Construction de cercles donnés par trois conditions

Daniel Perrin

1 Introduction

Le but de ce texte est d'examiner la construction de cercles du plan euclidien $\mathcal{P}$ donnés par trois conditions. Cet objectif est essentiellement géométrique, mais pour comprendre la problématique du sujet (et notamment le pourquoi du nombre 3 de conditions) il faut se souvenir qu'un cercle du plan a une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

où le point $O = (\alpha, \beta)$ est le centre du cercle et où le rayon est donné par la formule $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$. Cela montre que l'espace des cercles est (une variété) de dimension 3, précisément, c'est l'ouvert Ω de $\mathbf{R}^3$ formé des triplets (α, β, γ) tels que $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$.

Les conditions auxquelles peut être soumis un cercle peuvent être de différentes natures. Nous nous limiterons ici à deux types de conditions :

- le cercle passe par un point donné,
- le cercle est tangent à une droite donnée.

On peut en imaginer bien d'autres (par exemple être tangent à un cercle donné, voire à une courbe donnée, etc.).

1.1 Proposition. *1) L'ensemble des cercles de $\mathcal{P}$ passant par un point $m \in \mathcal{P}$ est l'intersection de Ω avec un plan affine H de $\mathbf{R}^3$. C'est un ouvert non vide de H.*

2) L'ensemble des cercles de $\mathcal{P}$ tangents à une droite donnée D est l'intersection de Ω avec une quadrique Q de $\mathbf{R}^3$. C'est un ouvert non vide de Q.

Démonstration. 1) Posons $m = (X, Y)$. Les cercles cherchés correspondent aux triplets (α, β, γ) vérifiant $X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y + \gamma = 0$ et cette équation est linéaire en α, β, γ donc définit un plan de $\mathbf{R}^3$. Dans ce plan, c'est un ouvert non vide (si l'on fixe α, β il y a un unique γ solution).

2) On peut choisir $Y = 0$ comme équation de D. Le cercle défini par (α, β, γ) est alors tangent à D si et seulement si son rayon est égal à la distance du centre à D, donc si l'on a $|\beta| = R$ ou encore $\beta^2 = R^2$, soit

$\alpha^2 = \gamma$. Cette équation étant de degré 2 est celle d'une quadrique (ici un cylindre à base parabolique). Tout point de cette quadrique vérifiant $\beta \neq 0$ donne un cercle convenable.

1.2 *Remarque.* On montre que l'ensemble des cercles tangents à un cercle donné est l'intersection de Ω et d'une quadrique. Par exemple, si le cercle donné est de centre $(0,0)$ et de rayon R les cercles tangents sont donnés par $4R^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma) = (\gamma - R^2)^2$.

1.3 Commentaire. L'ensemble des cercles vérifiant trois conditions du type ci-dessus est donc l'intersection de trois surfaces (plans ou quadriques) et il est, en général, fini (et de cardinal ≤ 8). On peut donc légitimement se poser la question de construire (à la règle et au compas) le ou les cercles vérifiant trois de ces conditions.

2 Cercles passant par trois points

Le résultat est bien connu :

2.1 Proposition. *Soient A, B, C trois points distincts de $\mathcal{P}$.*

1) Si A, B, C sont alignés il n'y a aucun cercle passant par A, B, C.

2) Si A, B, C ne sont pas alignés, il y a un unique cercle passant par A, B, C : le cercle circonscrit au triangle ABC.

Démonstration. C'est bien connu ! Le ressort de la preuve est le lemme suivant :

2.2 Lemme. *Les centres des cercles passant par deux points A, B distincts sont les points de la médiatrice de $[AB]$. Pour un centre donné il y a un unique cercle convenable.*

3 Cercles tangents à trois droites

Le résultat est presque aussi connu :

3.1 Proposition. *Soient D, E, F trois droites distinctes du plan.*

1) Si les droites sont parallèles ou concourantes, il n'y a aucun cercle tangent aux trois droites.

2) Si deux des droites sont parallèles et si la troisième coupe les deux autres, il y a deux cercles tangents aux trois droites.

3) Si les trois droites déterminent un triangle ABC il y a quatre cercles tangents aux trois droites : le cercle inscrit et les cercles exinscrits.

Démonstration. Le ressort de la preuve est l'analogue du lemme 2.2 :

3.2 Lemme. *Les centres des cercles tangents à deux droites distinctes sont :*
- *Les points de la parallèle équidistante si les droites sont parallèles.*
- *Les points des bissectrices des deux droites si elles sont sécantes.*

Pour un centre donné il y a un unique cercle convenable.

4 Cercles tangents à une droite et passant par deux points

Là, les choses deviennent intéressantes :

4.1 Théorème. *Soient A, B deux points distincts et D une droite.*

1) Si A et B sont sur D, ou de part et d'autre de D, il n'y a aucun cercle tangent à D passant par A et B.

2) Si A est sur D mais pas B il y a un unique cercle tangent à D passant par A et B.

3) Si A, B sont du même côté de D il y a un deux cercles tangents à D passant par A et B.

Démonstration. Le premier point est évident et le deuxième facile (le centre du cercle est sur la médiatrice de $[AB]$ et sur la perpendiculaire à D passant par A). Pour le troisième, on commence par traiter le cas, facile, où les droites D et (AB) sont parallèles. Sinon, on appelle C le point d'intersection de D et (AB) et T le point de contact cherché. Alors, on a $\overline{CA}\,\overline{CB} = CT^2$ (puissance de C par rapport au cercle) et on construit T comme moyenne géométrique. Il y a deux solutions. On finit en utilisant la perpendiculaire à D en T et la médiatrice de $[AB]$, voir figure 1.

