{ab}} = \dfrac{\overline{ac'}}{\overline{ac}} = \dfrac{\overline{b'c'}}{\overline{bc}}\cdot$ Inversement, si on a l'une de ces égalités, les droites (bc) et $(b'c')$ sont parallèles.*

Démonstration. Le théorème de la droite des milieux donne le cas où le rapport vaut $1/2$. On en déduit facilement le cas où il est égal à $p/2^n$. Pour le cas général, on procède par encadrement et passage à la limite.

3.6 *Remarque.* Pour faire la leçon sur les droites, on a deux choix. Soit on admet Thalès, soit seulement 3.1, en affirmant que Thalès en est conséquence (et en sachant le prouver). Ensuite, les deux objectifs sont les définitions vectorielles et analytiques, que l'on peut mener assez indépendamment. Je commence par le côté analytique qui apparaît en quatrième et surtout en troisième.

4 Définition analytique des droites

4.1 Repères et coordonnées

On considère un repère du plan, c'est-à-dire trois points, une origine o et deux points u et v non alignés avec o. On peut bien entendu supposer que ce repère est orthonormé : (ou) et (ov) perpendiculaires et $ou = ov = 1$, mais ce n'est pas obligatoire et cela peut être maladroit. Les droites (ou) et (ov) sont orientées par la donnée de o, u et o, v. On les appelle axe des x et des y et, si m est sur (ou) (resp. (ov)), l'abscisse de m sur le repère o, u (resp. o, v) est notée x (resp. y). Pour un point m quelconque du plan, on considère ses projetés p et q sur (ou) et (ov) parallèlement à (ov) et (ou) respectivement.

4.1 Proposition-Définition. *Avec les notations précédentes, les abscisses (x, y) des points p, q sur les axes sont appelées respectivement* **l'abscisse et l'ordonnée** *(ou les coordonnées) de m dans le repère o, u, v.*

L'application Φ de P dans $\mathbf{R}^2$ qui à un point m associe ses coordonnées est une bijection.

Démonstration. Il est clair que x, y déterminent de manière unique les points p et q donc aussi m en traçant les parallèles aux axes passant par p, q. Cela montre que Φ est bijective.

4.2 Équations des droites

On a le théorème suivant :

4.2 Théorème. *Soit D une droite du plan.*

1) Si D est parallèle à (ov) et si elle coupe l'axe (ou) en un point d'abscisse α, D est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant $x = \alpha$.

2) Si D n'est pas parallèle à (ov), il existe deux réels α, β tels que D est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant $y = \alpha x + \beta$.

Démonstration.

