Exemples d'utilisation d'un repère

Daniel PERRIN

Ce texte vise à donner des éléments pour traiter l'exposé 22 du CAPES 2013. Comme un certain nombre d'autres, il s'agit d'un exposé "auberge espagnole" où il faut surtout disposer de bons exemples. Cependant, il faut aussi avoir un recul un peu théorique, voir paragraphe 2 ci-dessous.

1 Prérequis et définitions

1.1 Prérequis

Le prérequis essentiel pour cet exposé est la notion de vecteur et tout ce qui tourne autour (addition, multiplication par un scalaire, etc.). En particulier, on dira qu'une droite, un plan ou un espace de dimension 3 est **affine** lorsqu'on a défini sur cet objet la notion de vecteur avec les propriétés usuelles. La notion de base (ou de famille libre et génératrice) est sous-jacente, même si elle n'est pas dans les programmes. On l'utilisera dans ce qui suit en indiquant comment la contourner éventuellement. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur les définitions je les précise ici. Il n'est peut-être pas indispensable de le faire le jour du CAPES.

1.2 Définitions

1.2.1 Sur la droite

1.1 Définition. *Soit D une droite affine. Un repère (affine, ou cartésien) de D consiste en la donnée d'un point $O \in D$ et d'un vecteur directeur $\vec{i}$ de D. Il revient au même de se donner deux points distincts O, I de D, avec la formule $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$. On peut alors décrire, de manière unique, tout point M de D par la formule $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ où x est l'abscisse de M dans le repère $(O, \vec{i})$.*

1.2.2 Dans le plan

1.2 Définition. *Soit P un plan affine. Un repère (affine, ou cartésien) de P consiste en la donnée d'un point $O \in P$ et de deux vecteurs non colinéaires (ou indépendants) $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Il revient au même de se donner trois points non* *alignés O, I, J avec les relations $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. On peut alors décrire, de manière unique, tout point $M \in P$ par la formule $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont l'abscisse et l'ordonnée de M.*

1.2.3 Dans l'espace

1.3 Définition. *Soit E un espace affine de dimension 3. Un repère (affine, ou cartésien) de P consiste en la donnée d'un point $O \in P$ et de trois vecteurs indépendants $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Il revient au même*[1] *de se donner quatre points non coplanaires O, I, J, K avec les relations $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. On peut alors décrire, de manière unique, tout point $M \in P$ par la formule $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où x, y et z sont l'abscisse, l'ordonnée et la cote de M.*

1.2.4 Repère orthonormé

1.4 Définition. *On suppose la droite, le plan ou l'espace (noté E dans les trois cas) muni d'une structure métrique (par exemple un produit scalaire). Un repère affine de E est dit* **orthogonal** *si ses vecteurs sont orthogonaux et orthonormé si, de plus, ils sont de norme 1.*

2 Problématique

2.1 Quels problèmes peut-on traiter à l'aide de repères ?

Les repères peuvent intervenir dans presque tous les problèmes de géométrie, leur fonction étant de transformer des problèmes géométriques en problèmes algébriques ou analytiques[2]. Ils peuvent notamment servir à montrer des propriétés, à faire des constructions, à déterminer des lieux, à résoudre des problèmes d'optimisation, à calculer des grandeurs, etc. Ils peuvent être utilisés à la fois dans le plan et dans l'espace. Nous donnerons des exemples de chaque sorte ci-dessous.

2.2 Quels types de repère utiliser ?

C'est une question essentielle. Au niveau du second degré, deux types de repères peuvent être utilisés : les repères orthonormés[3] ou les repères

1. Et cela constitue une définition alternative de "linéairement indépendants".
2. Dans les programmes actuels de lycée il n'y a plus grand-chose d'autre en géométrie et c'est bien triste.
3. Les repères orthogonaux non orthonormés doivent en général être proscrits, voir ci-dessous 5.1.

cartésiens (ou affines), pas nécessairement orthogonaux ni normés. On peut ériger en règle les principes suivants :

• Si le problème à traiter est euclidien, par ses hypothèses ou sa conclusion, c'est-à-dire s'il met en jeu des longueurs, des angles, l'orthogonalité, des cercles, le produit scalaire, etc. il faut absolument utiliser un repère orthonormé , voir 3.1.2. En effet, dans un repère non orthonormé, pour ne donner que cet exemple, le calcul de la longueur AM, avec $A = (a, b)$ et $M = (x, y)$, par la formule $AM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$ est incorrect.

