Le théorème de Ptolémée

0.1 Rappels.
1) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan euclidien. On considère le quadrilatère $ABCD$. Ses côtés sont les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et ses diagonales les segments $[AC]$ et $[BD]$. On dit que $ABCD$ est convexe si, étant donné un côté quelconque, les deux autres points sont dans le même demi-plan ouvert limité par ce côté. Il revient au même de demander que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent, ce qui implique, en particulier, que A et C sont strictement de part et d'autre de (BD).
2) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan euclidien. On suppose que A et C sont (strictement) de part et d'autre de la droite (BD). Alors, A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \pi + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ (voir Polycopié, exercice 3.4.7).
3) Soient $u, v \in \mathbf{C}^*$. On a $|u+v| = |u| + |v|$ si et seulement si u/v est un réel positif.

0.2 Théorème. (Théorème de Ptolémée) *Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan euclidien. On suppose que le quadrilatère $ABCD$ est convexe. Alors, les quatre points A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si on a :*

$$(*) \qquad AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Démonstration. On identifie le plan au plan complexe et on note a, b, c, d les affixes des points. On commence par vérifier la relation :

$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)$$

(on notera que les points apparaissent dans l'ordre alphabétique mais on pourrait aussi bien prendre l'ordre inverse). Si on pose $u = (a-b)(c-d)$ et $v = (a-d)(b-c)$, la relation $(*)$ se traduit simplement par $|u+v| = |u| + |v|$. En vertu du rappel 3, il s'agit de voir à quelle condition $r = \dfrac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)}$ est un réel positif, donc à quelle condition son argument est nul modulo 2π. Mais, on a $arg\left(\frac{a-b}{a-d}\right) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BA})$ et $arg\left(\frac{c-d}{b-c}\right) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DC})$ d'où $arg(r) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) + \pi$ (on a utilisé l'invariance de l'angle de vecteurs par la symétrie centrale $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$, la relation de Chasles et les formules $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$). La condition $(*)$ est donc équivalente à $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \pi + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$. Comme le quadrilatère est convexe, A et C sont de part et d'autre de (BD) (rappel 1) et cette condition signifie exactement que les points sont cocycliques (rappel 2).