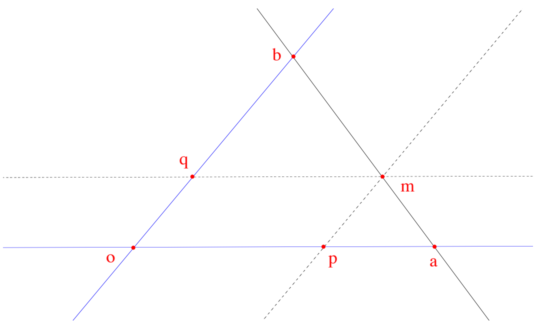


FIGURE 1 – Équation d'une droite

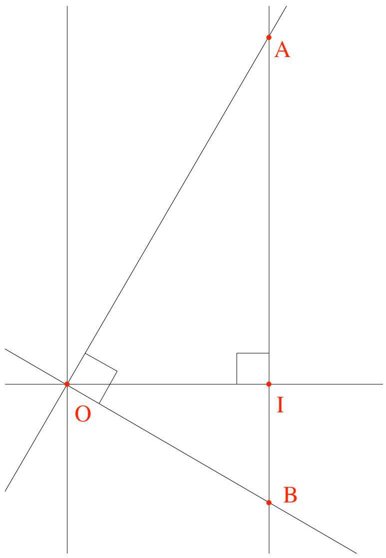


FIGURE 2 – Coefficients directeurs

Le point 1) est clair. Pour 2), on élimine d'abord le cas où D est parallèle à (ou) qui donne l'équation $y = \beta$. On considère ensuite le point d'intersection b de D avec (ov) qui a pour ordonnée β et le point d'intersection a de D et (ou) qui a pour abscisse γ. Soit m un point de D et soient p, q ses projetés sur les axes. On a donc $\overline{op} = x$ et $\overline{oq} = y$. Le théorème de Thalès dans aob donne la relation : $\dfrac{\overline{ap}}{\overline{ao}} = \dfrac{\overline{pm}}{\overline{ob}}$ et, comme on a $\overline{pm} = \overline{oq}$ et $\overline{ap} = \overline{ao} + \overline{op}$, on obtient $\dfrac{x - \gamma}{-\gamma} = \dfrac{y}{\beta}$, soit $y = -\frac{\beta}{\gamma}x + \beta$ qui est bien de la forme annoncée.

La réciproque vient de la réciproque de Thalès.

4.3 Proposition. *Les droites d'équations $y = \alpha x + \beta$ et $y = \alpha' x + \beta'$ sont parallèles si et seulement si on a $\alpha = \alpha'$. Si le repère est orthonormé, elles sont perpendiculaires si et seulement si on a $\alpha\alpha' = -1$.*

Démonstration. Pour le parallélisme, c'est Thalès. Pour l'orthogonalité on se ramène au cas des droites passant par l'origine. On considère alors le triangle rectangle AOB bâti sur les deux droites et dont l'hypoténuse est la droite $x = 1$, voir fig. 2. On a $\overline{IA} = \alpha$ et $\overline{IB} = \alpha'$. Par Pythagore on en déduit $OA^2 = \alpha^2 + 1$ et $OB^2 = \alpha'^2 + 1$. Par ailleurs on a $\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB} = \alpha' - \alpha$. Comme AOB est rectangle on a donc $AB^2 = (\alpha' - \alpha)^2 = OA^2 + OB^2 = \alpha^2 + 1 + \alpha'^2 + 1$ d'où le résultat. La réciproque utilise la réciproque de Pythagore.

4.4 Corollaire. *Les droites du plan sont définies par les équations $ux + vy + w = 0$ avec u, v non tous deux nuls. Les droites d'équations $ux + vy + w = 0$ et $u'x + v'y + w' = 0$ sont parallèles (resp. perpendiculaires) si et seulement si l'on a $uv' - u'v = 0$ (resp. $uu' + vv' = 0$).*

4.3 Propriétés d'incidence

Le corollaire précédent permet une pratique alternative de la géométrie : dans cette optique, le plan n'est autre que l'ensemble $\mathbf{R}^2$ et les droites sont définies par les équations $ux + vy + w = 0$. Je montre d'abord dans ce paragraphe comment on peut, avec cette entrée, retrouver les axiomes et les résultats d'Euclide, puis je donne quelques compléments sur des conditions de concours. Je me contente ici de donner les énoncés et des indications de preuve succinctes. Les preuves reposent essentiellement sur la résolution de systèmes linéaires. Il est fait allusion à cette situation dans le programme de seconde. Pour le CAPES, on peut se contenter de donner le résultat 4.7 et une application.

4.5 Proposition. *Soient D, D' deux droites du plan, d'équations $ux + vy + w = 0$ et $u'x + v'y + w' = 0$ avec (u, v) et (u', v') différents de $(0, 0)$.*

1) L'intersection $D \cap D'$ est réduite à un point si et seulement si on a $uv' - u'v \neq 0$.

2) Si $uv' - u'v$ est nul il y a deux cas :

a) Si $uw' - u'w$ et $vw' - v'w$ sont nuls, on a $D = D'$. C'est le cas où les deux équations sont proportionnelles.

b) Si $uw' - u'w$ ou $vw' - v'w$ est non nul les droites sont parallèles (i.e. $D \cap D' = \emptyset$.

Démonstration. C'est la résolution du système :

$$\begin{cases} ux + vy + w = 0 \\ u'x + v'y + w' = 0. \end{cases}$$

(On peut par exemple supposer $u \neq 0$.)