• Si le problème est de nature affine, c'est-à-dire si hypothèses et conclusions portent sur des propriétés d'alignement, de concours, de parallélisme, d'aires [4], on peut utiliser un repère cartésien. C'est encore vrai si les propriétés en jeu peuvent s'exprimer en termes de vecteurs (sans produit scalaire) comme par exemple le fait que M est le milieu de $[AB]$ (qui s'écrit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, voire au tiers de $[AB]$ du côté de A ($\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$) ou dans une proportion quelconque. En effet, ces propriétés peuvent se vérifier avec les coordonnées que le repère soit orthonormé ou non. Cela regroupe les résultats qui s'exprimaient autrefois en termes de rapports de mesures algébriques (Thalès, Ménélaus, Céva, etc.).

3 Des exemples en géométrie plane

3.1 Des repères pour montrer des résultats

Ici, il est essentiel de bien distinguer selon la nature du problème, affine ou euclidien.

3.1.1 Un problème affine : le concours des médianes

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, respectivement. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point G et que G est au tiers de $[AA']$ du côté de A' (et de même pour les autres).

On remarque qu'il s'agit d'un problème affine (car milieu et tiers peuvent s'exprimer en termes de **vecteurs**.) On peut donc choisir un repère cartésien adapté au problème, par exemple B, C, A. Autrement dit on prend $B = (0, 0)$,

4. Ce point n'est pas tout à fait évident. On prend comme unité d'aire le parallélogramme bâti sur le repère affine. Alors, la mesure de l'aire du triangle ABC est la moitié de la valeur absolue du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Par une application affine l'aire est multipliée par le déterminant de l'application linéaire associée, mais les rapports d'aires sont invariants.

$C = (1,0)$ et $A = (0,1)$. On en déduit $A' = (\frac{1}{2}, 0)$, $B' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $C' = (0, \frac{1}{2})$. La droite (BB') a pour équation $y = x$, la droite (CC'), $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. On en déduit leur point d'intersection $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et on vérifie qu'il est sur (AA'), $y = -2x + 1$. Pour les tiers on écrit les vecteurs, par exemple $\overrightarrow{BG} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{GB'} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ donc $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GB'}$, ce qui est une manière d'écrire la propriété du tiers.

3.1.2 Une rédaction incorrecte pour le concours des médianes

Le lecteur est invité à traiter l'exercice suivant sans en lire la correction.

On considère un triangle ABC, et on note A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soit G le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

On utilise le repère formé des points $B = (0,0)$, $A = (0,1)$ et $C = (1,0)$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points A', B', C' et G.

b) Montrer que G est sur (CC').

c) Montrer l'égalité de longueurs $AG = 2\,GA'$ et les égalités analogues avec B et C.

2) Calculer les longueurs AG et CG et montrer qu'elles sont égales.

Dans cet exercice, le résultat de la question 1) est correct (c'est celui vu ci-dessus), mais il est maladroit de formuler les propriétés en termes de longueurs. En effet, le fait d'utiliser des longueurs ne permet pas *a priori* d'employer un repère cartésien comme il est proposé. Ici, c'est cependant correct parce que les propriétés peuvent s'exprimer en termes de vecteurs.

Si dans la question 1), la maladresse ne prête pas à conséquence, en revanche, la question 2) est faite exprès pour induire en erreur en incitant à calculer les longueurs comme si le repère était orthonormé. On trouve dans ce cas $AG^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ et $CG^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ donc $AG = CG$. Pourtant, cette propriété n'est vraie que si le triangle est isocèle en B. En effet, si l'on a $AG = CG$ le triangle AGC est isocèle en G donc la médiane (GB') est aussi hauteur et c'est vrai aussi dans ABC qui est donc isocèle en B. On a donc montré que tout triangle est isocèle !

