

MODE D'EMPLOI

Ce polycopié est la suite, maintes fois promise et maintes fois remise, de celui de géométrie affine (cité [GA]). Cette fois, il concerne la géométrie euclidienne, la vraie, celle qui parle de distances, d'angles, d'orthogonalité, de hauteurs, de médiatrices, de bissectrices, de cercles, de sphères, de polygones réguliers et tous les beaux objets qui font qu'on peut aimer la géométrie plus que tout autre domaine des mathématiques. La géométrie euclidienne est le cœur de la géométrie que l'on commence à entrevoir à l'École, que l'on étudie au Collège, que l'on approfondit au Lycée et que l'on s'empresse d'oublier à l'Université, sauf, et c'est heureux, en préparation au CAPES.

Ce polycopié, comme le précédent, s'appuie de manière essentielle sur l'algèbre linéaire. C'est une méthode efficace pour faire de la géométrie et c'est celle qui vous sera utile, au moins à l'écrit du CAPES. On peut être plus réservé sur l'intérêt de cette approche pour la formation des futurs professeurs, notamment au collège. Nous donnons ci-dessous, en annexe, quelques indications sur une autre voie possible pour faire de la géométrie, plus proche de celle qu'on pratique au collège et au lycée. En dépit de ces réserves, il est évident que ce polycopié vous sera utile, non seulement pour préparer l'écrit du CAPES, mais aussi comme arrière-plan de l'oral.

Les règles d'utilisation de ce document sont les mêmes que celles du précédent et nous vous renvoyons au mode d'emploi de [GA]. Par souci d'économie, nous n'avons pas gardé le principe d'une feuille blanche sur deux, mais cela ne veut pas dire que vous ne devez pas travailler sur ce polycopié. Il vous faudra simplement avoir vos propres feuilles ou votre propre cahier. Si vous ne deviez retenir qu'un point du mode d'emploi, ce serait, plus encore qu'en géométrie affine :

faites des figures, encore des figures, toujours des figures.

En effet, chaque page, chaque paragraphe, chaque ligne de ce texte (ou presque) demande une figure.

Voilà, nous avons beaucoup travaillé sur ce document et vos remarques permettront encore de l'améliorer. Maintenant, comme nous disions déjà à la fin du mode d'emploi de [GA], c'est votre tour :

Au travail !

TABLE DES MATIÈRES

Partie I. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS	4
1. Le produit scalaire	4
2. La norme	5
3. Orthogonalité	7
4. Bases orthonormées	8
5. Isométries	10
6. Exemples d'isométries vectorielles	11
7. Transitivité	13
8. Angles non orientés de vecteurs ou de demi-droites	15
9. Les similitudes vectorielles	19
Partie II. LE PLAN VECTORIEL EUCLIDIEN	21
1. Isométries vectorielles du plan	21
2. Quelques isomorphismes	22
3. Angles orientés de vecteurs dans le plan	24
4. Angles orientés de droites	27
5. Similitudes	29
Partie III. ESPACES AFFINES EUCLIDIENS	30
1. Définitions	30
2. Orthogonalité	32
3. Repères orthonormés	33
4. Projection orthogonale	34
5. Sphères, hyperplans tangents	36
6. Barycentres dans un espace affine euclidien	38
Partie IV. ISOMÉTRIES AFFINES	40
1. Définitions et premières propriétés	40
2. Théorèmes de décomposition	41
3. Similitudes	44
Partie V. LE PLAN AFFINE EUCLIDIEN	46
1. Classification des isométries	46
2. Secteurs et angles non orientés	48
3. Angles orientés	51
4. Utilisation des nombres complexes	56
5. Cas d'isométrie des triangles	59
6. Cas de similitude des triangles	62
7. Polygones	63
Partie VI. GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE EN DIMENSION 3	68
1. Les isométries vectorielles	68
2. Les isométries affines	70
3. Exercices	72
4. Décomposition de certaines isométries affines	74
Annexe 1. LE POINT DE VUE D'EUCLIDE, HILBERT ... ET DU COLLÈGE	76

1. Introduction	76
2. Les axiomes d'Euclide-Hilbert pour la géométrie plane	76
3. Quel système d'axiomes pour le collège	78
Annexe 2. EXPONENTIELLE ET FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES	79
1. Exponentielle complexe	79
2. Exponentielle complexe imaginaire	79
Annexe 3. LONGUEUR DES COURBES	81
1. Introduction et rappels	81
2. Définition de la longueur des courbes	82
3. Le cas des courbes C^1	83
4. Longueur du cercle et des arcs de cercle	84
RÉFÉRENCES	85

Partie I. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Cette première partie a pour but de développer les principaux résultats concernant les espaces **vectoriels** euclidiens. Cette étude n'est pas une fin en soi mais elle est le passage obligé pour étudier ensuite les espaces **affines** euclidiens qui sont l'objet principal du programme de géométrie du CAPES.

On note E un espace **vectoriel** de dimension n non nulle¹ sur le corps des réels \mathbb{R} . (Lorsqu'on travaillera dans un espace affine on devra distinguer soigneusement points et vecteurs et on notera \vec{E} l'espace vectoriel associé, mais pour l'instant il n'y a pas de risque de confusion.)

1. LE PRODUIT SCALAIRE

1.1. Définition. Un **produit scalaire** sur E est une application φ de $E \times E$ dans \mathbb{R} qui à un couple de vecteurs (x, y) associe un scalaire réel noté ${}^2(x|y)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

S1) l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x|y)$ est **bilinéaire**, c'est-à-dire linéaire en x :

$$\forall x, x', y \in E, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \quad (\lambda x + \lambda' x'|y) = \lambda(x|y) + \lambda'(x'|y),$$

et, de même, linéaire en y ,

S2) l'application φ est **symétrique** :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x|y) = (y|x),$$

S3) l'application φ est **définie positive** :

$$\forall x \in E, \quad ((x|x) \geq 0) \quad \text{et} \quad ((x|x) = 0 \iff x = 0).$$

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace vectoriel euclidien**.

1.2. Remarques.

1.2.1. La bilinéarité de φ signifie simplement que φ est linéaire séparément en x et en y . Grâce à la symétrie on peut se limiter à vérifier la linéarité sur l'un des facteurs.

1.2.2. La condition S1 appliquée avec $\lambda = \lambda' = 0$ montre qu'on a $(0|y) = (y|0) = 0$ pour tout y . À l'inverse, 0 est le seul vecteur x vérifiant $(x|y) = 0$ pour tout y (comme on le voit avec la condition S3 appliquée à x). On dit que la forme bilinéaire φ est **non dégénérée**.

1.2.3. ♠. Montrez qu'on peut remplacer la condition S3 (définie positive) par positive et non dégénérée. (Si $(x|x)$ est nul on montrera qu'on a $(x|y) = 0$ pour tout y en considérant les vecteurs $\lambda x + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.)

1.3. Matrice du produit scalaire.

¹On gardera toujours en tête les cas $n = 2$ et $n = 3$ et on fera des dessins !

²Il peut être noté aussi $x.y$ ou $\langle x, y \rangle, \dots$ selon les auteurs.

1.3.1. ♠. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on appelle **matrice** du produit scalaire dans cette base la matrice A de taille $n \times n$ et de coefficients $a_{ij} = (e_i | e_j)$. Si X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) de deux vecteurs x et y dans la base, montrez que le produit scalaire est donné par la formule :

$$(x | y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = {}^t X A Y$$

où la matrice ${}^t X A Y$ est une matrice 1×1 que l'on identifie avec son unique coefficient. Montrer que A est une matrice symétrique (qui est dite définie positive).

1.3.2. ♠. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E , si A est la matrice du produit scalaire φ dans la base \mathcal{B} et si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , montrez que la matrice de φ dans la base \mathcal{B}' est ${}^t P A P$.

1.4. **Exemples.** ♠ Le lecteur vérifiera que les formules suivantes donnent des exemples de produits scalaires sur $E = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2) | (y_1, y_2)) &= x_1 y_1 + x_2 y_2, \\ ((x_1, x_2) | (y_1, y_2)) &= 2x_1 y_1 + 1729x_2 y_2, \\ ((x_1, x_2) | (y_1, y_2)) &= 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1. \end{aligned}$$

*L'introduction d'un produit scalaire sur E a deux fonctions essentielles : elle permet de définir une **norme** (donc une distance) et une notion d'**orthogonalité**. Nous abordons ces deux thèmes dans les paragraphes suivants dans lesquels E est toujours un espace euclidien de dimension n .*

2. LA NORME

2.1. **Définition.** On appelle **norme euclidienne** d'un élément x de E le réel positif

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Nous allons vérifier qu'il s'agit bien d'une norme sur E . Pour cela nous avons besoin de l'inégalité suivante (fondamentale elle aussi) :

2.2. **Lemme (Inégalité de Cauchy-Schwarz).** On a, pour x, y dans E , l'inégalité :

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Le résultat est évident si y est nul. Sinon, on applique la propriété S3 aux vecteurs $x + \lambda y$ avec λ réel. On a donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x + \lambda y | x + \lambda y) \geq 0.$$

Par bilinéarité on obtient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y) \geq 0.$$

Cette expression est un trinôme du second degré en λ qui est toujours positif ou nul, donc son discriminant $\Delta = 4[(x|y)^2 - (x|x)(y|y)]$ est négatif ou nul ce qui est exactement l'inégalité cherchée.

Il est clair que si x et y sont colinéaires on a égalité. Réciproquement, si y est nul, x et y sont évidemment colinéaires. Si on a égalité, et que y ne soit pas nul, le discriminant Δ est nul, donc l'équation a une racine double réelle λ_0 :

$$(x + \lambda_0 y | x + \lambda_0 y) = 0$$

ce qui implique $x + \lambda_0 y = 0$ en vertu de la condition S3, donc $x = -\lambda_0 y$. □

2.3. Proposition. *L'application $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur E c'est-à-dire vérifie les conditions suivantes :*

N1) $\|x\| \geq 0$ et ($\|x\| = 0 \iff x = 0$),

N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

N3) l'inégalité triangulaire (ou de Minkowski) :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration. La propriété N1 résulte du fait que ϕ est définie positive et N2 résulte de la bilinéarité. Pour prouver N3 il suffit d'élever au carré (les normes sont positives) et d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

2.3.1. ♠. Etudiez le cas d'égalité dans N3.

2.4. Remarques.

2.4.1. *Topologie sur E .* L'existence d'une norme permet de définir une distance sur E par la formule $d(x, y) = \|x - y\|$, puis de définir boules et sphères. Par exemple, la boule ouverte de centre x et de rayon R est l'ensemble :

$$B(x, R) = \{y \in E \mid \|x - y\| < R\}.$$

On obtient ainsi une topologie sur E , ce qui permet d'y faire de l'analyse (on peut définir suites convergentes, fonctions continues, etc.) mais aussi de traiter, par des voies topologiques, nombre de problèmes algébriques.

2.4.2. ♠. La définition 2.1 montre que le produit scalaire détermine la norme. Réciproquement la norme détermine aussi le produit scalaire grâce à la formule suivante :

$$2(x|y) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

2.4.3. ♠. Montrez les formules, pour x, y dans E :

$$\begin{aligned} 4(x|y) &= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \\ 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 &= \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Cette dernière formule est connue sous le nom d'identité du parallélogramme. Donnez une interprétation géométrique.

2.4.4. *Remarque importante.* Toute norme ne se déduit pas d'un produit scalaire, seules les normes qui vérifient l'égalité du parallélogramme sont euclidiennes.

♡. Montrez que les normes dans \mathbb{R}^n définies par $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ ou $\|x\|_2 = \sum_i |x_i|$ ne sont pas euclidiennes.

3. ORTHOGONALITÉ

3.1. Définition. On dit que deux éléments x et y de E sont **orthogonaux** si on a $(x|y) = 0$. On note alors $x \perp y$.

On dit que deux sous-espaces vectoriels V et W de E sont **orthogonaux** si tout vecteur de V est orthogonal à tout vecteur de W .

Le premier théorème n'est pas vraiment une nouveauté :

3.2. Proposition (Théorème de Pythagore vectoriel). Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration. Cela résulte aussitôt de la remarque 2.4.2. □

On peut aussi définir l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel :

3.3. Définition. Soit V un sous-espace vectoriel de E (ou même, simplement, une partie non vide de E). On pose :

$$V^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in V \quad (x|y) = 0\}$$

et on appelle V^\perp l'**orthogonal** de V .