On retrouve comme corollaire de cette proposition plusieurs résultats qui sont des axiomes ou des résultats d'Euclide :

4.6 Corollaire. *1) Par deux points passe une droite et une seule.*

2) Le parallélisme est une relation d'équivalence.

3) On a le postulat d'Euclide.

Démonstration. Pour le premier point on résout en u, v, w le système :

$$\begin{cases} ux_1 + vy_1 + w = 0 \\ ux_2 + vy_2 + w = 0. \end{cases}$$

Le second point se voit sur la condition : équations proportionnelles. Enfin, pour le troisième, on normalise l'équation de la droite en imposant $u = 1$ (ou $u = 0$, $v = 1$) et le w est alors déterminé.

On a ensuite un résultat de concours essentiel :

4.7 Théorème. *Soient D, D', D'' trois droites d'équations $\delta, \delta', \delta''$. Alors D, D', D'' sont concourantes ou parallèles si et seulement si il existe des réels $\lambda, \lambda', \lambda''$ non tous nuls tels que $\lambda\delta + \lambda'\delta' + \lambda''\delta'' = 0$.*

Démonstration. Voir en annexe.

4.4 Une application : le théorème à quatre droites

L'application suivante est très jolie, mais pas si facile :

4.8 Théorème. *Soient A, B, C, D quatre droites en position générale (c'est-à-dire sans relation de parallélisme ni de concours). On considère les droites A', B', C' joignant respectivement les points d'intersection de B, C et A, D (resp. C, A et B, D, resp. A, B et C, D), puis les droites A'', B'', C'' joignant respectivement les points d'intersection de B, C et B', C' (resp. C, A et C', A', resp. A, B et A', B'). Alors, A'', B'', C'' sont concourantes ou parallèles.*

Démonstration. On confond ici droites et équations[3]. Comme les équations des droites dépendent de trois paramètres et que A, B, C sont en position générale, on peut écrire l'équation de D comme combinaison linéaire de celles de A, B, C : $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$ (c'est encore une question de systèmes d'équations linéaires). On a donc $\beta B + \gamma C = D - \alpha A$ et la droite qui admet

3. Précisément, formes affines définissant ces équations.

cette équation concourt à la fois avec B, C et avec A, D. C'est donc A'. De même, on a $B' = \gamma C + \alpha A = D - \beta B$ et $C' = \alpha A + \beta B = D - \gamma C$.

On considère ensuite l'équation $B' - C' = \gamma C - \beta B$. C'est l'équation d'une droite qui concourt avec B', C' mais aussi avec B, C : c'est A''. De même, on a $B'' = C' - A'$ et $C'' = A' - B'$. Mais alors, on a $A'' + B'' + C'' = 0$ et ces droites sont concourantes ou parallèles ! !

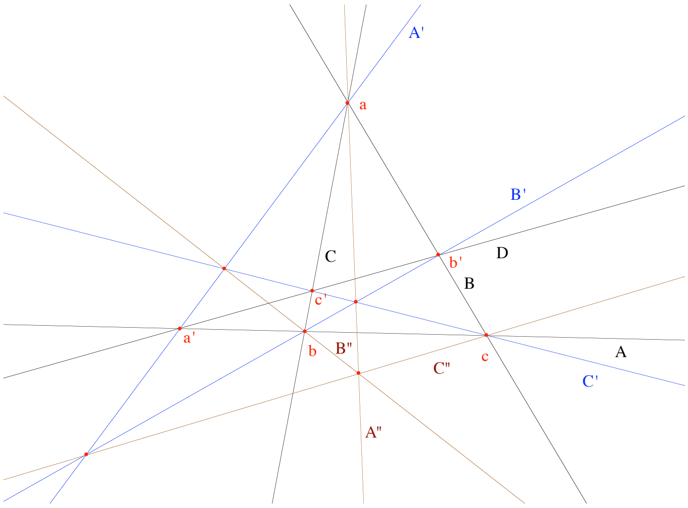


FIGURE 3 – Le théorème à quatre droites

4.5 Une autre application : le concours des médianes

Ici, le mieux est d'utiliser un repère non orthogonal. On a un triangle ABC et on prend comme origine B et comme axes (BC) et (BA), de telle sorte que les coordonnées des points sont $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $A = (0, 1)$. Les milieux des côtés sont alors les points $A' = (1/2, 0)$, $B' = (1/2, 1/2)$ et $C' = (0, 1/2)$. Les équations des médianes (AA'), (BB') et (CC') sont respectivement $y = -2x + 1$, $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot$ On vérifie que le point $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est sur les trois médianes.