3.1.3 Pappus affine

Voici l'énoncé :

Soient d, d' deux droites sécantes en O et soient A, B, C (resp. A', B', C') trois points de d (resp. d') distincts de O. On suppose que les droites (AB') et

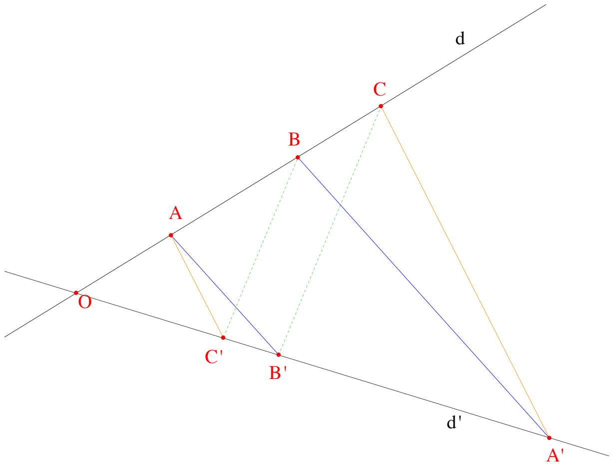


Figure 1 – La version affine de Pappus

(BA') *sont parallèles, ainsi que* (AC') *et* (CA')*. Alors* (BC') *et* (CB') *sont parallèles.*

Le problème est clairement affine, de sorte qu'on peut prendre un repère d'origine O avec d' et d comme axes des x et des y. Il n'est pas nécessaire de prendre les points donnés comme points unités, c'est même plutôt mieux d'utiliser des paramètres pour bien comprendre le calcul. On pose donc $A = (0, a)$, $B = (0, b)$, $C = (0, c)$, $A' = (a', 0)$, $B' = (b', 0)$ et $C' = (c', 0)$. On écrit que les droites (AB') et $(A'B)$ sont parallèles. Leurs équations sont $y = -\frac{a}{b'}x + a$ et $y = -\frac{b}{a'}x + b$. Dire qu'elles sont parallèles signifie qu'elles ont même coefficient directeur, ce qui donne $aa' = bb'$. Le calcul est identique pour (AC') et $(A'C)$ (et c'est ici qu'on voit l'intérêt d'avoir pris des paramètres : la relation est la même que l'autre en changeant simplement les noms : $aa' = cc'$). On en déduit $bb' = cc'$ qui, là encore, est la relation qui exprime le parallélisme de (BC') et (CB').

3.1 *Remarque.* Il y a une variante de Pappus, projective : on suppose que les droites (AB') et (BA') se coupent en W, (CA') et (AC') en V et (BC') et (CB') en U. Alors U, V, W sont alignés. On peut traiter ce problème en utilisant le même repère. On trouve comme coordonnées de W :

$$x = \frac{a'b'(b-a)}{bb' - aa'} \quad \text{et} \quad y = \frac{ab(b'-a')}{bb' - aa'}$$

et de même pour les autres par permutation circulaire. Il n'y a plus qu'à vérifier que ces points sont bien alignés, ce qu'on peut par exemple traduire par la nullité d'un déterminant 3×3 qu'un logiciel de calcul formel vérifie sans peine.

3.1.4 Encore un problème affine : le problème des tiers

Il s'agit d'un problème classique, dont on trouvera plus bas un énoncé extrait d'un manuel (le défi de Daffy). Attention, cet énoncé est un peu désagréable sur plusieurs points.

• D'abord, les noms des points (TRI et JUS) sont stupides car ils perdent la possibilité d'utiliser les permutations comme on l'a vu plus haut.

• Ensuite, l'énoncé suggère d'utiliser un repère cartésien sans justifier pourquoi c'est possible (c'est encore une fois parce que les hypothèses et les conclusions, milieux et tiers, peuvent se traduire en termes de vecteurs).

