

Les courbes paramétrées

On travaille dans le plan $E = \mathbf{R}^2$, que l'on voit à la fois comme un plan affine ou vectoriel selon les besoins du moment. Le plan est muni de sa forme euclidienne canonique $x^2 + y^2$.

1 Définitions

1.1 Qu'est-ce qu'une courbe ?

Ça commence mal ! Je ne sais pas vraiment répondre à cette question. Il y a plusieurs aspects possibles, on peut voir une courbe comme l'ensemble $V(F)$ des points (x, y) qui vérifient une équation implicite $F(x, y) = 0$, comme l'image d'un paramétrage $t \mapsto (x(t), y(t))$ ou comme le graphe d'une fonction $y = f(x)$. Les deux premières versions sont évidemment plus générales que la troisième (prendre $F(x, y) = y - f(x)$ ou $x(t) = t, y(t) = f(t)$), mais seule la version graphe offre la garantie que le résultat ressemble à une courbe. En effet, même en supposant F continue et non constante, $V(F)$ peut être assez bizarre (pour une courbe), par exemple n'importe quel fermé de \mathbf{R}^2 , un disque, un carré, etc. (Si C est un fermé de \mathbf{R}^2 , regarder $F(x, y) = d((x, y), C)$.) On verra que c'est aussi le cas pour les courbes paramétrées. En faisant des hypothèses convenables on a toutefois l'équivalence des trois notions :

1.1 Théorème. *Soit C une partie de \mathbf{R}^2 . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1) *Pour chaque point $m_0 = (x_0, y_0)$ de C il existe un voisinage V de m_0 et une fonction $F : V \rightarrow \mathbf{R}$, de classe C^1 , dont la différentielle est partout non nulle, telle que l'on ait $C \cap V = V(F)$.*

2) *Pour chaque point $m_0 = (x_0, y_0)$ de C il existe un voisinage V de m_0 , un intervalle ouvert I de \mathbf{R} et une application de classe C^1 , $f = (x, y) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, dont la dérivée ne s'annule pas sur I , tels que $C \cap V = \text{Im } f$.*

3) *Pour chaque point $m_0 = (x_0, y_0)$ de C il existe un voisinage V de m_0 , un intervalle ouvert I de \mathbf{R} et une application de classe C^1 , $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ tels que $C \cap V$ soit égal au graphe de $y = f(x)$ ou de $x = f(y)$.*

Démonstration. L'implication 1) \implies 3) vient essentiellement du théorème des fonctions implicites, 3) \implies 2) est évident et pour 2) \implies 1), si par exemple $x'(t_0)$ est non nulle, x est bijective au voisinage de t_0 , on peut donc tirer t en fonction de x et il n'y a plus qu'à reporter dans y .

1.2 Paramétrages et courbes paramétrées

1.2.1 Définition

1.2 Définition. On appelle **paramétrage** une application $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, où I désigne un intervalle (voire une réunion d'intervalles) de \mathbf{R} et où f est continue. La **courbe (paramétrée)** associée à f est son image $C = f(I)$.

1.3 Remarques.

1) Il faut dire tout de suite que cette définition n'est pas raisonnable. En effet, il existe par exemple un paramétrage f défini sur $[0, 1]$ et dont l'image est le carré $[0, 1]^2$ (courbe de Peano ou de Hilbert). Plus généralement, on peut montrer que si X est un espace métrique compact, connexe et localement connexe par arcs, il existe $f : [0, 1] \rightarrow X$ continue surjective.

Pour éviter ce canular, **on supposera, dans tout ce qui suit**, que f est de classe C^1 par morceaux. Cela signifie que $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^1 par morceaux.

2) Les appellations ne sont pas contrôlées. D'autres parleront de courbe paramétrée au lieu de paramétrage et de support au lieu de courbe. Le tout est de dire quelque chose de précis.

1.2.2 Branches

Il s'agit de comprendre qu'une courbe paramétrée peut avoir plusieurs branches en un point (voir ci-dessous la cubique nodale).

1.4 Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ un paramétrage, $C = f(I)$ et soit J un intervalle ouvert non vide contenu dans I . Si la restriction $f|_J : J \rightarrow \mathbf{R}^2$ est injective, son image est appelée une **branche** de C .