3.3.1. ♠. Vérifiez que V^\perp est un sous-espace vectoriel de E (même si V n'en est pas un).

3.3.2. ♠. Montrez que l'application $V \mapsto V^\perp$ est décroissante : si on a $V \subset W$ on a, à l'inverse, $W^\perp \subset V^\perp$.

3.4. Proposition. Soit V un sous-espace vectoriel de E . On a la décomposition en somme directe : $E = V \oplus V^\perp$ et donc l'égalité : $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$.

Démonstration. 1) Si x est dans l'intersection $V \cap V^\perp$ on a $(x|x) = 0$ donc $x = 0$ d'où $V \cap V^\perp = \{0\}$. Si on pose $p = \dim V$ on a donc $\dim V^\perp \leq n - p$.

2) Il reste à montrer l'inégalité : $\dim V^\perp \geq n - p$. On fixe une base (e_1, \dots, e_p) de V . On a alors, en vertu de la bilinéarité :

$$V^\perp = \{x \in E \mid \forall i = 1, \dots, p \quad (x|e_i) = 0\}.$$

Autrement dit, si on considère l'application linéaire : $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par

$$\varphi(x) = ((x|e_1), \dots, (x|e_p))$$

V^\perp n'est autre que le noyau de φ . On conclut en notant l'inégalité $\dim \text{Im } \varphi \leq p$ et en appliquant la formule :

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim E.$$

□

3.5. Corollaire. Soient V et W deux sous-espaces de E . On a les formules suivantes :

- 1) $(V^\perp)^\perp = V$,
- 2) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$,
- 3) $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$.

3.5.1. ♠. Prouvez ce corollaire.

4. BASES ORTHONORMÉES

La notion de base orthonormée³ que nous définissons maintenant joue un rôle capital dans les espaces euclidiens, tant sur le plan théorique qu'au niveau des calculs.

4.1. Définition. Soit $F = (e_1, \dots, e_m)$ une famille de E . On dit que F est une famille **orthonormée** si on a :

$$(*) \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \|e_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall i, j, \quad i \neq j, \quad (e_i | e_j) = 0.$$

Autrement dit, les vecteurs e_i sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.

4.1.1. ♠. Montrez que la condition (*) implique que (e_1, \dots, e_m) est une famille libre.

On en déduit la définition suivante :

4.2. Définition. Une famille orthonormée de n vecteurs dans un espace euclidien de dimension n est appelée **base orthonormée**.

4.3. Remarque. Les calculs relatifs aux normes et aux produits scalaires sont très faciles quand on travaille dans une base orthonormée. Le lecteur prouvera les faits suivants :

4.3.1. ♠. Si un vecteur x est décomposé selon une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

ses coordonnées sont données par les formules $x_j = (x | e_j)$.

4.3.2. ♠. Avec l'écriture de x dans 4.3.1, la norme de x est donnée par :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

ou par la formule de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

4.3.3. ♠. Si on a, en plus, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, le produit scalaire vaut :

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Les deux dernières formules s'écrivent matriciellement : si X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans une base orthonormée on a $\|x\|^2 = {}^t X X$ et $(x | y) = {}^t X Y$ (en identifiant les matrices 1×1 : ${}^t X X$ et ${}^t X Y$ avec leur unique terme). Au sens de 1.3.1 ceci signifie que la matrice du produit scalaire dans une base orthonormée n'est autre que la matrice identité.

4.3.4. ♠. Un vecteur v appartient à $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_m\}$ engendré par la famille orthonormée $\{e_1, \dots, e_m\}$ si et seulement si on a l'égalité : $\|v\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq m} \langle v, e_i \rangle^2$.

Bien entendu il faut encore s'assurer qu'il existe des bases orthonormées. C'est l'objet de la proposition suivante :

³On dit aussi orthonormale, notamment au lycée et dans le programme du CAPES.

4.4. Proposition. Dans tout espace euclidien il existe des bases orthonormées.

Démonstration. On démontre la proposition par récurrence sur n . Elle est triviale pour $n = 1$ (car on peut toujours remplacer un vecteur x non nul par le vecteur $x/\|x\|$, colinéaire et de norme 1).

Supposons la démontrée pour n et passons à $n + 1$. Prenons un vecteur e_0 non nul que l'on peut supposer de norme 1 comme ci-dessus et considérons la droite vectorielle $D = \mathbb{R}e_0$ engendrée par e_0 et son orthogonal $H = D^\perp$. D'après 3.4, H est un hyperplan et on a $E = D \oplus H$. L'espace H muni de la restriction du produit scalaire est un espace euclidien de dimension n . Par l'hypothèse de récurrence il contient une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) . Alors (e_0, e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E . En effet, par hypothèse, les e_i sont de norme 1 et les e_i pour $i \geq 1$ sont orthogonaux deux à deux. Enfin e_0 est orthogonal aux autres e_i par définition de D^\perp . \square

4.5. Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

4.5.1. Proposition. Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille libre de E . Il existe une unique famille orthonormée $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ vérifiant :

- pour tout $1 \leq p \leq m$, $E_p = \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\} = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$
- pour tout $1 \leq p \leq m$, $\langle u_p, v_p \rangle > 0$

Démonstration. On la fait par récurrence sur p .

- On pose $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$.
- On suppose avoir construit v_1, v_2, \dots, v_p et on va construire v_{p+1} dans E_{p+1}/E_p , on cherche donc des réels α_i , pour $i = 1, \dots, p$, et un réel β non nul (pourquoi ?) tels que $v_{p+1} = \sum_{1 \leq i \leq p} \alpha_i v_i + \beta u_{p+1}$. Déterminons les α_i et β .
- Les relations $\langle v_i, v_{p+1} \rangle = 0$ ($i = 1, \dots, p$) déterminent les α_i en fonction de β :

$$\alpha_i = -\beta \langle v_i, u_{p+1} \rangle$$

La relation $\|v_{p+1}\|^2 = 1$ donne

$$\beta^2 [\|u_{p+1}\|^2 - \sum_{1 \leq i \leq p} \langle v_i, u_{p+1} \rangle^2] = 1$$

Le coefficient de β^2 n'est pas nul d'après 4.3.4.

- Il reste le signe de β à déterminer, on utilise $\langle v_{p+1}, u_{p+1} \rangle > 0$. On calcule $\langle v_{p+1}, u_{p+1} \rangle$, on trouve

$$\frac{\|v_{p+1}\|^2}{\beta} > 0$$

et donc β est positif. \square

4.5.2. ♠. Application à une base

- (1) Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à une base \mathcal{B} permet d'obtenir une base orthonormée \mathcal{G} . Il y a donc beaucoup de bases orthonormées. On passe de l'une à l'autre par une isométrie, patience !
- (2) Montrez que la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{G} est triangulaire puis que toute matrice symétrique définie positive A (cf. 1.3.1) s'écrit sous la forme ${}^t T T$ où T est une matrice triangulaire (invertible bien sûr).
- (3) Si on se donne une famille orthonormée, on peut la compléter en une base orthonormée.

5. ISOMÉTRIES

5.1. Isométries vectorielles.

5.1.1. **Définition.** Soit f un endomorphisme de E . On dit que f est une **isométrie vectorielle** (ou un automorphisme orthogonal) si f conserve le produit scalaire, i.e., si on a :

$$(1) \quad \forall x, y \in E \quad (f(x) | f(y)) = (x | y).$$

Dans les remarques suivantes f désigne une isométrie vectorielle⁴.

5.1.2. ♠. Montrez que f conserve aussi la norme : $\|f(x)\| = \|x\|$ (d'où le nom d'isométrie). Réciproquement, si $f \in L(E)$ conserve la norme, montrez qu'elle conserve aussi le produit scalaire.

5.1.3. ♠. Si f est une isométrie, montrez que f est injective, donc bijective (ceci justifie l'appellation "automorphisme").

5.1.4. ♠. Montrez que f conserve l'orthogonalité : si x et y sont dans E on a :

$$x \perp y \implies f(x) \perp f(y).$$

Montrez la formule : $f(V^\perp) = f(V)^\perp$ pour un sous-espace vectoriel V de E . Suffit-il de conserver l'orthogonalité pour être un automorphisme orthogonal ?

5.1.5. ♠. Montrez que f transforme une base orthonormée en une base orthonormée. Réciproque ? (voir aussi 7.1.3).

5.1.6. ♡. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie et f une application de E dans E vérifiant $f(0) = 0$.

(1) On suppose que f conserve le produit scalaire. Montrez que f est linéaire. (On pourra calculer $\|f(\vec{u} + \vec{v}) - f(\vec{u}) - f(\vec{v})\|^2$.)

(2) On suppose que f vérifie : $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que f est une isométrie vectorielle.

5.2. Groupe orthogonal.

5.2.1. **Proposition-définition.** L'ensemble des isométries de E est un groupe pour la composition. Ce groupe est appelé **groupe orthogonal** de E et noté $O(E)$ ⁵. C'est un sous-groupe de $GL(E)$.

5.2.2. ♠. Prouvez cette assertion.

5.3. **Forme matricielle.** Supposons l'espace E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, soit f une isométrie et A sa matrice dans la base \mathcal{B} . Soient $x, y \in E$ et X, Y les matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base \mathcal{B} . La relation (1) ci-dessus se traduit alors en ${}^tXY = {}^tX^tAA^tY$ pour tous X, Y , ou encore ${}^tAA = I$. Une telle matrice A est dite **orthogonale** et f est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe (multiplicatif) du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ des matrices inversibles encore appelé groupe orthogonal et noté $O(n, \mathbb{R})$ et l'application $f \mapsto A$ est un isomorphisme de groupes de $O(E)$ sur $O(n, \mathbb{R})$.

⁴Dans ce chapitre nous omettrons parfois le mot "vectorielle" pour dire seulement isométrie. Bien entendu, lorsque, par la suite, cohabiteront des isométries vectorielles et des isométries affines il faudra être plus précis.

⁵En toute rigueur il faudrait mentionner le produit scalaire dans la notation.

5.3.1. ♠. Interprétez la relation ${}^tAA = I$ sur les vecteurs colonnes (ou lignes) de la matrice A .

5.4. **Proposition.** Soit $f \in O(E)$ (resp. $A \in O(n, \mathbb{R})$). On a l'égalité $\det f = \pm 1$ (resp. $\det A = \pm 1$).

Démonstration. Il suffit de traiter le cas de A . De la relation ${}^tAA = I$ et des formules

$$\det(AB) = \det A \det B \quad \text{et} \quad \det {}^tA = \det A$$

on déduit

$$\det({}^tAA) = \det {}^tA \det A = (\det A)^2 = \det I = 1.$$

□

5.5. Isométries positives.

5.5.1. **Proposition-définition.** L'ensemble des isométries vectorielles (resp. des matrices orthogonales) de déterminant 1 est un sous-groupe distingué de $O(E)$ (resp. de $O(n, \mathbb{R})$). On le note $O^+(E)$ (resp. $O^+(n, \mathbb{R})$) et ses éléments sont appelées les **isométries positives ou directes** (resp. les matrices orthogonales positives).

Démonstration. L'application $\det : O(E) \rightarrow \{\pm 1\}$ est un homomorphisme de groupes (multiplicatifs) dont $O^+(E)$ est le noyau. C'est donc un sous-groupe distingué de $O(E)$. □

5.5.2. *Remarque.* Le groupe $O^+(E)$ (resp. $O^+(n, \mathbb{R})$) est souvent noté $SO(E)$ (resp. $SO(n, \mathbb{R})$) et appelé groupe spécial orthogonal.

5.6. Isométries négatives.

5.6.1. Les isométries de $O(E)$ qui ne sont pas dans $O^+(E)$ sont appelées **négatives** (ou **indirectes** ou encore **rétrogrades**) et leur ensemble est noté $O^-(E)$. Nous en verrons des exemples plus loin.

5.6.2. ♠. Montrez que $O^-(E)$ n'est pas un sous-groupe, contrairement à $O^+(E)$.