4.6 Encore une application : le concours des hauteurs

Il n'est guère envisageable de traiter l'application suivante au lycée :

4.9 Théorème. *Soit abc un triangle, $A = (bc)$, $B = (ca)$ et $C = (ab)$ ses côtés et A', B', C' ses hauteurs. Alors A', B', C' sont concourantes.*

Démonstration. On confond encore droites et équations. La remarque principale est que la condition d'orthogonalité de deux droites $D = ux + vy + w$ et $D' = u'x + v'y + w'$ s'écrit $\varphi(D, D') := uu' + vv' = 0$ (produit scalaire des vecteurs normaux). On note que φ est bilinéaire. On a alors $A' = \varphi(A, B)C - \varphi(A, C)B$. En effet, cette droite concourt avec B, C, donc passe par a et on a $\varphi(A', A) = 0$, donc c'est bien la hauteur. On a de même les équations de B', C' et on constate qu'on a $A' + B' + C' = 0$ ce qui prouve leur concours.

4.7 Pour apprendre à calculer avec des paramètres

L'intérêt [4] de l'exercice suivant est d'apprendre aux élèves à calculer avec plusieurs paramètres, chose que l'on fait insuffisamment à l'heure actuelle et qui est très utile dans les applications, notamment en physique.

On considère un rectangle $ABCD$ et un point P intérieur au rectangle. La parallèle à (AB) passant par P coupe (AD) en J et (BC) en L. La parallèle à (BC) passant par P coupe (AB) en I et (CD) en K.

1) Pour quelles positions de P les deux droites (IL) et (JK) sont-elles parallèles ? Interpréter géométriquement la condition obtenue. Préciser la direction de ces droites.

2) On suppose les droites (IL) et (JK) sécantes en M. Montrer que M est sur (AC).

Pour traiter l'exercice, on choisit A comme origine, on suppose que les coordonnées sont $(b, 0)$, celles de D, $(0, d)$ et celles de P, (p, q). On calcule les coordonnées des points I, J, K, L, puis les équations des droites (IL) et (JK). On peut compléter l'exercice en demandant des preuves géométriques, ou en discutant la nature du quadrilatère $IJKL$, etc.

5 Les vecteurs

On passe maintenant à l'approche vectorielle des droites. Comme ci-dessus, je commence par un paragraphe de rappels, ici sur les vecteurs. Au CAPES, ces rappels doivent être mis en pré-requis, mais comme je ne suis pas sûr que tout le monde soit au clair là-dessus ...

4. En fait, cet exercice est une variante du théorème de Brianchon, dual de Pappus.

5.1 La relation d'équipollence

5.1 Définition. *Soient (a, b) et (c, d) deux couples de points (on parlait autrefois de bipoints). On dit qu'ils sont* **équipollents** *si $abdc$ est un parallélogramme ou si l'on a, à la fois, $a = b$ et $c = d$.*

5.2 Théorème. *La relation d'équipollence est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Réflexivité et symétrie sont évidentes. La transitivité est le théorème du prisme, voir mon papier sur Thalès. C'est là qu'on utilise le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu et la droite des milieux.

5.3 Définition. *On note $\overrightarrow{ab}$ la classe d'équivalence de (a, b) et on l'appelle* **vecteur** *a, b. L'ensemble des vecteurs de P est noté $\vec{P}$. Le vecteur correspondant à tous les couples (a, a) est le vecteur nul $\vec{0}$.*

5.4 Proposition. *Soit $\vec{v}$ un vecteur et o un point. Il existe un unique point $m \in P$ tel que $\overrightarrow{om} = \vec{v}$.*

Démonstration. Si $\vec{v} = \vec{0}$ on prend $m = o$. Sinon, on choisit un représentant (a, b) de $\vec{v}$ et on mène par o la parallèle à (ab) et par b la parallèle à (ao). Elles se coupent en m (on utilise la transitivité du parallélisme[5]), qui convient.