1.5 Remarque. Une courbe paramétrée, même de classe C^1 , peut ne pas avoir de branche (injective) au voisinage d'un point, témoin l'exemple de $x(t) = y(t) = t^3 \sin \frac{1}{t}$.

1.2.3 Interprétation cinématique

1.6 Définition. Avec les notations de 1.2, on interprète la variable t comme le **temps**. On parle alors de f comme un **mouvement** (ou la loi horaire d'un mouvement), on note souvent $f(t) = M(t)$ et on en parle comme d'un **point mobile** et la courbe C est sa **trajectoire**. Le vecteur **vitesse**

moyenne entre les temps t_1 et t_2 (distincts) est le vecteur $\frac{\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)}}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$, le **vecteur vitesse instantanée** en t_0 est la limite (si elle existe) de $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ quand t tend vers t_0 . Il est égal à $f'(t_0)$. Si f est deux fois dérivable en t_0 , le **vecteur accélération** en ce point est $f''(t_0)$.

1.3 Discussion sur les paramétrages : existence ? unicité ?

1.3.1 Trouver un paramétrage

La question de trouver un paramétrage a été abordée au théorème 1.1. Il y a néanmoins beaucoup de questions difficiles autour de cette question, notamment celle de l'existence de paramétrage rationnel pour les courbes algébriques (les courbes de la forme $V(F)$ où F est un polynôme). On peut donner deux exemples.

1.7 Exemple. Si on a une conique dont on connaît un point, on obtient un paramétrage rationnel en la coupant par une droite variable passant par le point. Par exemple, si C a pour équation $x^2 + 2y^2 - 3x + 4y = 0$, elle passe par l'origine et on coupe C par la droite $y = tx$. On trouve l'équation en x : $x^2 + 2t^2x^2 - 3x + 4tx = 0$ qui donne la solution évidente $x = 0$, mais aussi un autre point $x = \frac{3 - 4t}{1 + 2t^2}$, $y = \frac{3t - 4t^2}{1 + 2t^2}$.

1.8 Exercice. Paramétriser rationnellement la conique d'équation $3x^2 - xy + y^2 - x + 2y - 2 = 0$ en partant du point $(1, 0)$. (Résultat : $x = \frac{t^2 - 2t - 2}{t^2 - t + 3}$, $y = -\frac{t(t + 5)}{t^2 - t + 3}$.)

1.9 Exemple. La cubique $y^2 - x^3 = 0$ admet un point de rebroussement à l'origine. Si on coupe par la droite $y = tx$ on trouve la solution $x = 0$, double, mais aussi $x = t^2$ qui donne $y = t^3$ et un paramétrage.

1.10 Exercice. Paramétriser ainsi la cubique nodale $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ ou le folium de Descartes : $x^3 + y^3 - xy = 0$, voir plus bas.

1.3.2 Opération inverse

Il s'agit, à partir d'un paramétrage rationnel de trouver une équation cartésienne $F(x, y) = 0$ de la courbe.

1.11 Exemple. On considère la courbe paramétrée par $x = \frac{t}{1+t^3}$ et $y = \frac{t^2}{1+t^3}$. On a $t = \frac{y}{x}$ et, en remplaçant t dans x on obtient la relation $x^3 + y^3 - xy = 0$ (le folium).

1.12 Exercice. Trouver une équation cartésienne de la courbe définie par $x = \frac{t^2+1}{2t}$, $y = \frac{2t-1}{t^2}$. (Réponse : en exprimant t en fonction de $x-1$ et $y-1$, on trouve l'équation $4x^2y - 4xy + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$.)

1.3.3 Unicité

Il n'y a pas du tout unicité du paramétrage d'une courbe. Par exemple, l'axe des x peut être paramétré par $x = t$, $y = 0$, mais aussi par $x = t^3$, $y = 0$, voire par $x = t(t-1)(t+1)$, $y = 0$. Les deux premiers paramétrages sont bijectifs, mais pas le troisième. Dans tous les cas, la trajectoire est identique, mais pas le mouvement. Ici, le premier mouvement est uniforme (à vitesse constante), mais pas le second (la vitesse s'annule en 0), quand au troisième, le lecteur vérifiera qu'il comporte des allers et retours.