6. EXEMPLES D'ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Dans ce paragraphe nous montrons l'existence d'isométries vectorielles en assez grand nombre et ce de deux manières différentes. D'abord en exhibant des exemples et notamment les symétries orthogonales. Ensuite en montrant l'existence d'isométries décrites, en quelque sorte, par leur effet sur certains objets : bases, droites, etc. L'idée maîtresse de cette méthode est la transitivité.

6.1. Homothéties.

6.1.1. **Proposition.** Les seules homothéties qui sont des isométries vectorielles sont l'identité Id_E et la symétrie centrale $-\text{Id}_E$. Cette dernière est une isométrie positive si et seulement si n est pair.

6.1.2. ♠. Montrez cette proposition.

6.1.3. **Proposition.** Les seules valeurs propres (**réelles**)⁶ possibles d'une isométrie vectorielle sont 1 et -1 .

6.1.4. ♠. Prouvez cette proposition.

6.2. **Symétries.** Nous abordons maintenant le cas des symétries. Rappelons le résultat suivant :

6.2.1. **Rappel.** Soit f un endomorphisme de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) f est une involution (i.e. vérifie $f^2 = \text{Id}_E$),
- 2) f est une symétrie (i.e. il existe deux sous-espaces supplémentaires V et W tels que $f|_V = \text{Id}_V$ et $f|_W = -\text{Id}_W$).⁷

6.2.2. **Proposition.** On suppose l'espace E décomposé en somme directe : $E = V \oplus W$. Soit f la symétrie vectorielle par rapport à V , parallèlement à W . Alors, f est une isométrie si et seulement si V et W sont orthogonaux (et donc $W = V^\perp$).

Démonstration. 1) Supposons $f \in O(E)$ et soient $x \in V$ et $y \in W$. On a alors $f(x) = x$ et $f(y) = -y$. Si on applique à ces vecteurs la conservation du produit scalaire :

$$(f(x)|f(y)) = (x|-y) = -(x|y) = (x|y),$$

on en déduit $(x|y) = 0$. On a donc $W \subset V^\perp$ et l'égalité résulte de l'égalité des dimensions.

2) Supposons maintenant V et W orthogonaux. Il suffit de montrer que f conserve la norme. Soit $x \in E$ que l'on décompose en $x = y + z$ avec $y \in V$, $z \in W$, de sorte que l'on a $f(x) = y - z$. Le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad \text{et de même} \quad \|f(x)\|^2 = \|y\|^2 + \|-z\|^2 = \|x\|^2$$

d'où la conclusion. □

6.2.3. **Définition.** Soit V un sous-espace vectoriel de E et soit $W = V^\perp$. La symétrie par rapport à V , parallèlement à W (qui est une isométrie en vertu de 6.2.2) est appelée **symétrie orthogonale** par rapport à V . On la note σ_V . Lorsque V est un hyperplan (et donc V^\perp une droite) on dit que σ_V est une **réflexion** orthogonale⁸ (ou symétrie orthogonale hyperplane).

6.2.4. ♠. Montrez que le déterminant de la symétrie σ_V par rapport à V vaut $(-1)^{n-p}$ où $p = \dim V$. En particulier les réflexions sont toujours des isométries **négatives**. (Ce qui montre l'existence d'isométries négatives).

6.2.5. ♠. Montrer qu'un endomorphisme orthogonal diagonalisable d'un espace vectoriel euclidien est une symétrie orthogonale (éventuellement l'identité).

⁶Rappel : Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie sont les racines réelles du polynôme caractéristique. Elles sont donc évidemment réelles.

⁷Le cas $W = \{0\}$ correspond à $f = \text{Id}_E$.

⁸La plupart du temps le mot "orthogonale" sera sous-entendu.

6.2.6. ♠. Soit σ_V une symétrie orthogonale. Montrez qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable⁹ par σ_V si et seulement si il s'écrit $F = (F \cap V) \oplus (F \cap V^\perp)$. (L'un des sens est clair. Pour l'autre, on notera que si F est stable par σ_V , $\sigma_V|_F$ est une involution donc diagonalisable et on se souviendra que V et V^\perp sont les sous-espaces propres de σ_V relatifs aux valeurs propres 1 et -1 .)

Le théorème suivant explique l'importance des symétries et notamment des réflexions orthogonales. Nous le vérifierons en dimensions 2 et 3. Pour le cas général voir l'exercice ci-dessous.

6.3. **Théorème.** *Toute isométrie de E est produit d'au plus n réflexions.*

Le résultat suivant sera utilisé souvent dans la suite :

6.3.1. ♠. Soient u et v deux vecteurs de même norme de E . Montrez qu'il existe une réflexion qui envoie u sur v (faites un dessin !). Trouvez-les toutes !

6.3.2. ♣. Soit f une isométrie de l'espace euclidien E de dimension n . On va montrer par récurrence sur n que f est produit d'au plus n réflexions (par convention, le produit de 0 réflexion est l'identité).

1) Montrez le résultat pour $n = 1$.

2) On suppose qu'on a $n > 1$ et que le résultat est prouvé en dimension $< n$. Soit e un vecteur unitaire de E .

a) Montrez que si e est fixe par f , f est produit d'au plus $n - 1$ réflexions (étudiez la restriction de f à l'hyperplan $(e)^\perp$).

b) Montrez qu'il existe une réflexion σ telle que $\sigma(f(e)) = e$ (cf. 6.3.1) et concluez.

7. TRANSITIVITÉ

Une situation géométrique se traduit souvent par la donnée d'un groupe G opérant sur un ensemble X . Dans ce cas, l'un des problèmes fondamentaux que l'on doit résoudre est celui de la transitivité de cette opération. Rappelons qu'on dit que G opère transitivement sur X si, pour tous x et y dans X , il existe un élément g de G tel que $g.x = y$ (on dit alors que x et y sont dans la même orbite sous G). Par exemple, le groupe affine du plan est transitif sur l'ensemble des points du plan, ou sur l'ensemble des droites, ou encore sur l'ensemble des triangles ; le groupe $GL(E)$ est transitif sur l'ensemble des bases de E .

Lorsque G n'est pas transitif, on cherche à préciser ses orbites, c'est-à-dire à donner des conditions qui permettent d'affirmer que x et y sont dans la même orbite, i.e. qu'il existe g avec $g.x = y$.

Le groupe $O(E)$ opère sur de nombreux ensembles : les vecteurs de E , voire les vecteurs non nuls, voire les vecteurs unitaires ; les droites vectorielles, les bases de E , etc. Les résultats suivants (essentiels !) explicitent certaines des propriétés de transitivité de $O(E)$.

⁹Définitions : Soit g une application d'un ensemble G dans lui-même, une partie P de G est stable (resp. invariante) par g si on a : $g(P) \subset P$ (resp. $g(P) = P$). Bien sûr, dans le cas présent (6.2.6), ces deux notions coïncident.

Comme l'image d'une base orthonormée par une isométrie est une base orthonormée, il est clair que $O(E)$ n'est pas transitif sur l'ensemble des bases. Le résultat suivant détermine ses orbites :

7.1. Orbites de $O(E)$ sur l'ensemble des bases.

7.1.1. **Proposition.** Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E vérifiant :

$$(*) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad (e_i | e_j) = (e'_i | e'_j).$$

Alors, l'unique endomorphisme f de E qui vérifie $f(e_i) = e'_i$ pour tout i , est une isométrie.

7.1.2. ♠. Montrez ce résultat. On notera que la condition $(*)$ est évidemment nécessaire pour que f soit une isométrie.

Dans le cas particulier des bases orthonormées on a :

7.1.3. **Transitivité sur les bases orthonormées.** Soit (e_1, \dots, e_n) et (e'_1, \dots, e'_n) deux bases orthonormées et soit f l'unique endomorphisme de E qui vérifie $f(e_i) = e'_i$. Alors f est une isométrie.

Ce résultat a une conséquence importante : il permet d'orienter l'espace E .

7.2. Orientation.

7.2.1. **Proposition.** Soit Ω l'ensemble des bases orthonormées de E . Le groupe $O^+(E)$ n'est pas transitif sur Ω . Précisément, il admet deux orbites Ω_1 et Ω_2 qui sont échangées par les isométries négatives.

Démonstration.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée et Ω_1 son orbite sous $O^+(E)$. Soit σ une isométrie négative (par exemple une réflexion). Posons $\mathcal{B}' = \sigma(\mathcal{B}) = (\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n))$. Comme σ est l'unique isométrie qui envoie \mathcal{B} sur \mathcal{B}' , la base \mathcal{B}' n'est pas dans Ω_1 . Appelons Ω_2 l'orbite de \mathcal{B}' sous $O^+(E)$ et soit \mathcal{B}'' une base orthonormée quelconque. En vertu de 7.1.3 il y a une unique isométrie f qui envoie \mathcal{B} sur \mathcal{B}'' . Si f est positive, \mathcal{B}'' est dans Ω_1 , sinon $g = f\sigma^{-1}$ est positive et l'écriture $\mathcal{B}'' = f(\mathcal{B}) = g\sigma(\mathcal{B}) = g(\mathcal{B}')$ montre que \mathcal{B}'' est dans Ω_2 . \square

7.2.2. ♠. Montrez que les isométries négatives échangent les deux orbites.

7.2.3. **Orienter l'espace euclidien** E c'est choisir d'appeler **directes** les bases de l'une des deux orbites Ω_1 ou Ω_2 et indirectes les autres. Pour cela on choisit une base orthonormée particulière (e_1, \dots, e_n) , que l'on décrète directe. Si (e'_1, \dots, e'_n) est une autre base orthonormée, on dit que cette base est **directe** (resp. **indirecte**) si l'unique isométrie f qui envoie les e_i sur les e'_i est directe (resp. indirecte).

Un autre corollaire de 7.1.1 est le suivant :

7.3. Transitivité sur vecteurs et droites.

1) Le groupe $O(E)$ est transitif sur l'ensemble des vecteurs de norme 1.

2) Le groupe $O(E)$ est transitif sur l'ensemble des droites (resp. des demi-droites¹⁰) vectorielles de E .

¹⁰Rappelons que la demi-droite vectorielle définie par le vecteur non nul x est l'ensemble des λx avec $\lambda \geq 0$. On notera que l'étude de l'action de $O(E)$ sur les demi-droites se ramène aussitôt à celle de l'action sur les vecteurs unitaires. Dans la suite on utilisera plutôt ceux-ci, notamment dans les questions d'angles, mais au collège ce sont au contraire les demi-droites affines qui sont essentielles.

7.3.1. ♠. Prouvez ces assertions (cf. 6.3.1).

7.3.2. ♣. Étudiez la transitivité de $O(E)$ sur les vecteurs de norme fixée, sur les sous-espaces de dimension donnée.

8. ANGLES NON ORIENTÉS DE VECTEURS OU DE DEMI-DROITES

Nous abordons ici l'épineuse question des angles que nous retrouverons dans plusieurs paragraphes ultérieurs.

L'une des difficultés de la notion d'angle est qu'elle est multiforme. Il y a en effet de nombreuses notions voisines : secteurs angulaires, angles géométriques, angles orientés ou non orientés de vecteurs, de demi-droites ou de droites. Nous allons tenter d'en préciser au moins quelques-unes. Dans cette partie consacrée au vectoriel, nous parlons d'angles de vecteurs ou de droites vectorielles, mais la définition des objets affines analogues sera immédiate à partir de ce cas.

*Éclaircissons tout de suite un point de terminologie : quand nous parlons d'angle orienté de deux objets A et B le mot **orienté** signifie que l'ordre des éléments A et B est essentiel (l'angle (A, B) et l'angle (B, A) sont différents) mais cela n'a rien à voir avec une orientation éventuelle de A et B eux-mêmes.*

*Il faut retenir tout de suite que **les angles orientés n'ont de définition satisfaisante qu'en géométrie plane** (cf. 8.3.3).*

8.1. **Double transitivité et obstruction.** Dans la situation générale d'un groupe G qui opère sur un ensemble X , après la question de la transitivité se pose celle de la double transitivité¹¹ :

8.1.1. **Définition.** On dit que G agit doublement transitivement sur X si pour tous les couples (x, y) et (x', y') d'éléments de X il existe un élément g de G tel que $x' = g.x$ et $y' = g.y$.

8.1.2. ♠. L'action du groupe affine sur les points du plan est-elle transitive ? doublement transitive ? Mêmes questions pour le groupe des translations.