5.2 Somme vectorielle et relation de Chasles

5.5 Proposition-Définition. *Soient $\vec{v}, \vec{w}$ deux vecteurs non nuls et o un point. Soient $a, b \in P$ tels que $\vec{v} = \overrightarrow{oa}$, $\vec{w} = \overrightarrow{ob}$ (voir 5.4). Soit c le point d'intersection de la parallèle à (ob) passant par a et de la parallèle à (oa) passant par b (de sorte que $oacb$ est un parallélogramme). Alors on a $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ob} = \vec{w}$ et le vecteur $\overrightarrow{oc}$ est indépendant du choix du point o. On définit la somme vectorielle en posant $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{oc}$. Si l'un des vecteurs est nul, on définit la somme comme égale à l'autre. On a la relation (dite de Chasles) $\overrightarrow{oc} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ac}$.*

Démonstration. L'indépendance de o est une variante du théorème du prisme.

5.3 Multiplication par un scalaire

5.6 Définition. *Soit $\vec{v}$ un vecteur et λ un nombre réel. On choisit un représentant $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$. Soit m le point de (ab) défini par $\overline{am} = \lambda \overline{ab}$. Le vecteur $\overrightarrow{am}$ est indépendant du choix de a et on le note $\lambda \vec{v}$. Deux vecteurs $\vec{v}$*

5. Donc le postulat d'Euclide : il n'y a pas de vecteurs dignes de ce nom en géométrie non euclidienne.

et $\vec{w}$ sont dits colinéaires s'il existe un scalaire λ tel que l'on ait $\vec{v} = \vec{\lambda}\vec{w}$ ou l'inverse. Il revient au même d'imposer l'existence de scalaires λ, μ non tous deux nuls vérifiant $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \vec{0}$

5.7 Proposition. *Propriétés des espaces vectoriels (associativité, distributivité, etc.)*

5.4 La dimension 2

5.8 Théorème. *Soient $\vec{v}$, $\vec{w}$ deux vecteurs de $\vec{P}$, non colinéaires. Alors, tout vecteur $\vec{u} \in \vec{P}$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Les plans $\vec{P}$ et P sont en bijection avec $\mathbf{R}^2$*

Démonstration. On choisit une origine o et on écrit $\vec{v} = \overrightarrow{oa}$, $\vec{w} = \overrightarrow{ob}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{oc}$. On trace les parallèles à (oa) et (ob) passant par c qui coupent respectivement (ob) et (oa) en b', a'. On a alors $\vec{u} = \overrightarrow{oa'} + \overrightarrow{ob'}$ et la conclusion.

On peut alors mettre en évidence les notions de base (du plan vectoriel $\vec{P}$) et de repère (du plan affine P).

5.5 Caractérisation vectorielle des droites

Nous y sommes ! On peut enfin donner la caractérisation vectorielle d'une droite du plan affine P :

5.9 Proposition. *Soient o un point de P et $\vec{v}$ un vecteur non nul, de représentant $\overrightarrow{ab}$. On pose $D(o, \vec{v}) = \{m \in P \mid \exists\lambda \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{om} = \lambda\vec{v}\}$. Alors, $D(o, \vec{v})$ est la droite D passant par o et parallèle à (ab). Le vecteur $\vec{v}$ est un* **vecteur directeur** *de D*

La proposition suivante résume les principales propriétés de l'écriture précédente :

5.10 Proposition. *1) Deux droites $D(a, \vec{v})$ et $D(b, \vec{w})$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs sont colinéaires. Elles sont égales si l'on a, de plus, $a \in D(b, \vec{w})$ ou $b \in D(a, \vec{v})$.*

2) Si D est une droite et si a, b sont des points distincts de D, la demi-droite $[ab)$ (resp. le segment $[ab]$) est l'ensemble $\{m \in D \mid \overrightarrow{am} = \lambda\overrightarrow{ab}\}$ avec $\lambda \geq 0$ (resp. $\lambda \in [0, 1]$).