• Enfin, il semble considérer que la réciproque va de soi, ce qui n'est pas si évident. Pour la traiter on peut prendre cette fois S, J, U comme repère affine. Voir des détails dans le fichier *Elise*.

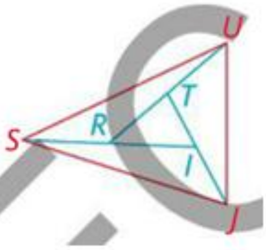
2) Un triangle dans un triangle - Exercice 2$^{\text{nde}}$ (MR 104p283)

104. Le défi de Daffy

Voici le défi : « À partir d'un triangle *JUS*, construire le triangle *TRI* tel que *T* est le milieu du segment [*RU*], *R* le milieu du segment [*SI*] et *I* le milieu du segment [*TJ*]. » Mais comment construire ces trois points sachant qu'ils sont définis les uns en fonction des autres ?

Partie I : Astuce et analyse

On prend le problème à l'envers : on considère la figure ci-contre, où le triangle *JUS* est obtenu à partir des symétriques respectifs des sommets du triangle *TRI*. On se place dans le repère (*R*, *I*, *T*).



1. Donner les coordonnées des points *J*, *U* et *S*.
2. En déduire une équation de la droite (*RU*).
3. La droite (*RU*) coupe la droite (*SJ*) en un point *V*. Déterminer les coordonnées de ce point *V*.
4. On note *W* le milieu du segment [*VJ*].

Montrer que le point *V* est le milieu du segment [*SW*]. Quelle interprétation peut-on faire de la position des points *V* et *W* sur le segment [*SJ*] ?

Partie II : À vous de jouer !

Essayer maintenant de répondre au défi, en justifiant la construction.

3.1.5 Un problème euclidien : le concours des hauteurs

Soit ABC un triangle. Montrer que les hauteurs (AA'), (BB') et (CC') (les points A', B', C' sont les pieds des hauteurs) sont concourantes.

Attention, ici les hypothèses portent sur les hauteurs, donc des droites perpendiculaires, notion euclidienne, et on doit donc travailler avec un repère orthonormé. On prend un repère d'origine A' avec (BC) comme axe des x et (AA') comme axe des y. On pose donc $A' = (0,0)$, $A = (0,a)$, $B = (b,0)$ et

$C = (c, 0)$ (là encore, c'est mieux d'utiliser des paramètres). On écrit d'abord les équations de (AB) et (AC) : $y = -\frac{a}{b}x + a$ et $y = -\frac{a}{c}x + a$ (on passe de l'une à l'autre en échangeant b et c). Puis on écrit l'équation de (BB') qui passe par B et est perpendiculaire à (AC). Les coefficients directeurs ont pour produit -1 ce qui donne $y = \frac{c}{a}x + \beta$ et la droite passe par b ce qui donne $\beta = -\frac{cb}{a}$. On obtient la hauteur issue de C en échangeant les rôles de b et c ce qui donne $y = \frac{b}{a}x - \frac{bc}{a}$. L'intersection H de ces droites est un point d'abscisse nulle qui est donc sur la hauteur (AA').

3.1.6 En géométrie euclidienne : cercles et droites

On peut utiliser des repères (orthonormés, s'agissant de cercles) pour traiter la question des positions d'un cercle et d'une droite ou de deux cercles. Traitons par exemple le problème d'un cercle C de centre O et de rayon R et d'une droite D. On choisit O comme origine et, par exemple, l'axe des y parallèle à D et celui des x perpendiculaire à D. On a alors comme équations $x^2 + y^2 = R^2$ pour C et $x = d$ pour D et la discussion est très facile. On comparera à la complexité du calcul général avec les équations :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad \text{et} \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Dans le cas de deux cercles on prendra les centres en $(0, 0)$ et $(d, 0)$ avec les équations :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2dx = R'^2 - d^2.$$