8.1.3. Lorsque l'action de G n'est pas doublement transitive ce que l'on cherche c'est un invariant, associé à chaque couple (x, y) , qui permette de mesurer le défaut de double transitivité. Si nous appelons, pour plagier Lebesgue¹², *taraboutzim* cet invariant, le résultat visé est alors le suivant :

Il existe $g \in G$ tel que $g.x = x'$ et $g.y = y'$ si et seulement si (x, y) et (x', y') ont même taraboutzim.

Toutes les notions d'angles que nous définirons vérifieront ce type de propriétés. D'ailleurs c'est essentiellement ainsi que l'on définit, au collège, les angles de demi-droites, en disant que deux couples de demi-droites forment le même angle si on peut les superposer en les déplaçant, voire en les retournant (c'est-à-dire si l'on peut passer de l'un à l'autre par déplacement ou anti-déplacement).

Dans ce qui suit nous avons choisi d'appeler angles des invariants **numériques** satisfaisant à la condition de *taraboutzim* ci-dessus pour un certain groupe G . En fait nos angles sont

¹¹Si G opère sur X , il est évident que G opère aussi sur $X \times X$. La double transitivité est la transitivité de l'opération de G sur $X \times X$.

¹²Dans son livre [Le] dont nous ne saurions trop recommander la lecture, Lebesgue, pour parler de l'aire du "cercle" sans prononcer le mot aire parle du *tarababoum* du cercle.

plutôt ce que d'autres appellent "mesure des angles". Nous reviendrons sur ce point plus tard.

On a vu (cf. 7.3) que le groupe $O(E)$ est transitif sur l'ensemble des vecteurs unitaires (i.e. de norme 1) ou, ce qui revient au même, sur l'ensemble des demi-droites de E . Il s'agit maintenant de savoir s'il est doublement transitif ou, à défaut, quelle est l'obstruction. La réponse est dans le résultat suivant :

8.1.4. Lemme. *Soient (x, y) et (x', y') deux couples de vecteurs unitaires de E . Il existe une isométrie f telle que $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$ si et seulement si on a l'égalité $(x|y) = (x'|y')$.*

Démonstration. D'abord si f existe elle conserve le produit scalaire, d'où la condition. Réciproquement, soit P (resp. P') le sous-espace engendré par x et y (resp. x' et y') et soit P^\perp (resp. P'^\perp) son orthogonal. Choisissons des bases orthonormées (e_1, \dots, e_r) (resp. (e'_1, \dots, e'_r)) de P^\perp (resp. P'^\perp)¹³. On considère l'application linéaire f définie¹⁴ par $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ et par $f(e_i) = e'_i$ pour $i = 1, \dots, r$. Comme les vecteurs x, x', y, y' sont unitaires, il résulte de 7.1.1 que f est une isométrie et on a gagné. \square

8.2. Définition des angles non orientés de vecteurs. Le lemme 8.1.4 fournit un *tarabout-zim* tout trouvé pour x et y unitaires : leur produit scalaire. On peut aussi utiliser la distance $d(x, y) = \|y - x\|$ car ces deux invariants sont liés par la formule $\|y - x\|^2 = 2 - 2(x|y)$. Cette distance a d'ailleurs l'avantage de constituer une mesure intuitive de l'écartement de x et y par la longueur de la "corde" qui les joint. En fait, l'un et l'autre de ces invariants présentent le même défaut qui est de ne pas être "additifs", cf. 8.4.3 ci-dessous, et on va leur en préférer un autre.

8.2.1. Rappel sur la fonction cosinus. Nous admettons dans ce texte l'existence de la fonction exponentielle et des fonctions cosinus et sinus (cette existence sera établie dans l'Annexe 2). Rappelons que la fonction cosinus définit une bijection décroissante de l'ensemble $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, la fonction réciproque étant notée Arccos . On peut donc proposer la définition suivante :

8.2.2. Définition. *Soient x et y des vecteurs unitaires de E . On appelle **angle non orienté** des vecteurs x et y et on note¹⁵ $\overline{x, y}$ le nombre réel θ de $[0, \pi]$ défini par la formule :*

$$\theta = \overline{x, y} = \text{Arccos}((x|y)).$$

8.2.3. Remarques.

- (1) Cette définition a un sens. En effet, comme x et y sont unitaires, il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $(x|y)$ est compris entre -1 et 1 , de sorte que son Arccos existe.
- (2) Avec cette définition l'angle est un nombre de $[0, \pi]$; c'est la longueur du petit arc de cercle \widehat{xy} (cf. V 2.2.1).
- (3) Montrez que la longueur $\|y - x\|$ de la corde $[x, y]$ vaut $2 \sin \frac{\theta}{2}$.

¹³Le lecteur vérifiera qu'on a toujours $r = r'$.

¹⁴Le lecteur vérifiera que f est bien définie même si x et y sont colinéaires.

¹⁵Cette notation est provisoire. Quand on travaillera dans l'espace affine, on notera simplement \widehat{bac} l'angle non orienté de vecteurs $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}$.

- (4) Cette définition s'étend au cas de deux vecteurs x et y non nuls : on pose $\overline{x,y} = \overline{x_0,y_0}$ où x_0 et y_0 sont les vecteurs unitaires associés :

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{y}{\|y\|}.$$

On a alors la formule :

$$(x|y) = \|x\| \|y\| \cos \overline{x,y}.$$

- (5) On déduit aussi de ce qui précède une définition de l'angle $\overline{D,\Delta}$ des deux demi-droites vectorielles D et Δ : c'est l'angle de leurs vecteurs unitaires (ou simplement de deux vecteurs non nuls de D et Δ).
- (6) Comme le produit scalaire est symétrique, on a $\overline{x,y} = \overline{y,x}$: on a bien affaire à des angles non orientés.
- (7) Signalons trois cas particuliers : si les vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens (resp. de sens contraires) leur angle est nul (resp. vaut π : angle plat). S'ils sont orthogonaux leur angle vaut $\pi/2$ (angle droit).

La proposition suivante, qui n'est autre que 8.1.4 à un Arccos près, montre qu'il s'agit bien d'angles au sens évoqué en 8.1 :

8.3. Isométries et angles non orientés.

8.3.1. Proposition.

1) Soient x, x', y, y' des vecteurs **unitaires** de E . On a $\overline{x,y} = \overline{x',y'}$ si et seulement si il existe une isométrie vectorielle g telle que $g(x) = x'$ et $g(y) = y'$.

2) Soient D, Δ, D', Δ' des demi-droites. On a $\overline{D,\Delta} = \overline{D',\Delta'}$ si et seulement si il existe une isométrie vectorielle g telle que $g(D) = D'$ et $g(\Delta) = \Delta'$.

8.3.2. ♠. Montrez le point 2) de la proposition.

8.3.3. ♠. *Echange de deux vecteurs unitaires*

Soient x et y deux vecteurs unitaires de E . Comme on a $\overline{x,y} = \overline{y,x}$, en vertu de 8.3.1 il existe une isométrie f qui échange x et y . Dans ce qui suit on précise les différents types de f possibles selon la dimension de E .

1) Montrez qu'il existe toujours une réflexion σ qui échange x et y (cf. 6.3.1).

Cela montre que, vis à vis de l'action de $O(E)$ tout entier, on ne peut distinguer les couples (x,y) et (y,x) et qu'il ne peut donc pas y avoir d'angles orientés pour l'action de $O(E)$.

2) On suppose que la dimension de E est supérieure ou égale à 3. Montrez qu'il existe une symétrie orthogonale **positive** qui échange x et y (on la construira comme produit de deux réflexions en utilisant 1).

Il n'y a donc pas non plus, en dimension ≥ 3 , d'angles orientés de vecteurs vis à vis de l'action de $O^+(E)$.

8.3.4. ♠. Soit x un vecteur unitaire et soit $\theta \in [0, \pi]$. Déterminez les vecteurs unitaires y tels que $\overline{x,y} = \theta$. Montrez notamment qu'en dimension 2 il y a deux vecteurs y convenables (sauf cas particulier).

8.4. Relation de Chasles géométrique. Dans ce paragraphe nous expliquons le choix de l'angle $\overline{x,y}$ par rapport aux autres choix possibles $(x|y)$ ou $\|y-x\|$. Donnons d'abord une définition :

8.4.1. **Définition.** Soient x, y, z trois vecteurs unitaires. On dit que y est **entre** x et z si l'on a $x = -z$ ou si y s'écrit sous la forme $\lambda x + \mu z$ avec $\lambda, \mu \geq 0$.

8.4.2. *Remarque.* Dans le cas où x et z ne sont pas opposés, cela signifie que y est dans l'enveloppe convexe des demi-droites engendrées par x et z (ou encore dans le secteur saillant limité par ces demi-droites, cf. V 2.1.1). C'est bien l'idée intuitive que l'on a du mot "entre" (un dessin s'impose !).

8.4.3. **Proposition.** Soient x, y, z des vecteurs unitaires avec y entre x et z . On a la **relation de Chasles géométrique** : $\overline{x, z} = \overline{x, y} + \overline{y, z}$.

Cette proposition sera prouvée de deux manières différentes ci-dessous, cf. V 2.2.4 et V 3.4.(2). (On peut aussi faire un calcul direct).

8.4.4. *Remarques.*

1) L'appellation "relation de Chasles géométrique" (qui n'est pas classique) fait ici référence au fait que la relation n'est pas vraie sans la condition de position (y entre x et z). Nous verrons dans la section suivante une relation de Chasles qui utilise les angles orientés et est valable sans restriction.

2) Le théorème suivant montre que l'angle que nous avons défini est, à un scalaire près, le seul qui soit un *taraboutzim* et vérifie la relation de Chasles géométrique :

8.4.5. **Théorème.** Soit S la sphère unité de E (ensemble des vecteurs unitaires) et soit $\alpha : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une application continue telle que :

1) α est invariante par $O(E)$, i.e., on a :

$$\forall g \in O(E), \quad \forall x, y \in S, \quad \alpha(g(x), g(y)) = \alpha(x, y),$$

2) α vérifie la relation de Chasles géométrique, i.e, on a :

$$\forall x, y, z \in S, \text{ avec } y \text{ entre } x \text{ et } z, \quad \alpha(x, z) = \alpha(x, y) + \alpha(y, z).$$

Alors il existe un réel strictement positif λ tel que :

$$\forall x, y \in S, \quad \alpha(x, y) = \lambda \overline{x, y}.$$

♡ Démontrer le théorème.

8.5. Une variante : les angles non orientés "abstrait".

Nous avons choisi ici, pour la commodité, de confondre l'angle et la "mesure" d'angle. Ce choix, qui est mathématiquement commode, est sans doute plus discutable au point de vue pédagogique. Nous donnons maintenant brièvement quelques indications sur l'autre approche possible des angles, disons de demi-droites (le traitement est identique pour les vecteurs). Mathématiquement, ces deux approches sont essentiellement équivalentes, (pourvu qu'on veuille bien utiliser la fonction cosinus). Le lecteur pourra consulter par exemple [D] ou [Au] pour des détails sur cette approche.

8.5.1. *Principe : les grandeurs.* Avant de parler d'angles, élargissons le débat. Ce qui est en cause est en fait la notion de grandeur. On a des objets (réels ou mathématiques) dont on sait mesurer une certaine caractéristique (la longueur, la masse, l'intensité, l'angle, etc.) Une telle mesure suppose donnée une unité et, une fois cette unité fixée, la mesure en question est un nombre. C'est ce que nous avons fait en fixant une norme euclidienne $\|\cdot\|$ (alors que $2\|\cdot\|$ aurait convenu aussi bien). Si du point de vue des mathématiciens cela ne pose pas de problème, il n'en va pas de même à l'école élémentaire et au collège où les changements d'unité sont essentiels. Il faut donc, à ce niveau, faire attention à ne pas confondre trois choses : l'objet (disons un segment), la mesure de sa longueur (avec une unité prescrite) et la longueur (indépendante de l'unité : 1 mètre c'est bien la même chose que 100 centimètres, même si 1 est différent de 100, non ?)