Pour la discussion, l'approche analytique est commode. On peut supposer que la droite D a pour équation $y = 0$, que les points sont $A = (0, a)$ avec $a \neq 0$ et $B = (b_1, b_2)$ et on cherche Γ sous la forme $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma = 0$. On a vu qu'on devait avoir $\gamma = \alpha^2$. Le point A est sur le cercle si et seulement si on a $2\beta = \frac{a^2+\alpha^2}{a}$ et en écrivant que B est sur le cercle il reste une équation du second degré en α :

$$(a - b_2)\alpha^2 - 2ab_1 \pm a + a(b_1^2 + b_2^2 - ab_2) = 0$$

dont le discriminant réduit est $\Delta = ab_2(b_1^2 + (a - b_2)^2)$. Le dernier facteur est > 0 car A et B sont distincts. On voit qu'il y a une solution unique si b_2 est nul (B sur D), aucune si $b_2 < 0$ et deux si $b_2 > 0$.

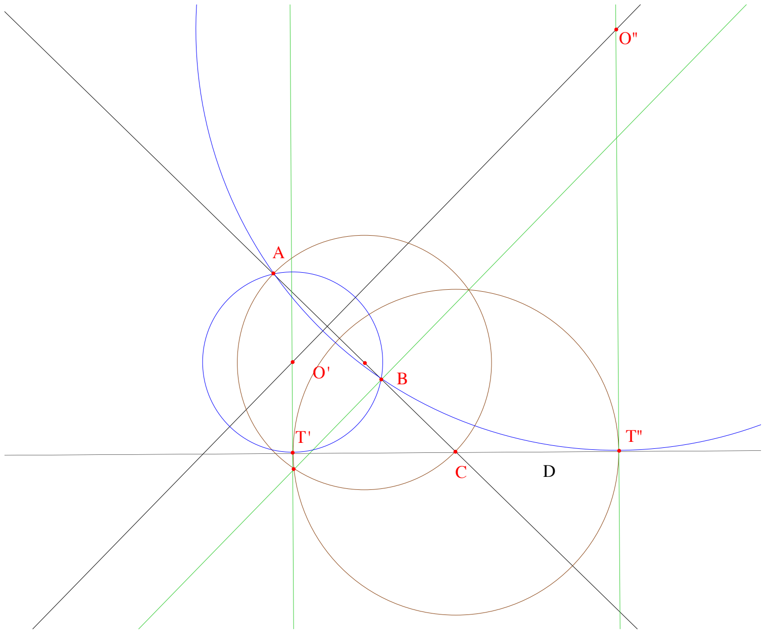

FIGURE 1 – Deux points une droite

5 Cercles tangents à deux droites et passant par un point

Cette fois, le résultat est le suivant :

5.1 Théorème. *Soient D_1, D_2 deux droites sécantes en I et A un point non situé sur les droites. Alors, il existe deux cercles passant par A et tangents à D_1 et D_2.*

Démonstration. On procède par abandon de contraintes. On trace un cercle Γ_0 tangent aux deux droites, situé dans l'angle qui contient A, sans se préoccuper qu'il contienne A. Pour cela, on prend le centre O sur la bissectrice des droites, on le projette sur D_1 en T et Γ_0 est le centre de centre O qui passe par T, voir figure 2. Ce cercle coupe la droite (IA) en A' et A'' et il suffit de considérer les cercles homothétiques de Γ_0 dans les homothéties de centre I envoyant respectivement A' et A'' sur A, voir figure 2.

5.2 *Remarque.* Pour la difficile question des cercles tangents à trois cercles donnés, voir par exemple le paragraphe 4.3.2 de :

`http://www.math.u-psud.fr/ perrin/Livregeometrie/DPPartie6.pdf`

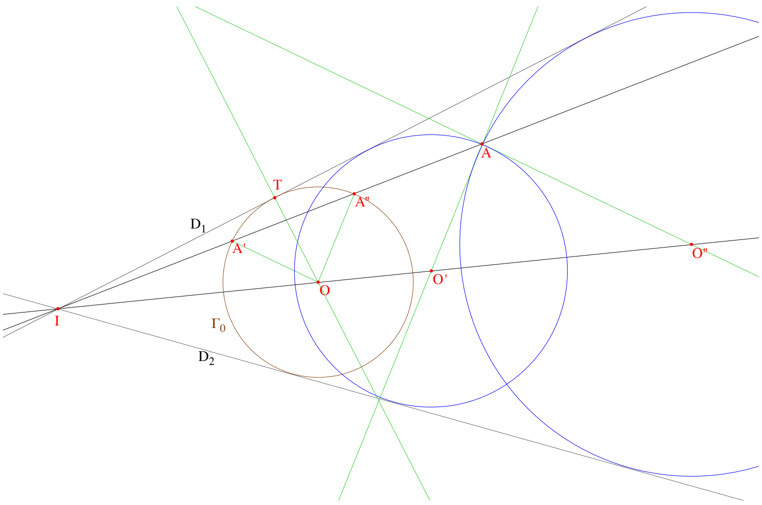

Figure 2 – Deux droites et un point