3.2 Des repères pour faire des constructions

Le meilleur exemple est la construction d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle. Pour le traiter, on se place dans le plan complexe et on choisit le repère de sorte que le cercle donné soit le cercle unité et que le pentagone régulier ait pour sommets les racines cinquièmes de l'unité : 1, $\zeta = e^{2i\pi/5}$, ζ^2, $\zeta^3 = \zeta^{-2}$ et $\zeta^4 = \zeta^{-1} = \overline{\zeta}$. On a la relation :

$$\zeta^5 - 1 = 0 = (\zeta - 1)(\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1).$$

Les racines autres que 1 vérifient donc l'équation de degré 4 que l'on peut encore écrire $\zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = 0$ en divisant par ζ^2. On pose alors $\alpha = \zeta + \zeta^{-1} = \zeta + \overline{\zeta} = 2\cos(2\pi/5)$ et, comme $\alpha^2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} + 2$, on voit que α vérifie $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ dont les racines sont $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \zeta^2 + \zeta^{-2} = 2\cos(4\pi/5)$. Pour la construction explicite du pentagone, voir [ME] chapitre 6.

3.3 Des repères pour trouver des lieux

On se reportera à l'exposé sur les lieux pour plus d'exemples. J'en traite seulement trois ici.

3.3.1 Le cercle des rapports

Soient A, B deux points distincts et k un réel > 0. Quel est l'ensemble des points M qui vérifient $MB = kMA$?

C'est un problème euclidien (car ici, comme les points M, A, B ne sont pas alignés, les rapports sont vraiment des rapports de distances). On choisit un repère qui respecte la symétrie de la figure : on pose $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ et $M = (x, y)$. On écrit $MB^2 = k^2MA^2$. On trouve l'équation :

$$(k^2 - 1)(x^2 + y^2 + a^2) + 2a(k^2 + 1)x = 0.$$

Si $k = 1$ on trouve la droite $x = 0$ (médiatrice de $[AB]$) et sinon, un cercle centré sur l'axe des x.

Il n'est pas tout à fait évident de trouver les points I, J de l'axe des x. On coupe le cercle par la droite $y = 0$, on a une équation du second degré en x dont le discriminant réduit est $\Delta' = 4a^2k^2$, ce qui donne les deux points I et J d'abscisses respectives $a\dfrac{1-k}{1+k}$ et $a\dfrac{1+k}{1-k}\cdot$ On montre alors qu'on a $\overrightarrow{IB} = -k\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{JB} = k\overrightarrow{JA}$.

En fait, ici, la solution qui consiste à introduire les points I, J de (AB) qui sont dans le lieu, définis par les relations vectorielles et à calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{MI}|\overrightarrow{MJ})$ est bien meilleure ...

3.3.2 La parabole

Soit D une droite et F un point non situé sur D. Quel est l'ensemble[5] *des points M tels que $MH = MF$ où H désigne le projeté orthogonal de M sur D.*

On appelle I le projeté orthogonal de F sur D et on prend pour origine[6] le milieu O de $[IF]$. L'axe des x est la parallèle à D passant par O, celui des y est (OF), on pose $F = (0, a)$ et D a pour équation $y = -a$. Alors, si

5. On peut habiller cet exercice en disant que M est un âne qui, comme celui de Buridan, hésite entre la carotte située en F et la rivière D.

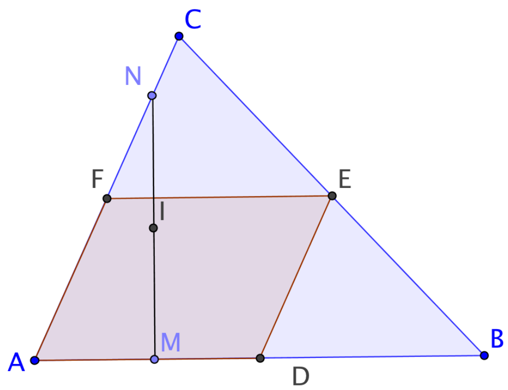
6. Ce faisant, on commet un délit d'initié en mettant l'origine du repère au sommet de la parabole, ce qui permet d'avoir l'équation sous la forme usuelle. Si on prend I comme origine, on y arrive aussi.