Comment formaliser cette notion de "grandeur" ? On a un ensemble E (les objets), une application $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (une mesure, l'unité étant choisie). Cette mesure induit une relation d'équivalence \mathcal{R} entre objets, la relation avoir même mesure : $x\mathcal{R}y \iff \mu(x) = \mu(y)$, et si on change d'unité, μ est multipliée par un scalaire, de sorte que cette relation d'équivalence n'est pas changée. Alors, la grandeur de x c'est simplement la classe d'équivalence de x , une caractéristique qui ne dépend pas du choix de l'unité. Si on note G l'ensemble quotient E/\mathcal{R} , et que l'on choisisse une unité, donc une mesure μ , celle-ci induit une bijection $\bar{\mu}$ de G sur l'image de μ . C'est cela qui permet au mathématicien d'identifier grandeur et mesure.

8.5.2. Voyons maintenant comment ce principe est mis en œuvre dans le cas des angles (il vaut aussi pour les longueurs, les aires, etc. cf. [PG]).

Soit \mathcal{D} l'ensemble des couples de demi-droites de E . Sur \mathcal{D} on considère la relation d'équivalence \mathcal{R}_0 définie ainsi :

$$(D, \Delta) \mathcal{R}_0 (D', \Delta') \iff \exists g \in O(E), \quad g(D) = D' \quad \text{et} \quad g(\Delta) = \Delta'.$$

C'est la relation d'équivalence naturelle pour trouver un *taraboutzim*.

On note $\widehat{\mathcal{D}}$ l'ensemble quotient $\mathcal{D}/\mathcal{R}_0$. La classe de (D, Δ) , notée $\widetilde{D, \Delta}$ est appelée, dans cette approche, angle abstrait¹⁶ non orienté des demi-droites D et Δ : deux couples de demi-droites font le même angle si l'on peut les "superposer" c'est-à-dire les transformer par isométrie.

Mais, en vertu de 8.3.1, si μ est l'application "mesure d'angle", de $\widehat{\mathcal{D}}$ dans $[0, \pi]$, qui à $(D, \Delta) \in \mathcal{D}$ associe $\widetilde{D, \Delta}$, la relation d'équivalence \mathcal{R} qui lui est associée est exactement \mathcal{R}_0 . Par conséquent l'angle $\widetilde{D, \Delta}$ que nous venons de définir n'est autre que la "grandeur" associée à la mesure d'angle $\widetilde{D, \Delta}$.

9. LES SIMILITUDES VECTORIELLES

Bien que le programme du CAPES ne fasse mention des similitudes qu'en dimension 2, nous donnons quelques indications sur leur définition dans le cas général.

9.1. **Définition.** On appelle **similitude** (sous-entendu ici : vectorielle) un élément $s \in GL(E)$ qui s'écrit comme composé d'une homothétie (vectorielle) h_λ de rapport $\lambda \neq 0$ et d'une isométrie (vectorielle) $f \in O(E) : s = h_\lambda f = f h_\lambda$.

9.1.1. *Remarques.*

1) La formule ci-dessus signifie qu'on a pour tout $x \in E$, $s(x) = \lambda f(x)$.

2) C'est parce que les homothéties commutent avec toutes les applications linéaires qu'on a automatiquement $f h_\lambda = h_\lambda f$.

¹⁶Nous disons ici "angle abstrait" (non orienté) pour éviter la confusion, mais ce n'est pas l'usage.

9.2. Rapport d'une similitude.

9.2.1. Comme la symétrie centrale $-\text{Id}_E$ (c'est-à-dire aussi l'homothétie de rapport -1) est une isométrie on peut toujours supposer, quitte à changer λ en $-\lambda$, que l'on a $\lambda > 0$. **Dans toute la suite** nous supposons toujours les similitudes écrites sous la forme $s = h_\lambda f$ avec $\lambda > 0$.

9.2.2. Sous cette hypothèse, l'écriture $s = h_\lambda f$ est unique. En effet, on a $\det s = \det h_\lambda \det f = \lambda^n \det f$, donc comme λ est > 0 on a $|\det s| = \lambda^n$ ce qui détermine λ et donc aussi $f = h_\lambda^{-1} s$.

9.2.3. **Définition.** Le rapport de la similitude¹⁷ s est l'unique nombre réel positif λ tel que s s'écrive $h_\lambda f$ où f est une isométrie.

9.3. **Groupe des similitudes.** Comme f et h_λ commutent il est clair que les similitudes de E forment un groupe. Ce groupe est noté $GO(E)$. L'application qui à une similitude associe son rapport est un homomorphisme de groupes de $GO(E)$ dans \mathbb{R}^{+*} .

Les similitudes de déterminant positif forment un sous-groupe de $GO(E)$, noté $GO^+(E)$. Elles sont appelées **similitudes directes**. Les similitudes de déterminant négatif sont appelées **indirectes**. Leur ensemble est noté $GO^-(E)$ (ce n'est pas un groupe : le produit de deux similitudes indirectes est une similitude directe). On notera que si $s = h_\lambda f$, avec $\lambda > 0$, s est directe si et seulement si f l'est.

9.4. **Propriétés.** La proposition suivante montre que les similitudes se comportent assez bien vis à vis des notions euclidiennes, normes, produit scalaire, angles :

9.4.1. **Proposition.** Soit $s = h_\lambda f$ une similitude (avec $\lambda > 0$).

1) On a, pour tous $x, y \in E$, la formule $(s(x)|s(y)) = \lambda^2(x|y)$.

2) La similitude s multiplie les normes par λ : on a, pour tout $x \in E$, $\|s(x)\| = \lambda\|x\|$. En particulier s conserve les rapports de longueurs.

3) La similitude s conserve l'orthogonalité et les angles non orientés.

9.4.2. ♠. Prouvez cette proposition.

On a aussitôt la caractérisation matricielle des similitudes :

9.5. **Proposition.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , soit $s \in GL(E)$ et soit S sa matrice dans la base \mathcal{B} . Alors, s est une similitude de rapport $\lambda > 0$ si et seulement si on a la relation ${}^t S S = \lambda^2 I$ où I est la matrice identité.

¹⁷On notera qu'avec cette définition, si s est une homothétie de rapport $\lambda < 0$, le rapport de s vue comme similitude n'est pas λ mais $-\lambda$! En fait, ainsi qu'il est dit dans les bons ouvrages (cf. [P3]), la bonne notion, celle qui met tout le monde d'accord, est celle de multiplicateur de la similitude : le coefficient par lequel le produit scalaire est multiplié, ici λ^2 .

Partie II. LE PLAN VECTORIEL EUCLIDIEN

Dans toute cette partie E est un plan vectoriel euclidien orienté.

1. ISOMÉTRIES VECTORIELLES DU PLAN

1.1. **Définition.** Les éléments de $O^+(E)$ sont appelés **rotations vectorielles** (ou simplement rotations tant qu'il n'y a pas de risque de confusion).

La proposition suivante résume l'essentiel des résultats propres à la dimension 2 :

1.2. Proposition.

1) Si f est une isométrie négative, f est une réflexion (i.e., ici, une symétrie orthogonale par rapport à une droite).

2) Si f est une rotation elle s'écrit sous la forme $f = \tau_1 \tau_2$ où les τ_i sont des réflexions, l'une d'elle pouvant être choisie arbitrairement.

3) Soient $\rho \in O^+(E)$ et $\tau \in O^-(E)$. On a $\tau \rho \tau^{-1} = \rho^{-1}$.

4) Le groupe $O^+(E)$ des rotations est **commutatif**, donc aussi le groupe $O^+(2, \mathbb{R})$ des matrices orthogonales directes.

4') Si ρ est une rotation elle a même matrice dans toutes les bases orthonormées directes de E .

5) Soit $\rho \in O^+(E)$. Si ρ laisse fixe un vecteur non nul, ρ est l'identité.

6) Soient x et y deux vecteurs unitaires de E . Il existe une unique rotation ρ telle que $\rho(x) = y$.

1.2.1. ♠. Démontrez cette proposition. Pour le point 1, on montrera que f a deux valeurs propres (réelles) distinctes, puis que f est une involution. Pour 4 on utilisera 2 et 3. Pour 5 on introduira un vecteur y orthogonal à x . Pour 6 on complétera x et y en des bases orthonormées.

1.2.2. *Remarque.* On notera que les points 1 et 2 de 1.2 précisent en dimension 2 le théorème I 6.3. On comparera aussi le point 6 avec I 6.3.1.

1.3. Matrices des isométries.

1.3.1. Proposition.

1) Soit ρ une isométrie positive. Il existe des réels a, b , vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, tels que la matrice de ρ , dans toute base orthonormée **directe**, soit égale à

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

2) Soit f une isométrie négative et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée. Il existe des réels a, b , vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, tels que la matrice de f dans \mathcal{B} soit égale à

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Si la base \mathcal{B} est bien choisie on peut supposer $a = 1$ et $b = 0$.

1.3.2. *Remarque.* On notera la différence entre les deux assertions précédentes. Dans le cas de la rotation la matrice ne dépend pas de la base, dans l'autre elle en dépend.

1.3.3. ♠. Prouvez cette proposition.

1.3.4. **Corollaire.** Soit E un plan vectoriel euclidien orienté. On note $\alpha_{\mathcal{B}}$ l'isomorphisme de $O^+(E)$ sur $O^+(2, \mathbb{R})$ qui à une isométrie associe sa matrice dans la base orthonormée directe \mathcal{B} de E (cf. I 5.3). L'isomorphisme $\alpha_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe \mathcal{B} ¹⁸; on le note α_E .

2. QUELQUES ISOMORPHISMES

Dans ce paragraphe nous allons décrire le groupe $O^+(E)$ de manière plus précise à l'aide des nombres complexes.

2.1. Le cas où E est le plan complexe.

Le corps des nombres complexes \mathbb{C} est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} . Le produit scalaire $(x_1 + iy_1 | x_2 + iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ fait de \mathbb{C} un plan vectoriel euclidien. Pour ce produit scalaire, la base $(1, i)$ est orthonormée et on oriente \mathbb{C} en décrétant que cette base est directe. La norme euclidienne d'un nombre complexe $z = a + ib$ n'est autre que son module : $\|z\| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On considère le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

On obtient alors un premier isomorphisme :

2.1.1. **Proposition.** Le groupe $O^+(\mathbb{C})$ des rotations du plan euclidien \mathbb{C} est isomorphe au groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module 1.

Démonstration. Nous allons construire un isomorphisme $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow O^+(\mathbb{C})$. Pour cela, on fait opérer le groupe \mathbb{U} sur \mathbb{C} comme suit. Soit $\lambda = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$. On définit alors une application $f_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant $f_\lambda(z) = \lambda z$. On note successivement les faits suivants :

1) f_λ est \mathbb{R} -linéaire. En effet, si on pose $z = x + iy$ on a $f_\lambda(z) = (a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$ expression qui est bien linéaire par rapport à (x, y) . On peut même préciser que la matrice de f_λ dans la base $(1, i)$ est

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

2) f_λ est une isométrie i.e., $f_\lambda \in O(\mathbb{C})$. En effet on a $|f_\lambda(z)| = |\lambda z| = |\lambda| |z| = |z|$ car λ est de module 1.

3) f_λ est une isométrie positive i.e., $f_\lambda \in O^+(\mathbb{C})$. En effet le déterminant de f_λ est égal à $a^2 + b^2 = 1$.

4) L'application $\varphi : \lambda \mapsto f_\lambda$ est un homomorphisme de groupes de \mathbb{U} dans $O^+(\mathbb{C})$. En effet on a :

$$f_{\lambda\mu}(z) = \lambda\mu z = \lambda(\mu z) = f_\lambda \circ f_\mu(z).$$

5) L'homomorphisme φ est injectif. Il suffit de montrer que son noyau, c'est-à-dire l'ensemble des λ tels que $f_\lambda = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ est réduit à l'élément neutre de \mathbb{U} c'est-à-dire 1. Or on a alors $f_\lambda(z) = \lambda z = z$ pour tout z et on conclut en prenant $z = 1$.

6) Enfin, φ est surjectif. Soit $f \in O^+(\mathbb{C})$ et posons $\lambda = f(1)$. On a $|\lambda| = |1| = 1$ puisque f est une isométrie, de sorte que λ est dans \mathbb{U} . Alors, on a $f = f_\lambda$. En effet, si on considère $\rho = f_\lambda^{-1} \circ f$, c'est une rotation qui fixe 1 donc c'est l'identité en vertu de 1.2.5. On peut aussi noter qu'on obtient toutes les matrices des rotations en vertu de 1.3. \square

¹⁸ Mais il dépend de l'orientation, cf. 2.3.3.3.