2 Étude locale des courbes paramétrées

Pour d'autres détails, voir le fichier *Tangentes*.

2.1 Tangente en un point

2.1.1 Définition

Il s'agit de donner une définition de la tangente qui vaille aussi dans le cas d'un point singulier. Il y a de nombreuses manières d'aborder le problème. On a choisi ici la voie géométrique. On note d la distance (par exemple euclidienne) dans le plan. Le principe est le suivant. On considère les droites passant par $M_0 = M(t_0)$. Parmi ces droites, ce qu'on demande à la tangente c'est d'être, au voisinage de M_0 , plus proche de la courbe¹ que les autres droites. Précisément :

¹Ou plutôt de la branche de la courbe qui correspond au paramètre t_0 .

2.1 Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ un paramétrage, C son image et soit $M_0 = M(t_0)$ un point de C . Soit D une droite passant par M_0 . On dit que D est **tangente** à la branche de C passant par M_0 (au temps t_0) si, pour toute droite Δ passant par M_0 , distincte de D , la distance $d(f(t), D)$ est négligeable devant $d(f(t), \Delta)$ quand t tend vers t_0 .

2.2 Exemple. Un exemple permet de comprendre. On considère la parabole d'équation $y = x^2$. On peut la paramétrer de la manière évidente : $x = t$, $y = t^2$. On regarde ce qui se passe au voisinage de l'origine. La distance de $M(t)$ à l'axe des x est $y = t^2$, celle à l'axe des y est $x = t$. On voit que, quand t tend vers 0, la distance à l'axe des x est beaucoup plus petite que l'autre (infinitement petite, en fait). Il n'est pas difficile de vérifier que la distance de $M(t)$ à une droite passant par O , autre que l'axe des x , est équivalente à $a|t|$ avec $a \neq 0$, donc infiniment grande par rapport à t^2 .

2.3 Remarques.

1) On montre facilement que si $d(f(t), D)$ est négligeable devant $d(f(t), \Delta_0)$ pour une droite Δ_0 distincte de D la même propriété vaut pour toutes les autres droites, de sorte que D est tangente à C en M_0 .

2) Si la courbe admet une tangente (pour une branche donnée) elle est unique. En effet, si D et D' sont deux tangentes et d et d' les distances de $f(t)$ à ces droites, on aurait à la fois $d = o(d')$ et $d' = o(d)$ ce qui est absurde.

3) Attention, il peut y avoir plusieurs branches passant par un même point (donc plusieurs tangentes) comme l'indique l'exemple suivant.

2.4 Exemple. Considérons le paramétrage $x(t) = 1 - t^2$, $y(t) = t(1 - t^2)$. La courbe C est une cubique nodale, d'équation cartésienne $x^3 + y^2 - x^2 = 0$, qui admet un point double à l'origine, atteint pour les valeurs $t = \pm 1$ du paramètre. Si l'on regarde C , elle a deux tangentes à l'origine, tangentes à chacune des "branches", lesquelles s'obtiennent en restreignant le domaine de définition (par exemple à \mathbf{R}^+ et \mathbf{R}^-). Ces droites sont les bissectrices des axes $y = \pm x$.

2.1.2 Propriété caractéristique

Le théorème suivant fait le lien entre tangente et sécantes :

2.5 Théorème. Avec les notations précédentes, C admet une tangente si et seulement si la pente de la sécante : $p(t) = \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$, ou son inverse

$\frac{x(t) - x(t_0)}{y(t) - y(t_0)}$, admet une limite finie². Si la limite de p est égale à λ , la tangente est la droite de pente λ passant par M_0 et un vecteur directeur de cette droite est $(1, \lambda)$. Si l'inverse de p a la limite 0, la tangente est la droite verticale passant par M_0 .

