Droites concourantes

1. Notations et énoncé.

On considère trois droites D, D', D'' du plan affine (réel, mais tout cela vaut sur un corps quelconque) d'équations $\delta = 0, \delta' = 0$, $\delta'' = 0$ avec $\delta(x,y) = ax + by + c$, $\delta'(x,y) = a'x + b'y + c'$ et $\delta''(x,y) = a''x + b''y + c''$. Cela suppose que les nombres a et b (resp. a' et b', resp. a'' et b'') ne sont pas tous deux nuls. Rappelons que δ et δ' définissent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles : $\delta = k\delta'$ avec $k \in \mathbf{R}^*$.

Le théorème est le suivant :

Théorème 1. *On reprend les notations ci-dessus et on suppose les droites D et D' distinctes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) les droites D, D', D'' sont concourantes ou parallèles,
2) il existe des scalaires λ et λ' (non tous deux nuls) tels que $\delta'' = \lambda\delta + \lambda'\delta'$.

2. Preuve.

2) $\Rightarrow$ 1) Supposons d'abord qu'on a $\delta'' = \lambda\delta + \lambda'\delta'$. Si D et D' ne sont pas parallèles, elles se coupent en $m = (x,y)$ et on a donc $\delta(m) = \delta'(m) = 0$. Mais alors on a aussi $\delta''(m) = \lambda\delta(m) + \lambda'\delta'(m) = 0$ de sorte que m est sur D''.

Si D et D' sont parallèles, montrons que D'' leur est parallèle. Si $D'' = D'$ c'est évident. Supposons donc $D'' \neq D'$, ce qui implique $\lambda \neq 0$. On a donc $\delta = \dfrac{\delta''}{\lambda} - \dfrac{\lambda'}{\lambda}\delta'$. Si D'' n'était pas parallèle à D' elle couperait D' en $m = (x,y)$. On aurait donc $\delta''(m) = \delta'(m) = 0$, d'où $\delta(m) = 0$ avec la relation précédente. Mais cela contredit le parallélisme de D et D'.

1) $\Rightarrow$ 2) Supposons maintenant que les trois droites sont parallèles ou concourantes. Soit p un point de D' non situé sur D (ça existe car ces droites sont distinctes). Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\delta''(p) - \lambda\delta(p) = 0$ (il suffit de prendre $\lambda = \dfrac{\delta''(p)}{\delta(p)}$ puisque $\delta(p)$ est non nul). La droite Δ d'équation[1] $\delta'' - \lambda\delta = 0$ passe donc par p.

On distingue alors deux cas.

1) Si les droites sont concourantes en m (nécessairement différent de p), la droite Δ passe aussi par m. Comme elle passe par m et p c'est donc D' et son équation est proportionnelle à δ' : $\delta'' - \lambda\delta = \lambda'\delta'$.

2) Si les droites sont parallèles, la droite Δ est aussi parallèle à D (c'est le sens direct) et elle passe par p. Le postulat d'Euclide montre que c'est D' et on conclut comme dans le premier cas.

[1] Si on a $\delta'' = \lambda\delta$, on a déjà fini.