Comme dans le cas analytique, cette caractérisation peut être la source d'une définition des droites lorsque l'on part des notions d'espace vectoriel et espace affine.

5.6 Une jolie application des vecteurs : la variante affine de Pappus

5.11 Théorème. *Soient D, D' deux droites sécantes en o et soient $a, b, c \in D$ et $a', b', c' \in D'$ des points distincts et distincts de o. On suppose que les droites (ab') et $(a'b)$ (resp. (ac') et $(a'c)$ sont parallèles. Alors les droites (bc') et $(b'c)$ le sont aussi.*

Démonstration. On choisit un repère d'origine o avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs directeurs de D et D'. On appelle encore $a, b, c; a', b', c'$ les abscisses ou les ordonnées des points correspondants. Le vecteur $\overrightarrow{ab'}$ a pour coordonnées $(-a, b')$ et on a, de même, $\overrightarrow{ba'} = (-b, a')$. Dire que les droites (ab') et $(a'b)$ sont parallèles c'est dire que ces vecteurs sont colinéaires et c'est donc $aa' = bb'$. De même, dire que (ac') et $(a'c)$ sont parallèles c'est $aa' = cc'$, et pour (bc') et $(b'c)$ c'est $bb' = cc'$. La conclusion est alors évidente.

5.12 *Remarque.* On peut aussi traiter l'exercice avec les mesures algébriques, mais elles ne sont plus au programme. Une autre solution est d'imposer la figure et de se contenter des variantes de Thalès avec les longueurs.

6 Encore un joli résultat : le théorème de Newton

6.1 Théorème. *Soient D, D' deux droites parallèles et o un point non situé sur D, D'. Trois droites issues de o coupent respectivement D, D' en $a, a',$; b, b' ; c, c'. On appelle p (resp. q) les points d'intersection de $(a'b)$ et (ab') (resp. (bc') et $(b'c)$). Alors, la droite (pq) est parallèle à D et D'.*

Démonstration.

Par le sens direct de Thalès, on a $r := \frac{\overline{pb'}}{\overline{pa}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{ba}} = -\frac{\overline{ob'}}{\overline{ob}} = \frac{\overline{b'c'}}{\overline{cb}} = \frac{\overline{qb'}}{\overline{qc}}$ et le résultat s'ensuit par la réciproque de Thalès.

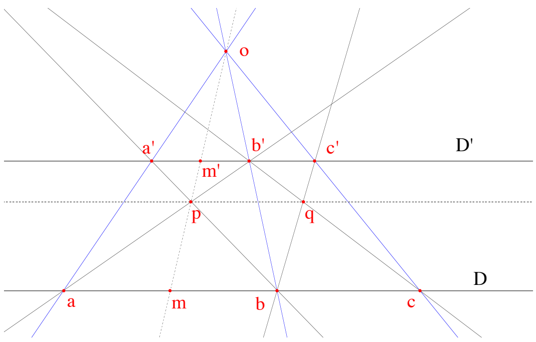


FIGURE 4 – Le théorème de Newton

Attention, si l'on n'a pas utilisé les mesures algébriques, il faut préciser que les points p, q sont entre les parallèles pour être sûr d'être dans la position "triangle" de Thalès.

Un autre résultat c'est que les points m et m' de la figure sont les milieux de a, b et a', b'. Il sufit pour cela de noter que le rapport r ci-dessus est aussi égal à $\dfrac{\overline{m'b'}}{\overline{ma}}$ et à $-\dfrac{\overline{m'b'}}{\overline{mb}}\cdot$

Une jolie application consiste à construire **à la règle seule** *une parallèle à une droite donnée D lorsqu'on dispose déjà d'une parallèle à D.*

7 Annexe : droites concourantes

On considère trois droites D, D', D'' du plan d'équations $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$ avec $\delta(x, y) = ax + by + c$, $\delta'(x, y) = a'x + b'y + c'$ et $\delta''(x, y) = a''x + b''y + c''$. Cela suppose que les nombres a et b (resp. a' et b', resp. a'' et b'') ne sont pas tous deux nuls. Rappelons que δ et δ' définissent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles : $\delta = k\delta'$ avec $k \in \mathbf{R}^*$.