Démonstration. On se ramène au cas $t_0 = 0$, $M_0 = (0, 0)$. Supposons que $p(t) = y(t)/x(t)$ admette la limite λ quand x tend vers 0, l'autre cas est analogue. Nous allons montrer que la droite D d'équation $y - \lambda x = 0$ est tangente. Cela signifie que, si Δ est une droite d'équation $ax + by = 0$, distincte de D (i.e. avec $a + b\lambda \neq 0$), la distance $d(M(t), D)$ est négligeable devant $d(M(t), \Delta)$. Rappelons la formule donnant cette distance :

$$d(M(t), \Delta) = \frac{|ax(t) + by(t)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Il s'agit donc de voir que $y(t) - \lambda x(t)$ est négligeable devant $ax(t) + by(t)$ quand $a + b\lambda$ est non nul. On écrit $\frac{y - \lambda x}{ax + by} = \frac{\frac{y}{x} - \lambda}{a + b\frac{y}{x}}$. Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $a + b\lambda$, de sorte que cette quantité tend bien vers 0. Réciproquement, si C admet pour tangente la droite $y - \lambda x$, cela signifie, entre autres, que $y(t) - \lambda x(t)$ est un petit o de $x(t)$. La quantité $\frac{y(t) - \lambda x(t)}{x(t)} = \frac{y(t)}{x(t)} - \lambda$ a donc pour limite 0, ce qui signifie bien que y/x tend vers λ .

2.1.3 Le cas des points réguliers

2.6 Définition. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ un paramétrage de classe C^1 . Une valeur $t_0 \in I$ est dite **régulière** pour f si $f'(t_0)$ est non nul. Une valeur non régulière est dite **singulière**.

2.7 Remarque. On dit parfois, par abus de langage, que le point $M(t_0)$ de la courbe C est régulier (ou singulier). C'est incorrect car le même point, sur la même courbe, peut être régulier pour un paramétrage et singulier pour un autre³. C'est le cas, par exemple, du point $O = (0, 0)$ sur l'axe des x avec les deux paramétrages $(t, 0)$ et $(t^3, 0)$.

²On suppose ici que ces expressions ont un sens. Pour $p(t)$ par exemple on suppose $x(t) - x(t_0) \neq 0$ pour t voisin de t_0 et distinct de t_0

³En vérité, comme le mot régulier a un sens pour les courbes $F(x, y) = 0$, il serait sans doute préférable de dire stationnaire ou non-stationnaire pour le paramétrage.

2.8 Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ un paramétrage de classe C^1 et soit t_0 une valeur régulière de f . Alors, la courbe C admet une tangente en $M(t_0)$, dont le vecteur directeur est $f'(t_0)$.

Démonstration. Cela résulte de 2.5. En effet, supposons par exemple $x'(t_0)$ non nul. Comme cette dérivée est la limite du rapport $\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$, ce rapport lui-même est non nul pour t voisin de t_0 . On peut donc écrire :

$$\frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \times \frac{t - t_0}{x(t) - x(t_0)}$$

et cette quantité tend vers $\lambda = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ quand t tend vers t_0 . La pente de la tangente est donc égale à λ et un vecteur directeur en est $(1, \lambda)$ ou encore $(x'(t_0), \lambda x'(t_0)) = f'(t_0)$.

2.9 Exemples.

1) La courbe peut avoir une tangente en M_0 même si $f'(t_0)$ est nulle. C'est le cas, par exemple, de $f(t) = (e^{-\frac{a}{t^2}}, e^{-\frac{b}{t^2}})$ avec $a \neq b$. En effet, si on a, disons, $a < b$, on a $y/x = e^{\frac{-(b-a)}{t^2}}$ et cette quantité a pour limite 0, de sorte que la tangente est l'axe des x .

2) Une courbe paramétrée peut avoir une tangente sans que les fonctions x et y soient dérivables. C'est le cas par exemple de $x(t) = \sqrt{|t|}$, $y(t) = |t|$.

3) Il y a des courbes sans tangentes, par exemple, $x = t$, $y = t \sin \frac{1}{t}$ n'a pas de tangente à l'origine.

2.2 Étude des points singuliers

2.2.1 Le résultat théorique

2.10 Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ un paramétrage et soient p, q des entiers > 0 avec $2 \leq p \leq q$. On suppose que f est n fois dérivable avec $n \geq q$. Soit $t_0 \in \mathbf{R}$ et posons $M_0 = M(t_0)$. On suppose que les dérivées $f^{(k)}(t_0)$ sont nulles pour $k = 1, \dots, p - 1$ (de sorte que t_0 est une valeur singulière de f), que $f^{(p)}(t_0)$ est non nulle et que q est le plus petit entier tel que les vecteurs $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ soient indépendants. Alors la branche de la courbe C en t_0 admet une tangente en M_0 dont un vecteur directeur est $f^{(p)}(t_0)$.

