Le problème d'Oriane

1 Le théorème général

1.1 Théorème. *Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan euclidien et $ABCD$ le quadrilatère associé et soient $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ et Δ_D les bissectrices intérieures des angles en A, B, C et D du quadrilatère. On note P, Q, R, S les intersections des droites Δ_A et Δ_B, Δ_B et Δ_C, Δ_C et Δ_D, Δ_D et Δ_A respectivement (on suppose que les droites en question ne sont pas parallèles). Alors, les points P, Q, R, S sont cocycliques ou alignés.*

1.2 *Remarques.* 1) Il faut entendre bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A} = \widehat{DAB}$ du quadrilatère au sens suivant : c'est la droite passant par A dont les points M autres que A vérifient l'égalité d'angles de vecteurs $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, donc aussi $2(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$.

2) Si deux des droites, disons Δ_A et Δ_B, sont parallèles, le point correspondant, ici P, est à l'infini. Le théorème reste vrai et il signifie que les autres points Q, R, S sont alignés. En fait, dans ce cas, on voit qu'un deuxième point est à l'infini, cf. Fig. 4.

3) Si certains des points P, Q, R, S sont égaux, le résultat est évident. On peut donc les supposer distincts.

2 La démonstration générale

On va utiliser les angles de droites. Rappelons que l'angle de droites (AM, AB) est l'image de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ dans $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$, i.e. modulo π. On sait que quatre points P, Q, R, S sont cocycliques ou alignés si et seulement si on a $(PS, PQ) = (RS, RQ)$. On commence par un lemme :

2.1 Lemme. *Avec les notations précédentes, si M est sur Δ_A, on a $(AM, AB) = \frac{1}{2}(AD, AB)$ dans $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$.*

Démonstration. On a $2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, donc $2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$ dans $\mathbf{R}$ donc, en divisant par 2, $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + k\pi$ dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire le résultat dans $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$.

On a $(PS, PQ) = (PA, PB)$ et $(RS, RQ) = (RD, RC)$ car les droites correspondantes sont égales (par exemple $(PS) = (PA)$). On calcule ensuite $(PA, PB) = (PA, AB) + (AB, PB) = (AP, AB) + (BA, BP) = \frac{1}{2}(AD, AB) + \frac{1}{2}(BA, BC) = \frac{1}{2}(AD, BC)$ modulo π.

De même, on a $(RD, RC) = \frac{1}{2}(DA, DC) + \frac{1}{2}(CD, CB) = \frac{1}{2}(DA, CB)$. On voit que les deux angles annoncés sont bien égaux modulo π.

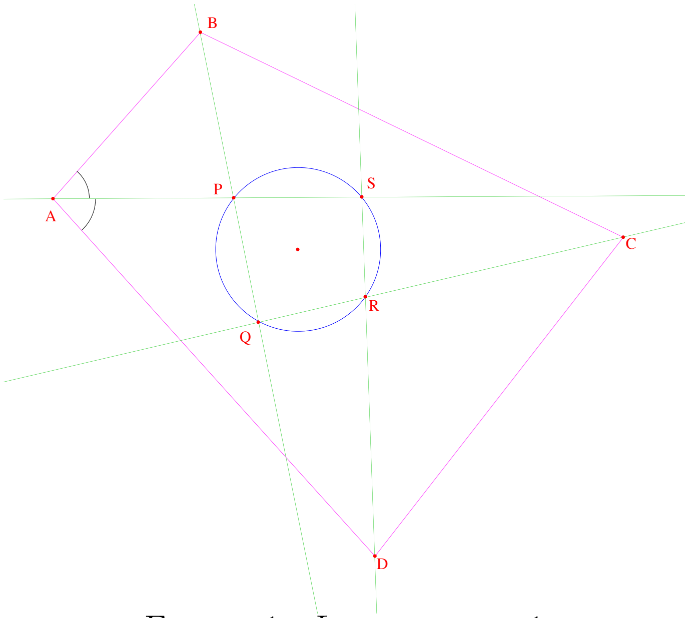

Figure 1 – Le cas convexe 1

3 Une variante élémentaire

Dans une classe de lycée, on peut donner une démonstration, avec les angles non orientés, à condition de s'appuyer sur la figure. On peut se contenter du cas où le quadrilatère $ABCD$ est convexe. Malgré cela, il reste une vraie difficulté. En effet, on constate qu'on a deux cas de figure possibles. On note $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ les angles du quadrilatère $ABCD$.