$M = (x, y)$, la relation $MF^2 = MH^2$ se traduit en $x^2 + (y - a)^2 = (y + a)^2$ qui donne $y = \dfrac{1}{4a}x^2$ et on reconnaît bien une parabole.

3.3.3 Un lieu épais

Soit ABC un triangle, M et N des points situés sur $[AB]$ et $[AC]$ respectivement et I le milieu de $[MN]$. Quel est le lieu de I quand M et N varient ?

L'expérience Geogebra n'est pas si facile à faire, mais elle montre cependant que le lieu est un parallélogramme **plein** $ADEF$, ce qui constitue l'originalité de l'exercice. La preuve est immédiate en prenant A, B, C comme repère (affine). Les points M, N ont alors pour coordonnées $(x, 0)$ et $(0, y)$ et I est égal à $(x/2, y/2)$ avec x, y variant dans $[0, 1]$.



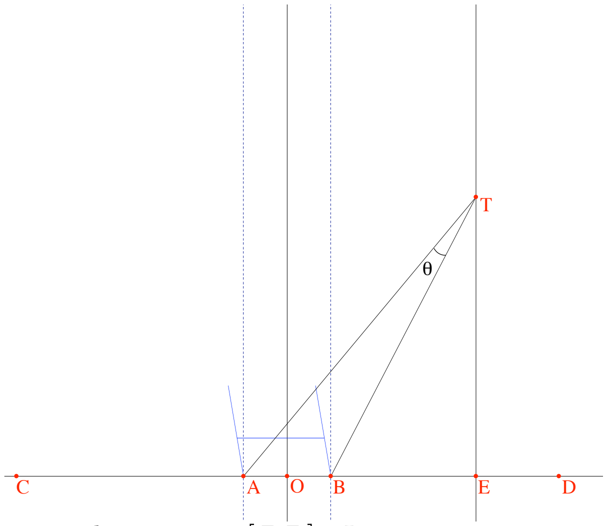
3.4 Repères et optimisation

Là encore, il y a de très nombreux exemples. En voici deux.

3.4.1 Transformer l'essai

Ici, on a donné le repère d'emblée, mais le choix est bien naturel.

Au rugby, quand une équipe marque un essai en un point E de la ligne de but $[C, D]$, la règle est qu'elle doit tenter la transformation en un point T quelconque de la perpendiculaire à la ligne de but, passant par le point E. Le but de l'exercice est de déterminer, pour un point E de la ligne de but, le point T le plus favorable, c'est-à-dire celui d'où l'on voit les poteaux A et B sous un angle maximal. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note $(-a, 0)$ et $(a, 0)$ les coordonnées des poteaux A et B où a est un réel strictement positif.



On suppose qu'un essai a été marqué au point E du segment $[BD]$. Les coordonnées du point E s'écrivent $(x, 0)$ avec $x \geq a$ et (x, d) sont celles du point T avec $d \geq 0$. On note $\theta = \widehat{ATB}$ l'angle sous lequel le rugbyman voit les deux poteaux depuis le point T.

0) Établir la formule $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\,\tan\beta}$.

1) Calculer $\tan\theta$ en fonction de a, x et d.

2) On suppose que x est fixé. Déterminer la valeur de d pour que l'angle θ soit maximal. On note $d(x)$ cette valeur de d.

3) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto d(x)$ pour $x \geq a$. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de cette fonction.

4) Un terrain de rugby a pour côtés $100\,m$ et $CD = 68\,m$. La distance entre deux poteaux est $5,65\,m$. À l'aide d'un logiciel de géométrie, représenter ce terrain au millième, ainsi que les quatre arcs de courbes représentant l'ensemble des points d'où l'on voit les poteaux sous un angle maximal.

3.4.2 Cosette

Cosette est en vacances à Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), mais ce n'est pas pour autant que les Thénardier lui font grâce des corvées. Elle doit partir de la maison avec ses seaux, aller puiser de l'eau dans la Pelote et la porter dans l'abreuvoir des vaches qui est situé plus loin, mais du même côté de la rivière. Aidez-la à trouver le chemin le plus court pour faire son travail. (On supposera que la Pelote est rectiligne.)