Démonstration. En développant $f(t)$ par la formule de Taylor-Young on obtient un développement limité de $f(t)$ au voisinage de t_0 :

$$f(t) = \frac{f^{(p)}(t_0)}{(p)!} ((t - t_0)^p + o((t - t_0)^p)) + \frac{f^{(q)}(t_0)}{(q)!} ((t - t_0)^q + o((t - t_0)^q)).$$

En effectuant le changement d'origine $t_0 = 0$ et le changement de repère consistant à prendre comme vecteurs de base les dérivées d'ordre p et q , on est ramené à un paramétrage dont les fonctions X et Y admettent des développements limités : $X(t) = at^p + o(t^p)$ et $Y(t) = bt^q + o(t^q)$ avec $a, b \neq 0$. Il est clair alors que la tangente existe et que c'est l'axe des X donc la droite dirigée par $f^{(p)}(t_0)$.

2.2.2 Méthode pratique

Par changement de l'origine des temps on se ramène au cas $t_0 = 0$. Par changement de l'origine du plan on peut supposer $M_0 = (0, 0)$. On suppose alors qu'on a des développements limités de $x(t)$ et $y(t)$: $x(t) = at^p + o(t^p)$ et $y(t) = bt^q + o(t^q)$ avec $a, b \neq 0$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors, la tangente existe ; c'est l'axe des x (resp. des y) si on a $p < q$ (resp. $q < p$) et c'est la droite $y = bx - ay$ si on a $p = q$.

2.2.3 Nature des points singuliers

On suppose qu'on a un point singulier en $M(t_0)$. Comme ci-dessus, on se ramène au cas $t_0 = 0$, $M_0 = (0, 0)$. Quitte à faire un changement de repère **affine**, on peut supposer que la tangente est portée par l'axe des x et qu'on a des développements limités comme ci-dessus, mais avec⁴ $1 < p < q$. On peut, enfin, supposer qu'on a $a, b > 0$ quitte à changer l'orientation des axes. Il y a quatre cas possibles.

- Premier cas : p impair, q pair. Quand t croît, x est négatif, puis positif, tandis que y est toujours positif. On dit qu'on a un point **parabolique**.

- Deuxième cas : p et q impairs. Quand t croît, x et y sont négatifs puis positifs, on a un **point d'inflexion**.

- Troisième cas : p pair, q impair. Cette fois x reste ≥ 0 , tandis que y change de signe : on a un **point de rebroussement de première espèce**.

- Quatrième cas : p et q pairs. Les deux coordonnées restent positives et on a un **point de rebroussement de seconde espèce**. On notera que ce cas est le seul où le tracé de la courbe n'est pas évident (on ne sait pas *a priori* laquelle des branches est au-dessus de l'autre).

2.3 Branches infinies

⁴Si on a $p = q$ et $x = at^p + \dots$, $y = bt^p + \dots$, on peut se ramener au cas $p < q$ par le changement de repère $x' = x$, $y' = y - (b/a)x$, sauf ... si la courbe est la droite $bx - ay = 0$!

L'étude des branches infinies est analogue à celle que l'on pratique dans le cas des graphes de fonctions. On commence par étudier pour quelles valeurs de t les coordonnées x ou y deviennent infinies. Si une seule des deux devient infinie on a une asymptote horizontale ou verticale. Si les deux deviennent infinies, on étudie la limite de y/x et de x/y . Si par exemple y/x admet une limite a finie, on étudie ensuite la limite de $y - ax$.

3 Quelques mouvements

Dans tout ce qui suit on suppose les mouvements définis sur un intervalle de temps I et suffisamment réguliers (de classe C^2).