• Premier cas. Le point P est en même temps dans le segment $[AS]$ et dans le segment $[BQ]$ et le point R est dans $[SD]$ et $[QC]$. On a alors $\widehat{QPS} = \widehat{BPA} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{A} - \frac{1}{2}\widehat{B}$ et de même $\widehat{QRS} = \widehat{CRD} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{C} - \frac{1}{2}\widehat{D}$ et comme $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 2\pi$, on a $\widehat{QPS} + \widehat{QRS} = \pi$. Comme les points P, R sont de part et d'autre de (QS), les points sont bien cocycliques.

• Second cas. Cette fois c'est S qui est entre P, A et R, D et Q entre P, B et R, C. Le raisonnement, *mutatis mutandis*, est identique.

Il n'est pas évident, à mon avis, de montrer que ces deux cas épuisent toutes les possibilités du cas convexe. Dans une classe, si l'on veut éviter le problème des cas de figure, on peut donner la figure dans l'une ou l'autre position.

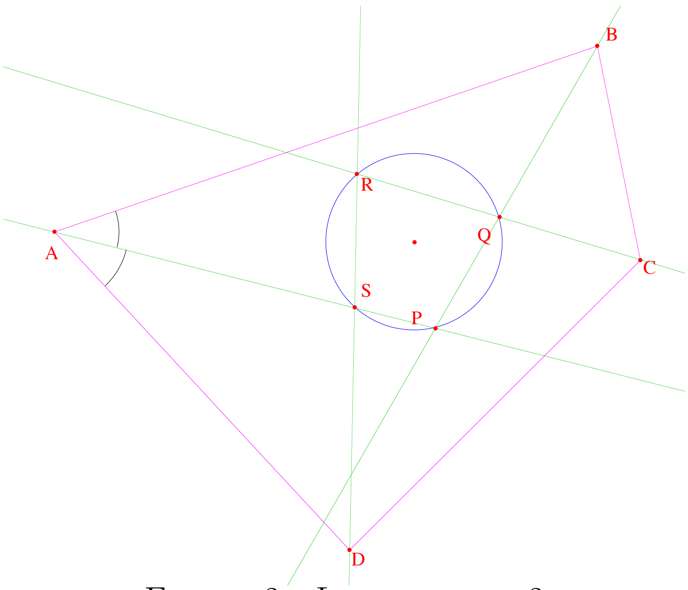

FIGURE 2 – Le cas convexe 2

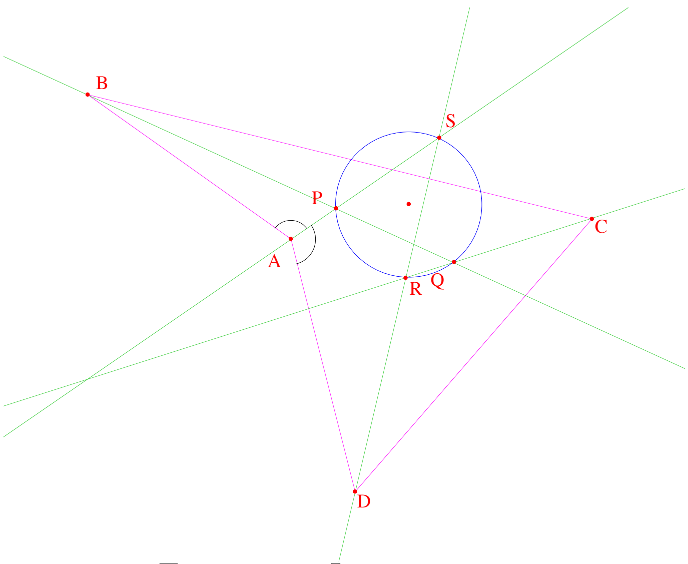

FIGURE 3 – Le cas concave

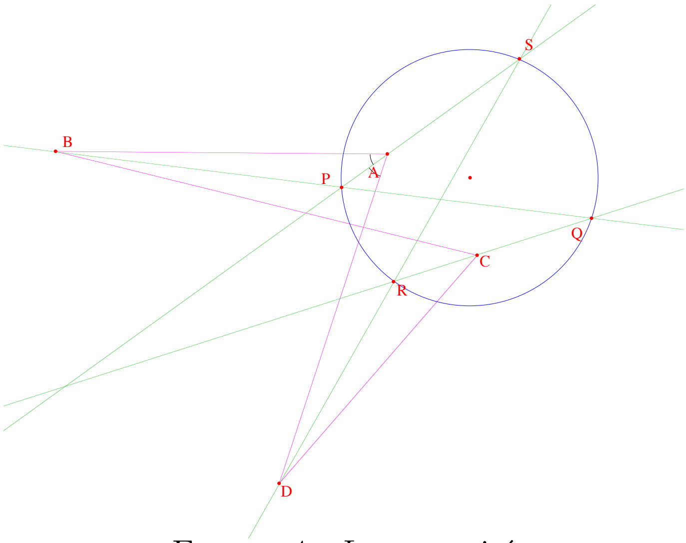

FIGURE 4 – Le cas croisé

4 Le cas dégénéré

On commence par un lemme :

4.1 Lemme. *Soit $ABCD$ un parallélogramme et $\Delta - A$ et Δ_B les bissectrices intérieures en A, B. Alors, les droites Δ_A et Δ_B sont perpendiculaires (donc non parallèles).*

Démonstration. On choisit des points M sur Δ_A et N sur Δ_B, distincts de A, B. On a alors $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB})$, d'où $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit le résultat suivant :

4.2 Proposition. *Si les droites Δ_A et Δ_B sont parallèles, les droites (AD) et (BC) le sont aussi, ainsi que Δ_C et Δ_D.*