2.1.2. Remarques.

1) L'isomorphisme de $O^+(\mathbb{C})$ et de \mathbb{U} donne une nouvelle preuve de la commutativité de $O^+(\mathbb{C})$.

2) On peut définir f_λ pour tout complexe λ non nul. On obtient ainsi toutes les similitudes vectorielles directes du plan (cf. V 4.2.2).

2.2. L'exponentielle. On rappelle (cf. Annexe 1) que le groupe \mathbb{U} peut être décrit à l'aide de l'exponentielle complexe : l'application ε de \mathbb{R} dans \mathbb{U} définie par $\varepsilon(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif (\mathbb{U}, \times) : ceci traduit simplement la formule bien connue

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est le groupe $2\pi\mathbb{Z}$ des multiples entiers de 2π . On a donc en vertu du théorème d'isomorphisme un isomorphisme $\bar{\varepsilon} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}$ qui à la classe $\bar{\theta}$ modulo 2π du réel θ associe $e^{i\theta}$.

2.3. Le cas général.

Dans ce paragraphe, le plan euclidien E est orienté.

2.3.1. Théorème. On a des isomorphismes :

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \mathbb{U} \xrightarrow{\varphi} O^+(\mathbb{C}) \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{C}}} O^+(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\alpha_E^{-1}} O^+(E).$$

Démonstration. Le théorème a déjà été démontré, cf. 2.2, 2.1.1 et 1.3.4. Rappelons que les isomorphismes sont donnés successivement par $\bar{\varepsilon}(\bar{\theta}) = \lambda = e^{i\theta}$, $\varphi(\lambda) = f_\lambda$ et $\alpha_{\mathbb{C}}(f_\lambda) = A_\lambda$ et que α_E est l'isomorphisme qui à une isométrie de E associe sa matrice dans une base orthonormée directe. \square

Le fait que la matrice d'une rotation ne dépende pas de la base orthonormée directe permet de donner la définition suivante :

2.3.2. Angles et rotations : définition.

1) Le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est appelé **groupe des angles orientés**.¹⁹ Si $\lambda = e^{i\theta}$ est un complexe de module 1 le réel modulo 2π , $\bar{\theta}$, est appelé son **argument** et θ en est une **mesure**²⁰ (définie seulement à 2π près).

2) Soit $\bar{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ un angle orienté. On appelle **rotation d'angle $\bar{\theta}$** (ou même θ par abus de langage, θ étant alors défini à 2π près) et on note $\rho(\bar{\theta})$ (ou $\rho(\theta)$) la rotation de E dont la matrice dans toute base orthonormée directe est :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

¹⁹L'appellation d'angle pour un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est discutable. C'est encore notre choix de privilégier des invariants numériques.

²⁰Ce mot de mesure est à peu près le plus mauvais possible dans cette situation, mais il est traditionnel.

2.3.3. Remarques.

1) Comme $\bar{\varepsilon}$, φ , $\alpha_{\mathbb{C}}$ et α_E sont bijectifs, on voit que toute rotation vectorielle a un angle, i.e. est de la forme $\rho(\theta)$.

2) Comme ε et φ sont des homomorphismes, la composée des rotations d'angles θ et θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$ et l'inverse de la rotation d'angle θ est la rotation d'angle $-\theta$.

3) Si on change l'orientation de E il résulte de (3) dans 1.2 que l'angle de la rotation ρ est changé en son opposé.

4) L'isomorphisme $\psi = \alpha_{\mathbb{C}}^{-1} \circ \alpha_E$ de $O^+(E)$ sur $O^+(\mathbb{C})$ peut se voir directement. On choisit une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E et on considère l'isométrie f de E sur \mathbb{C} obtenue en envoyant \mathcal{B} sur la base $(1, i)$. Alors l'isomorphisme cherché est donné par $\psi(g) = fgf^{-1}$ (et il est indépendant de \mathcal{B}). Cet isomorphisme transforme la rotation d'angle θ en la multiplication par $e^{i\theta}$ dans \mathbb{C} .

2.3.4. Proposition. Soit ρ la rotation d'angle $\bar{\theta}$, \mathcal{B} une base orthonormée directe, x un vecteur unitaire et $y = \rho(x)$. On a les formules $(x|y) = \cos \theta$ et $\det(x, y)_{\mathcal{B}} = \sin \theta$.

Démonstration. On peut compléter x en une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (x, x')$. On a alors, vu la forme de la matrice de ρ , $y = \rho(x) = \cos \theta x + \sin \theta x'$, d'où $\det_{\mathcal{B}'}(x, y) = \sin \theta$. Par changement de base on en déduit $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = \det P \det_{\mathcal{B}'}(x, y)$ où P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Comme cette matrice est orthogonale directe, donc de déterminant 1, on a bien le résultat.

On peut faire un calcul direct dans la base \mathcal{B} . □

3. ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS DANS LE PLAN

Dans tout ce qui suit, E désigne un plan vectoriel euclidien orienté²¹.

Nous poursuivons ici notre approche des angles de vecteurs, déjà entamée ci-dessus avec l'étude des angles non orientés. La première différence avec le cas précédent est que nous prenons en compte ici l'ordre des deux vecteurs. Cela nous impose de nous limiter à faire agir le groupe des rotations au lieu du groupe des isométries tout entier, (cf. I 8.3.3). La seconde différence est la nature des angles orientés qui sont des éléments d'un groupe, ce qui permet d'obtenir de nouveaux types de résultats (règle du parallélogramme, relation de Chasles générale, etc.)

3.1. Définition. Soient $x, y \in E$ des vecteurs unitaires. En vertu de 1.2.(6), il existe une unique rotation $\rho = \rho(\theta)$ telle que $\rho(x) = y$. L'angle θ de cette rotation est, par définition, **l'angle orienté des deux vecteurs x, y , pris dans cet ordre**. On le note $\widehat{x, y}$. C'est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

3.2. Remarques.

3.2.1. Si on change l'orientation de E l'angle $\widehat{x, y}$ est changé en son opposé.

²¹On peut se passer de l'orientation pour une bonne partie de la théorie, mais cela ne coûte pas cher d'en choisir une. Le lecteur pointilleux examinera lui-même cette question. En revanche, le fait d'être dans le plan est essentiel.

3.2.2. Cette définition s'étend immédiatement au cas de deux vecteurs x et y non nuls : on pose $\widehat{x, y} = \widehat{x_0, y_0}$ où x_0 et y_0 sont les vecteurs unitaires associés :

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|}, \quad y_0 = \frac{y}{\|y\|}.$$

3.2.3. On déduit aussi de ce qui précède une définition de l'angle orienté de deux demi-droites vectorielles D, Δ , c'est l'angle orienté de leurs vecteurs unitaires (ou simplement de deux vecteurs non nuls de D et Δ , pris dans cet ordre).

3.2.4. Étant donné un vecteur x et un angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ il existe un et un seul vecteur unitaire y tel que $\widehat{x, y} = \theta$ (on comparera avec I 8.3.4).

3.3. Commentaires.

3.3.1. Il est important de noter que les angles orientés de vecteurs, comme les angles des rotations, sont des nombres réels $\bar{\theta}$ ²² modulo 2π et qu'ils forment un **groupe** additif : on peut parler des angles $\theta + \theta'$ ou $-\theta$. Comme le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 par l'exponentielle : $\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, un angle orienté de vecteurs est déterminé par son sinus et son cosinus (tandis que le cosinus suffit pour les angles non orientés).

3.3.2. Ce choix de définir l'angle comme un nombre réel modulo 2π n'est pas innocent. Il a l'avantage de la simplicité, mais, comme dans le cas des angles non orientés, on peut préférer dire qu'un angle est un couple de vecteurs modulo une certaine relation d'équivalence. Nous verrons le lien avec cette vision des choses plus loin.

La proposition suivante résume l'essentiel des propriétés des angles orientés de vecteurs. En particulier, le point 2 montre que l'angle est bien un *taraboutzim*.

3.4. Propriétés des angles orientés.

3.4.1. Proposition.

1) Les rotations conservent les angles orientés, les réflexions les changent en leurs opposés. Plus précisément, soit $g \in O^+(E)$ (resp. $\tau \in O^-(E)$) et soient $x, y \in E$ des vecteurs non nuls, on a les formules :

$$g(\widehat{x}), g(\widehat{y}) = \widehat{x, y} \quad \tau(\widehat{x}), \tau(\widehat{y}) = -\widehat{x, y}.$$

2) Réciproquement, si x, x', y, y' sont des vecteurs unitaires de E et si on a $\widehat{x, y} = \widehat{x', y'}$ (resp. $\widehat{x, y} = \widehat{y', x'}$) il existe une unique rotation vectorielle $g \in O^+(E)$ (resp. une unique réflexion g) telle que $g(x) = x'$ et $g(y) = y'$.

3) On a la relation de Chasles :

$$\forall x, y, z \neq 0, \quad \widehat{x, z} = \widehat{x, y} + \widehat{y, z}.$$

4) On a la relation "du parallélogramme" :

$$\forall x, x', y, y' \neq 0, \quad \widehat{x, y} = \widehat{x', y'} \iff \widehat{x, x'} = \widehat{y, y'}.$$

5) On a les formules suivantes :

$$\widehat{x, -x} = \pi, \quad \widehat{x, -y} = \widehat{x, y} + \pi, \quad \widehat{y, x} = -(\widehat{x, y}), \quad \widehat{-x, -y} = \widehat{x, y}.$$

²²Par paresse on omettra souvent de mettre la barre au dessus de θ .

3.4.2. ♠. Démontrez la proposition. (On notera qu'en vertu de 3.2.2. on peut supposer les vecteurs unitaires et on utilisera 1.2.)

3.4.3. *Remarques.*

1) La troisième formule du point 5 de la proposition 3.4.1 montre qu'on a bien des angles orientés au sens annoncé : l'ordre entre x et y est important.

2) Par rapport au cas des angles non orientés, on notera que la relation de Chasles est ici valable sans restriction.

3) Le lecteur n'aura pas manqué de noter la similitude entre la théorie des angles orientés et celle des vecteurs (formule du parallélogramme, relation de Chasles,...) Cela n'est pas un hasard, ces deux théories sont deux aspects d'une même situation mathématique. Dans les deux cas on a un groupe **abélien** (le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ou le groupe $O^+(E)$ qui lui est isomorphe ici, le groupe $T(E)$ dans le cas des vecteurs) qui opère simplement transitivement sur un ensemble (l'ensemble des vecteurs unitaires ici, l'espace affine E dans le cas des vecteurs). Cela signifie qu'étant donnés deux objets A, A' de l'ensemble il existe un et un seul élément g du groupe qui fait passer de l'un à l'autre i.e., qui vérifie $g(A) = A'$. En revanche, ces groupes ne sont pas doublement²³ transitifs : si on se donne deux couples (A, B) et (A', B') , il n'existe pas en général de g qui réalise à la fois $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$, il y a une obstruction : ici, g existe dans $O^+(E)$ si les angles $\widehat{A, B}$ et $\widehat{A', B'}$ sont égaux, dans le cas de l'espace affine, g existe dans $T(E)$ si les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ sont égaux. À cette différence de notation près les situations sont absolument identiques et on peut prouver la proposition 3.4.1 dans ce cadre général en appelant angle (ou *taraboutzim*) un invariant qui mesure le défaut de double transitivité de l'opération d'un groupe abélien. Un tel invariant (tautologique) est défini par $\alpha(A, B) = g$ où g est l'unique élément de G qui vérifie $g(A) = B$.

Comme dans le cas des angles non-orientés nous donnons quelques indications sur une autre approche possible des angles orientés de vecteurs.

3.5. Angles orientés abstraits.

3.5.1. **Proposition.** Notons \mathcal{A} l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E . Pour deux éléments (x, y) et (x', y') de \mathcal{A} , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) l'unique rotation qui envoie x sur y est la même que celle qui envoie x' sur y' ,
- ii) l'unique rotation qui envoie x sur x' est la même que celle qui envoie y sur y' .

La relation définie par i) ou ii) est une relation d'équivalence \mathcal{R} sur \mathcal{A} .