Il y a une ruse pour résoudre géométriquement le problème :

On introduit le point A' symétrique de A par rapport à la Pelote, voir figure ci-contre. Le plus court chemin passe par M intersection de la Pelote avec $(A'B)$. En effet, si P est un autre point on a $AM + MB = A'M + MB = A'B < A'P + PB = AP + PB$ (la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre).

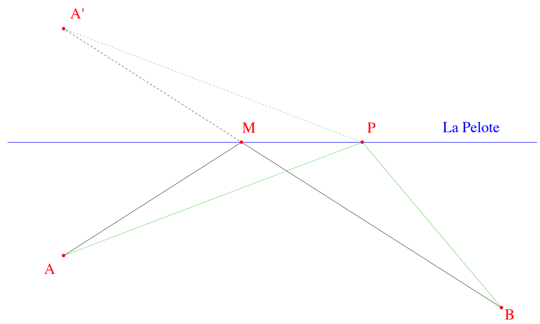


Figure 2 – Cosette et la Pelote

Si l'on ne voit pas la ruse on calcule, mais ce n'est pas si facile. On prend la rivière pour axe des x, $A = (0, a)$, disons $a > 0$, $B = (c, b)$, disons $c, b > 0$, $M = (x, 0)$. La fonction à minimiser est $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x-c)^2 + b^2}$. La dérivée est égale à :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2 + b^2}}.$$

Elle s'annule en x vérifiant $(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = 0$. Le discriminant est $(abc)^2$. On obtient deux solutions : $x = \dfrac{ac}{a \pm b}\cdot$ La bonne (celle qui correspond[7] au point symétrique de A) correspond au signe $+$. Et l'autre ? Elle n'annule pas la dérivée car x et $x - c$ doivent être de signes contraires or on a $x = \dfrac{ac}{a-b}$ et $x - c = \dfrac{bc}{a-b}$, attention à l'élévation au carré.

3.5 Repères et calculs de grandeurs

Voir par exemple, dans [ME] chapitre 7, paragraphe 2.h, le calcul de l'aire du segment de parabole.

4 En dimension 3

4.1 Un exemple d'optimisation

Déterminer le volume maximal d'un cylindre droit inscrit dans une demi-sphère de centre O.

On choisit un repère (orthonormé) d'origine le centre de la sphère, le plan P limitant la demi-sphère étant le plan xOy. On appelle R le rayon de la

7. C'est Thalès : $\frac{x}{c} = \frac{a}{a+b}\cdot$

sphère et h la hauteur du cylindre. Le cylindre et la sphère se coupent selon un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r. On a la relation $R^2 = r^2 + h^2$. Le volume du cylindre est $\pi r^2 h$ et on élimine r^2 en le remplaçant par $R^2 - h^2$. Il n'y a plus qu'à étudier la fonction $h \mapsto \pi(R^2 - h^2)h$.

4.2 Calculs de volumes

Voir dans [ME] chapitre 10 le calcul du volume du cône ou de la boule.

5 Annexe : les repères orthogonaux non orthonormés

Sauf en physique, pour représenter des grandeurs de même nature qui ne varient pas à la même échelle, ces repères sont inutiles, voire nocifs.

5.1 L'exemple de Xavier Devin

On considère un triangle ABC rectangle en A. On choisit le repère de telle sorte qu'on ait $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ et $C = (0,1)$. Soit M le milieu de $[BC]$.

1) En calculant les produits scalaires, montrer qu'on a $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{CM}^2$. Conclure.

2) Montrer qu'on a $(\overrightarrow{BM}|\overrightarrow{AM}) = 0$. Conclure.

Bien entendu, la formule $xx' + yy'$ pour le produit scalaire n'est pas vraie si le repère n'est pas orthonormé. L'intérêt de l'exercice c'est que la conclusion de la première question ($AM = BM = CM$) est juste ! En revanche celle de la deuxième est fausse (tous les triangles rectangles ne sont pas isocèles).

6 Références

[ME] PERRIN Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.