Le théorème est le suivant :

7.1 Théorème. *On reprend les notations ci-dessus et on suppose les droites D et D' distinctes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) les droites D, D', D'' sont concourantes ou parallèles,
2) il existe des scalaires λ et λ' (non tous deux nuls) tels que $\delta'' = \lambda\delta + \lambda'\delta'$.

Démonstration.

2) $\Longrightarrow$ 1) Supposons d'abord qu'on a $\delta'' = \lambda\delta + \lambda'\delta'$. Si D et D' ne sont pas parallèles, elles se coupent en $m = (x, y)$ et on a donc $\delta(m) = \delta'(m) = 0$. Mais alors on a aussi $\delta''(m) = \lambda\delta(m) + \lambda'\delta'(m) = 0$ de sorte que m est sur D''.

Si D et D' sont parallèles, montrons que D'' leur est parallèle. Si $D'' = D'$ c'est évident. Supposons donc $D'' \neq D'$, ce qui implique $\lambda \neq 0$. On a donc $\delta = \dfrac{\delta''}{\lambda} - \dfrac{\lambda'}{\lambda}\delta'$. Si D'' n'était pas parallèle à D' elle couperait D' en $m = (x, y)$. On aurait donc $\delta''(m) = \delta'(m) = 0$, d'où $\delta(m) = 0$ avec la relation précédente. Mais cela contredit le parallélisme de D et D'.

1) $\Longrightarrow$ 2) Supposons maintenant que les trois droites sont parallèles ou concourantes. Soit p un point de D' non situé sur D (ça existe car ces droites sont distinctes). Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\delta''(p) - \lambda\delta(p) = 0$ (il suffit de prendre $\lambda = \dfrac{\delta''(p)}{\delta(p)}$ puisque $\delta(p)$ est non nul). La droite Δ d'équation [6] $\delta'' - \lambda\delta = 0$

6. Si on a $\delta'' = \lambda\delta$, on a déjà fini.

passe donc par p.

On distingue alors deux cas.

1) Si les droites sont concourantes en m (nécessairement différent de p), la droite Δ passe aussi par m. Comme elle passe par m et p c'est donc D' et son équation est proportionnelle à δ' : $\delta'' - \lambda\delta = \lambda'\delta'$.

2) Si les droites sont parallèles, la droite Δ est aussi parallèle à D (c'est le sens direct) et elle passe par p. Le postulat d'Euclide montre que c'est D' et on conclut comme dans le premier cas.

8 Et pour le CAPES ?

8.1 Le plan

Une piste possible est de suivre les programmes. On commence par le programme de sixième, avec les parallèles et les perpendiculaires. On explique qu'à ce niveau les résultats sont admis, mais on a une petite idée de démonstrations possibles, soit à la Euclide (voir le début de ce texte), soit avec l'approche analytique ou vectorielle.

Ensuite, on passe en fin de collège avec les équations de droites. Je pense qu'il est intéressant de justifier, avec Thalès, qu'une droite a une équation $y = ax + b$, voire $ux + vy + w = 0$. On essaie de donner une application, les quatre droites si l'on a les reins solides.

Enfin, on passe en seconde, avec les vecteurs, et on donne la caractérisation vectorielle des droites et une application, par exemple Pappus.

8.2 Les développements possibles

C'est un bon principe de bâtir le plan autour de développements possibles. Ici il y a notamment les théorèmes 4.2 (les équations), 4.7 (le théorème de concours), 4.8 (le théorème à 4 droites), les médianes, 5.11 (Pappus) et 6.1 (Newton). Attention, il faut avoir préparé ces développements pour être capable de les faire le jour J.

8.3 Alternative

On peut aussi se limiter à l'approche analytique et vectorielle, avec deux conditions :

1) être bien au clair sur les histoires de vecteurs,

2) proposer des applications consistantes (par exemple la condition de concours de trois droites, Pappus, etc.)

9 Références

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[ME] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'École*, Cassini (2005).