Démonstration. C'est exactement celle de la règle du parallélogramme de 3.4.1. □

3.5.2. ♠. 1) On note $\widehat{\mathcal{A}}$ l'ensemble quotient \mathcal{A}/\mathcal{R} et $\widetilde{x, y}$ la classe de (x, y) (l'angle abstrait de vecteurs). Montrez que l'application Φ qui associe à $(x, y) \in \mathcal{A}$ associe l'unique rotation ρ qui envoie x sur y induit une bijection $\overline{\Phi}$ de $\widehat{\mathcal{A}}$ sur $O^+(E)$.

2) Montrez qu'on peut définir une addition sur $\widehat{\mathcal{A}}$ en transportant la structure de groupe de $O^+(E)$ de sorte qu'on ait la formule :

$$\overline{\Phi}(\widetilde{x, y} + \widetilde{x', y'}) = \overline{\Phi}(\widetilde{x, y}) \circ \overline{\Phi}(\widetilde{x', y'}).$$

²³Attention, les mots "doublement" et "simplement" n'ont aucun rapport.

Montrez que les angles abstraits de vecteurs ainsi définis vérifient toutes les propriétés vues ci-dessus en 3.4.1.

4. ANGLES ORIENTÉS DE DROITES

Nous allons définir l'angle de deux droites D et D' de manière analogue à celui de deux vecteurs et pour cela, chercher les rotations qui transforment D en D' . Si x (resp. x') est un vecteur unitaire de D (resp. D'), une rotation ρ envoie D sur D' si et seulement si on a $\rho(x) = x'$ ou $\rho(x) = -x'$. Il y a donc deux rotations d'angles $\widehat{x, x'}$ et $\widehat{x, x'} + \pi$ qui envoient D sur D' . Comme on ne s'intéresse qu'aux droites on va définir l'angle de D et D' en **identifiant** ces deux angles de vecteurs, donc en travaillant modulo π , précisément :

4.1. Définition. Soient D, D' deux droites vectorielles, x, x' des vecteurs unitaires de D et D' respectivement. **L'angle orienté des deux droites D, D'** (dans cet ordre) est la classe modulo π de l'angle $\widehat{x, x'}$. Cet angle est un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Il est indépendant du choix des vecteurs unitaires, on le note $\widehat{D, D'}$.

La proposition suivante regroupe la plupart des propriétés des angles de droites (on notera que le point 2 assure que l'angle est bien un *taraboutzim*) :

4.2. Proposition. Soient $D, D', D'', \Delta, \Delta'$ des droites vectorielles.

1) Soit $\rho \in O^+(E)$ (resp. $\tau \in O^-(E)$). On a les formules :

$$\rho(\widehat{D, D'}) = \widehat{D, D'}, \quad \tau(\widehat{D, D'}) = -\widehat{D, D'}.$$

2) Réciproquement, si $\widehat{D, D'} = \widehat{\Delta, \Delta'}$ il y a **deux** rotations qui vérifient $\rho(D) = \Delta$ et $\rho(D') = \Delta'$: ρ d'angle θ et $-\rho$ d'angle $\theta + \pi$.

3) On a la relation de Chasles : $\widehat{D, D''} = \widehat{D, D'} + \widehat{D', D''}$.

4) On a la règle du parallélogramme :

$$\widehat{D, D'} = \widehat{\Delta, \Delta'} \iff \widehat{D, \Delta} = \widehat{D', \Delta'}.$$

5) On a $\widehat{D, D'} = -\widehat{D', D}$.

4.2.1. ♠. Prouvez la proposition.

4.2.2. *Remarque.* On notera l'analogie entre 3.4.1 et 4.2 et la disparition dans 4.2 (5) des formules faisant intervenir π . Le seul point différent entre les deux propositions est l'existence de deux rotations passant de D à D' . Cela est dû au fait que $-\text{Id}_E$ conserve globalement toutes les droites vectorielles.

4.2.3. ♠. Comme dans le cas des vecteurs, cf. 3.2.4, si on se donne D et $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, il existe une unique droite D' telle que $\widehat{D, D'} = \theta$.

Les angles de droites permettent de préciser l'angle de la rotation produit de deux symétries :

4.3. Proposition. Soient D, D' deux droites vectorielles, τ_D et $\tau_{D'}$ les symétries par rapport à ces droites. Alors on a :

$$\tau_{D'}\tau_D = \rho(2\widehat{D, D'}).$$

Démonstration. On choisit des vecteurs unitaires x et x' de D et D' . On a $\tau_{D'}\tau_D(x) = \tau_{D'}(x) = y$ et il s'agit de calculer $\widehat{x, y}$. On a, en utilisant 3.4.1.(4), 3.4.1.(1) et 3.4.1.(5) :

$$\widehat{x, y} = \widehat{x, x'} + \widehat{x', y} = \widehat{x, x'} + \tau_{D'}(\widehat{x', x}) = \widehat{x, x'} - \widehat{x', x} = 2\widehat{x, x'}.$$

Mais comme $\widehat{x, x'} = \widehat{D, D'}$ modulo π , on a le résultat. \square

4.3.1. *Remarque.* La formule de 4.3 mérite quelques explications. Tout d'abord, si a est un élément d'un groupe abélien A quelconque, $2a$ a un sens : c'est l'élément $a + a$ de A . Attention, ici l'angle des droites $\widehat{D, D'}$ est un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ (donc aussi $2\widehat{D, D'}$) alors que l'angle d'une rotation est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Cependant, la formule a bien un sens car l'angle de droites $\bar{\theta} = \widehat{D, D'}$ est issu de deux angles de vecteurs, θ et $\theta + \pi$, dont les doubles coïncident modulo 2π .

Le principal intérêt des angles orientés de droites réside dans le critère de cocyclicité ou d'alignement que nous verrons en V 3.3.4 et qui est à la base d'innombrables applications géométriques.

4.4. Comparaison des trois sortes d'angles.

Si x et y sont deux vecteurs unitaires du plan, on a donc maintenant défini deux notions d'angle : l'angle orienté $\widehat{x, y}$ qui est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et l'angle non orienté $\bar{x, y}$ qui est dans $[0, \pi]$. Nous précisons ici le rapport entre ces deux notions d'angle.

4.4.1. **Proposition.** Soient x, y deux vecteurs unitaires du plan et posons $\widehat{x, y} = \bar{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, avec $\theta \in]-\pi, \pi]$. Alors l'angle non orienté $\bar{x, y}$ est égal à $|\theta|$.

Démonstration. Par définition de l'angle orienté, on passe de x à y par la rotation d'angle $\bar{\theta}$. On a donc, en vertu de 2.3.4, $(x|y) = \cos \theta$, d'où le résultat par définition de l'angle non orienté et la parité de la fonction cosinus. \square

4.4.2. *Remarque.* Les angles $\widehat{x, y}$ et $\widehat{y, x}$, égaux à θ et $-\theta$ donnent donc le même angle non orienté $\bar{x, y} = |\theta|$: comme annoncé, l'angle orienté dépend de l'ordre des vecteurs. L'angle non orienté est l'invariant le plus immédiat et le plus commode au collège. Bien entendu, quand on travaille avec les angles non orientés, on perd une bonne partie de ce qui relève de la structure de groupe de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (la règle du parallélogramme, la relation de Chasles générale, etc) et la conséquence pratique de cela est qu'on doit souvent distinguer plusieurs cas de figures.

Résumons les liens entre les trois sortes d'angles avec la règle suivante :

4.4.3. **Une règle.** Si on a deux vecteurs x et y non nuls, leur angle orienté est un réel modulo 2π : $\widehat{x, y} = \theta$. L'angle orienté des droites vectorielles définies par x et y s'obtient en prenant $\bar{\theta}$ modulo π . L'angle non orienté des vecteurs x et y s'obtient en choisissant le représentant θ de $\bar{\theta}$ dans $]-\pi, \pi]$ et en prenant sa valeur absolue : $\bar{x, y} = |\theta|$. On notera qu'il y a deux sortes d'angles droits pour les angles orientés de vecteurs ($\pm\pi/2$), mais une seule pour les deux autres types et que l'angle plat est égal à l'angle nul pour les angles de droites.

5. SIMILITUDES

5.1. Les similitudes directes.

5.1.1. Proposition-définition. Le groupe $GO^+(E)$ des similitudes directes est commutatif. Toute similitude directe s'écrit de manière unique sous la forme $s = h_\lambda \rho(\theta)$ avec $\lambda > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Le nombre λ est le **rapport** de s et θ est son **angle**. On note $s(\lambda, \theta)$ la similitude de rapport λ et d'angle θ .

On a la formule

$$s(\lambda, \theta)s(\lambda', \theta') = s(\lambda\lambda', \theta + \theta').$$

La matrice de $s(\lambda, \theta)$ dans toute base orthonormée directe est la suivante :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda \cos \theta & -\lambda \sin \theta \\ \lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Cela résulte de 1.2 et 2.3.2. □

5.1.2. Remarque. Attention, avec cette définition, une homothétie de rapport $\lambda < 0$, considérée comme une similitude, est de rapport $|\lambda|$ et d'angle π . Le contexte indiquera toujours le sens du mot rapport.

5.1.3. Proposition. Les similitudes directes conservent les angles orientés.

Démonstration. En effet, c'est vrai à la fois pour les homothéties et pour les isométries directes. □

5.1.4. Proposition. L'application $s(\lambda, \theta) \mapsto \lambda e^{i\theta}$ est un isomorphisme de groupes de $GO^+(E)$ sur le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* des nombres complexes non nuls.

5.1.5. ♠. En vous inspirant de la preuve de 2.1.1, montrez cette proposition qui est à la base de l'utilisation des nombres complexes en matière de similitudes.

5.2. Les similitudes indirectes. La proposition suivante résume leurs principales propriétés :

5.2.1. Proposition.

1) Toute similitude indirecte de E s'écrit de manière unique $s = h_\lambda \sigma_D$ où λ est un réel > 0 et σ_D une symétrie par rapport à une droite. En particulier, une similitude indirecte admet deux droites stables : D et D^\perp et si l'on choisit une base orthonormée portée par ces droites la matrice de s est

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

2) La matrice d'une similitude indirecte de rapport λ dans une base orthonormée quelconque est de la forme $U = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = \lambda^2$.

3) Une similitude indirecte change les angles orientés en leurs opposés.

4) Pour $t \in GO^-(E)$ et $s \in GO^+(E)$, $s = s(\lambda, \theta)$, on a : $ts(\lambda, \theta)t^{-1} = s(\lambda, -\theta)$.

5.2.2. ♠. Prouvez cette proposition.

5.2.3. ♣. Montrez que toute similitude indirecte du plan complexe est de la forme $z \mapsto \alpha \bar{z}$ pour un complexe α non nul donné. Quand cette similitude est-elle une isométrie ?

Partie III. ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

L'étude des espaces affines euclidiens est l'objet principal du programme de géométrie du CAPES. Elle fournit en effet un cadre théorique pour la géométrie euclidienne élémentaire, celle qui est enseignée dans les collèges et lycées (en réalité, ce cadre est inexploitable tel quel dans les classes de lycées et a fortiori de collège, mais ceci est une autre histoire). Ce chapitre est central mais une bonne partie du travail a déjà été faite, soit dans le polycopié sur les espaces affines, soit dans le chapitre sur les espaces vectoriels euclidiens. Il s'agit essentiellement ici de mettre ensemble ces deux approches.

1. DÉFINITIONS

1.1. Définition. Soit E un espace affine réel de dimension n , \vec{E} l'espace vectoriel associé. On dit que E est un **espace affine euclidien** si \vec{E} est un espace vectoriel euclidien, i.e. si l'on s'est donné un produit scalaire sur \vec{E} .

1.1.1. Exemple. Si on munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure affine canonique et du produit scalaire défini par $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, on obtient un espace affine euclidien que l'on peut appeler **espace affine euclidien canonique de dimension n** . On verra, en utilisant les repères orthonormés que tous les espaces affines euclidiens sont en fait isomorphes à celui-là.

1.1.2. Remarque. Si F est un sous-espace affine de E euclidien, la restriction à \vec{F} du produit scalaire munit canoniquement F d'une structure d'espace affine euclidien.

Comme d'habitude, en prenant une origine o dans E on se retrouve dans l'espace vectoriel euclidien \vec{E} . Par ailleurs, la donnée d'une structure euclidienne sur \vec{E} a de multiples conséquences sur E . Elle permet notamment de définir quatre notions fondamentales : la distance, les angles, l'orthogonalité, les repères orthonormés.