Démonstration. On écrit $(\Delta_A, AB) = \frac{1}{2}(AD, AB)$ et $(AB, \Delta_B) = \frac{1}{2}(BA, BC)$ d'où $(\Delta_A, \Delta_B) = \frac{1}{2}(AD, BC)$ et de même $(\Delta_C, \Delta_D) = \frac{1}{2}(CB, DA)$. Si Δ_A et Δ_B sont parallèles on a $(\Delta_A, \Delta_B) = \frac{1}{2}(AD, BC) = 0 \pmod{\pi}$, donc (AD) et (BC) sont parallèles.

On note ensuite que Δ_A et Δ_D ne sont pas parallèles, et on note S leur point d'intersection. En effet, sinon, le même raisonnement que ci-dessus montre que (AB) et (CD) sont parallèles, donc que $ABCD$ est un parallélogramme, ce qui contredit le lemme. On montre de même que Δ_B et Δ_C se coupent en Q.

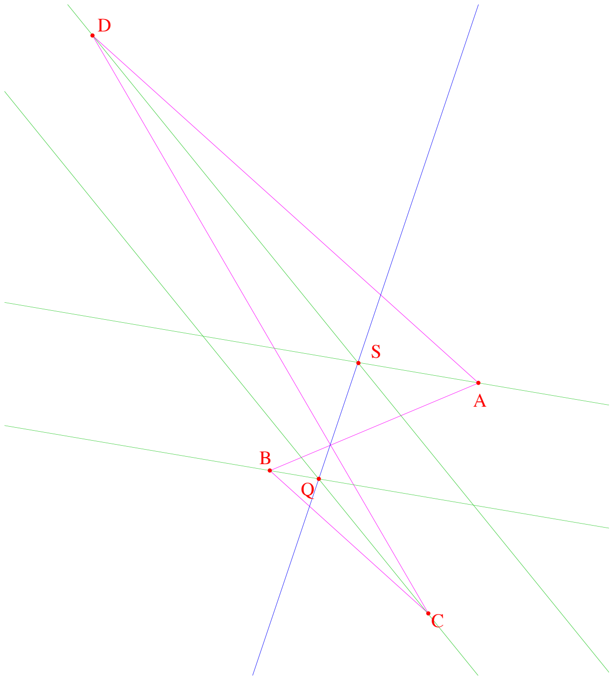

FIGURE 5 – Le cas dégénéré

On a alors, en angles de vecteurs, $2(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$ et $2(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BQ}) = (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ ou encore $2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{QB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB})$ donc $2(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{QB}) = (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB})$. Comme les droites Δ_A et Δ_B sont parallèles, on a $(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{QB}) = 0$ ou π modulo 2π, donc $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}) = 0 \pmod{2\pi}$.

Le même calcul avec $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{DS}$ donne $2(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{SD}) = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AD}) = 0 \pmod{2\pi}$, donc $(CQ, SD) = 0 \pmod{\pi}$ et les droites Δ_C et Δ_D sont bien parallèles.