3.1 Les mouvements rectilignes

3.1 Proposition. *Soit $M(t)$ un point mobile, $\vec{v}(t)$ son vecteur vitesse et $\vec{a}(t)$ son vecteur accélération. On suppose que le mouvement n'a pas de point singulier (i.e. que $\vec{v}(t)$ ne s'annule pas). Alors \vec{v} et \vec{a} sont colinéaires en tout point si et seulement si le mouvement est rectiligne (i.e. si la trajectoire est portée par une droite).*

Démonstration. Pour le sens non évident on écrit que le produit vectoriel $\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)$ est nul, ce qui donne $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0$ pour tout t . Soit t_0 un point intérieur de I . On a $x'(t_0) \neq 0$ ou $y'(t_0) \neq 0$. Supposons par exemple $x'(t_0) \neq 0$. Cette relation est encore vraie sur un intervalle J contenant t_0 . Sur J la fonction y'/x' est donc définie et sa dérivée est nulle, de sorte que y'/x' est constante et égale à a et on en déduit $y(t) = ax(t) + b$ pour $t \in J$. Cela signifie que les points $(x(t), y(t))$, pour $t \in J$ sont sur la droite D d'équation $y = ax + b$. Notons t_1 la borne supérieure des $t \in I$ tels que tous les points $M(t)$ pour $t \in [t_0, t_1]$ soient sur D . Montrons que t_1 est la borne supérieure de I . Sinon, on peut lui appliquer le raisonnement précédent et les points $M(t)$ pour t voisin de t_1 sont alignés sur une droite D' . Si D' est égale à D , cela contredit la propriété de t_1 , si elle ne lui est pas égale, les points $M(t)$ pour t à gauche de t_1 sont à la fois sur D et D' et c'est absurde. Le même raisonnement appliqué vers la gauche montre que les points $M(t)$ sont tous sur D .

3.2 Remarque. L'hypothèse d'absence de point singulier est essentielle. En effet, sinon on peut avoir une trajectoire coudée comme avec le mouvement défini comme suit : $x(t) = t^3$, $y(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $x(t) = 0$, $y(t) = t^3$ pour $t \geq 0$.

3.2 Les mouvements uniformes

3.3 Proposition. Soit $M(t)$ un point mobile, $\vec{v}(t)$ son vecteur vitesse et $\vec{a}(t)$ son vecteur accélération. Le mouvement est uniforme (c'est-à-dire que $\|\vec{v}(t)\|$ est constante) si et seulement si $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ sont orthogonaux pour tout t .

Démonstration. On pose $l(t) = \|\vec{v}(t)\|^2 = (\vec{v}(t)|\vec{v}(t))$ et on dérive cette fonction. On a $l'(t) = 2(\vec{v}(t)|\vec{a}(t))$, et le résultat s'ensuit.

3.2.1 Le mouvement circulaire uniforme

Lorsqu'un point mobile $M(t)$ décrit le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon R , on a $x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$ et on peut écrire $x(t) = R \cos \theta(t)$ et $y(t) = R \sin \theta(t)$. Le nombre $\omega(t) = \theta'(t)$ est appelé la vitesse angulaire de $M(t)$.

3.4 Proposition. On suppose que le point mobile $M(t)$ décrit un cercle de centre O avec un mouvement uniforme à vitesse non nulle.

- 1) La vitesse angulaire $\omega(t)$ est constante.
- 2) L'accélération $\vec{a}(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM(t)}$.

Démonstration. Un calcul immédiat donne $x'(t) = -R \sin \theta(t) \theta'(t)$ et $y'(t) = R \cos \theta(t) \theta'(t)$, d'où $\|\vec{v}(t)\|^2 = R^2 \theta'(t)^2$. Comme la norme de la vitesse est constante, on voit que $\theta'(t)^2$ l'est aussi. Il en résulte que $\theta'(t)$ est constante par connexité. On pose $\theta'(t) = \omega$. Comme le vecteur vitesse est tangent, la proposition 3.3 montre que l'accélération est centrale. Le calcul de $\vec{a}(t)$ est d'ailleurs immédiat et on a $\vec{a}(t) = -\omega^2 \overrightarrow{OM(t)}$.

3.5 Remarque. La loi fondamentale de la dynamique montre qu'un tel mouvement est produit par une force centripète (i.e. dirigée vers le centre du cercle).