À partir de maintenant, E désigne un espace affine euclidien fixé, de dimension n et $(\vec{x}|\vec{y})$ le produit scalaire des vecteurs \vec{x} et \vec{y} de \vec{E} .

1.2. Distance.

1.2.1. Définition. On définit une distance d sur E par la formule : $d(a, b) = \|\vec{ab}\|$. On notera simplement $d(a, b) = ab$.

1.2.2. ♠. Vérifiez que l'application d définie ci-dessus est bien une distance.

1.2.3. ♠. Soit abc un triangle (i.e., trois points non alignés de E). Montrez la formule (Al-Kashi première version) :

$$bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2(\vec{ab}|\vec{ac}).$$

Quel résultat retrouve-t-on lorsque le triangle est rectangle en a (i.e. si le produit scalaire $(\vec{ab}|\vec{ac})$ est nul ?) Réciproque ?

1.2.4. ♣. Soit $abcd$ un parallélogramme. Montrez la formule :

$$ac^2 - bd^2 = 4(\vec{ab} | \vec{bc}).$$

La donnée d'une distance permet de munir E d'une **topologie** : on peut parler de boules, de voisinages, de suites convergentes, de fonctions continues, etc... Nous précisons ci-dessous les notions de boules et de sphères.

1.3. **Boules et sphères.** Soient o un point de E et r un réel positif ou nul. La **sphère** (resp. la **boule fermée**) de centre o et de rayon r est l'ensemble

$$S(o, r) = \{m \in E \mid om = r\}, \quad (\text{resp. } B(o, r) = \{m \in E \mid om \leq r\}).$$

Si E est de dimension 2, on parle de **cercle** et de **disque fermé** plutôt que de sphère et de boule fermée.

1.3.1. ♠. Décrire les sphères et boules dans le cas de la dimension 1.

1.3.2. ♠. Dans l'espace affine euclidien canonique \mathbb{R}^n montrez que l'équation de la sphère de centre $a = (a_1, \dots, a_n)$ et de rayon r est

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + a_1^2 + \dots + a_n^2 - r^2 = 0.$$

Montrer, réciproquement, que l'ensemble des points $x = (x_1, \dots, x_n)$ vérifiant une équation de la forme :

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + c = 0$$

est, selon des cas que l'on précisera, une sphère (dont on précisera centre et rayon, éventuellement nul) ou l'ensemble vide.

1.3.3. ♠. Dans le plan affine euclidien canonique \mathbb{R}^2 , montrez que le cercle de centre $a = (a_1, a_2)$ et de rayon r admet la représentation paramétrique :

$$x_1 = a_1 + r \cos t, \quad x_2 = a_2 + r \sin t \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi[\text{ ou pour } t \in]-\pi, +\pi].$$

1.3.4. ♠. Montrez qu'un sous-espace affine, une sphère, une boule fermée sont des fermés (et même des compacts !) pour la topologie définie par la distance d .

1.3.5. ♣. Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire habituel, on considère aussi le produit scalaire $(|)_1$ dont la forme quadratique associée est définie par $q_1(x, y) = ax^2 + by^2$ (où a et b sont deux réels vérifiant $0 < a \leq b$). Pour deux points m, n de \mathbb{R}^2 on pose $d_1(m, n) = \sqrt{q_1(\vec{mn})}$.

1) Dessinez la sphère de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 relative à d_1 .

2) On note $(\vec{u} | \vec{v})$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2 et $q(\vec{u})$ la forme quadratique associée. Montrez qu'on a, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$:

$$aq(\vec{u}) \leq q_1(\vec{u}) \leq bq(\vec{u}).$$

Montrez que d_1 et la distance euclidienne canonique définissent la même topologie.

1.3.6. ♡. **Généralisation du précédent**

Soit E un espace affine. Supposons \vec{E} muni de **deux** produits scalaires $(|)_1$ et $(|)_2$. Montrez directement ²⁴ que les deux normes euclidiennes associées sur \vec{E} sont équivalentes. En déduire que la topologie sur E est indépendante de la distance euclidienne choisie.

²⁴Sans utiliser le résultat général : Sur un espace vectoriel de dimension finie, les normes sont équivalentes.

1.4. Angles non orientés de demi-droites.

Nous définissons ici les angles non orientés en géométrie affine euclidienne, en toute dimension. En vérité, tout le travail, ou presque, a été accompli dans le chapitre vectoriel correspondant. Nous reviendrons sur les angles de manière plus approfondie dans le cadre de la dimension 2.

Les angles (orientés ou non) de vecteurs ont été définis dans la première partie. Ceci nous permet de définir les angles de demi-droites affines.

1.4.1. **Définition.** Soit a un point de E et \vec{v} un vecteur non nul. On appelle demi-droite affine d'origine a et de vecteur directeur \vec{v} l'ensemble des points de la forme $a + \lambda\vec{v}$ avec $\lambda \geq 0$. Si b est un tel point avec $\lambda > 0$, la demi-droite est notée $[ab)$. Les vecteurs directeurs de la demi-droite sont les vecteurs $\lambda\vec{v}$ avec $\lambda > 0$, ou encore les vecteurs \vec{ac} avec $c \in [ab)$, $c \neq a$.

1.4.2. **Définition.** Soient D, D' deux demi-droites affines de même origine et soient \vec{v} et \vec{v}' des vecteurs directeurs de D et D' . L'angle (non orienté) de D et D' est l'angle (non orienté) de \vec{v} et \vec{v}' .

1.4.3. *Notations.* En géométrie affine on a souvent affaire à des triangles et à leurs angles. Si on a un triangle abc on note \widehat{bac} l'angle non orienté de vecteurs \vec{ab}, \vec{ac} . On a donc $\widehat{bac} = \widehat{cab}$. C'est aussi l'angle non orienté des demi-droites $[ab)$ et $[ac)$.

2. ORTHOGONALITÉ

Nous précisons ici les notions de droites, plans, sous-espaces affines orthogonaux ou perpendiculaires.

2.1. **Définition.** Deux sous-espaces affines V et W de E sont dits **orthogonaux** si les sous-espaces vectoriels associés \vec{V} et \vec{W} sont orthogonaux au sens de I 3.1. Deux sous-espaces V et W orthogonaux sont dits **perpendiculaires**²⁵ si l'intersection $V \cap W$ est non vide.

2.2. Propriétés.

2.2.1. ♠. On suppose V et W orthogonaux. Montrez qu'on a $\dim V + \dim W \leq \dim E$. Montrez que $V \cap W$ est vide ou un singleton. On suppose $\dim V + \dim W = \dim E$. Montrez que $V \cap W$ est un singleton (cf. [GA] I 4.1.5).

2.2.2. ♠. Soit V un sous-espace affine de dimension p . Montrez que si W et W' sont deux sous-espaces affines de dimension $n - p$ perpendiculaires à V , ils sont parallèles.

2.2.3. ♠. Soit V un sous-espace affine de dimension p et a un point de E . Montrez qu'il existe un unique sous-espace affine de dimension $n - p$ passant par a et perpendiculaire à V .

2.2.4. ♠. Précisez, dans un parallélépipède rectangle, lesquelles parmi les droites portant les arêtes sont perpendiculaires et lesquelles sont seulement orthogonales.

2.2.5. ♠. On suppose V et W orthogonaux. Montrez que tout sous-espace affine V' de V est orthogonal à tout sous-espace affine W' de W . La même assertion vaut-elle en remplaçant orthogonal par perpendiculaire ?

²⁵Voir aussi 2.3.

2.3. Plans perpendiculaires dans l'espace. On a vu ci-dessus que la somme des dimensions de deux sous-espaces orthogonaux ne peut pas excéder la dimension totale de l'espace. Dans le cas de l'espace de dimension 3 on définit cependant la notion de plans perpendiculaires²⁶ :

2.3.1. Définition. Deux plans V et W d'un espace affine euclidien de dimension 3 sont dits **perpendiculaires** si chacun contient une droite perpendiculaire à l'autre.

2.3.2. ♠. Montrez que les plans V et W de l'espace de dimension 3 sont perpendiculaires si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

i) $\vec{W}^\perp \subset \vec{V}$,

ii) $\vec{V}^\perp \subset \vec{W}$,

iii) l'intersection de V et W est une droite D et les sous-espaces $\vec{D}^\perp \cap \vec{V}$ et $\vec{D}^\perp \cap \vec{W}$ sont orthogonaux,

iv) les droites \vec{V}^\perp et \vec{W}^\perp sont orthogonales.

2.4. ♣ Théorème des trois perpendiculaires. Dans l'espace euclidien de dimension 3, on considère un plan P , m un point extérieur à P et h son projeté orthogonal sur P . Soient D une droite de P ne passant pas par h et n un point de D . Montrer que (hn) est perpendiculaire à D si et seulement si (mn) est perpendiculaire à D . (La troisième perpendiculaire est la droite (mh) .) *Faites un dessin !*

3. REPÈRES ORTHONORMÉS

On renvoie à [GA] II 3.4 et 3.6 pour les notions de repère affine et de repère cartésien.

3.1. Définition. Soit E un espace affine euclidien de dimension n . Un repère cartésien $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E est dit **orthonormé** si la base $\vec{\mathcal{R}} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \vec{E} est orthonormée, (cf. I 4.2). Si de plus E est orienté (i.e. si \vec{E} est orienté), on parlera de repère orthonormé **direct** (resp. **indirect**) si $\vec{\mathcal{R}}$ est une base orthonormée directe (resp. indirecte).

Un repère affine (a_0, a_1, \dots, a_n) est dit orthonormé si le repère cartésien associé $(a_0; \vec{a_0a_1}, \dots, \vec{a_0a_n})$ l'est.

3.1.1. Exemple. Dans l'espace affine euclidien canonique \mathbb{R}^n le repère dont l'origine est $(0, \dots, 0)$ et dont la base est la base canonique est un repère orthonormé, que l'on dira canonique.

3.1.2. ♠. Attention, contrairement à ce qui se passe dans le cas des espaces affines où tous les points d'un repère affine jouent le même rôle, le fait qu'un repère soit orthonormé dépend fondamentalement du choix de l'origine. Illustrez cette remarque par un exemple.

3.2. Proposition. Soit E un espace affine euclidien de dimension n . Il existe des repères orthonormés dans E .

Démonstration. Cela résulte de l'existence des bases orthonormées pour \vec{E} , cf. I 4.4. □

²⁶Cette définition est dans tous les livres de géométrie élémentaire, mais elle présente quelques risques. En particulier, deux plans perpendiculaires en ce sens ne le sont pas au sens de 2.1 car leurs directions ne sont pas orthogonales. Si la tradition n'était pas aussi forte il serait plus prudent de parler de plans "faiblement perpendiculaires".

3.3. Produit scalaire et distance en coordonnées.

Proposition. Soit $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère orthonormé. Si les points a et b ont pour coordonnées (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) dans \mathcal{R} , on a :

$$(\vec{oa} | \vec{ob}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad \text{et} \quad ab = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}.$$

3.4. Corollaire. Soit E un espace affine euclidien de dimension n . Alors E est isomorphe à l'espace affine euclidien canonique \mathbb{R}^n . Précisément, si \mathcal{R} est un repère orthonormé de E l'application affine f de E dans \mathbb{R}^n obtenue en envoyant ce repère sur le repère orthonormé canonique est un isomorphisme d'espaces affines qui conserve distance et produit scalaire (c'est-à-dire une isométrie, cf. IV 1.1.1 rem. 3).

Démonstration. Que f soit un isomorphisme vient de [GA] IV 5.3.1. Qu'elle conserve le produit scalaire résulte des formules précédentes. \square

Ce corollaire signifie qu'il n'y a essentiellement qu'un seul espace affine euclidien de dimension n et que donc, quitte à prendre un repère orthonormé, on peut toujours calculer comme dans \mathbb{R}^n . Mais, attention, il n'y a pas qu'un seul isomorphisme, mais une infinité obtenue en composant l'un d'eux avec les isométries de E , cf. ci-dessous.

3.5. Changement de repère orthonormé : effet sur les coordonnées.

Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux repères orthonormés d'un espace affine E , d'origines ω et ω' . Pour un point $m \in E$ notons $X(m)$ et $X'(m)$ les vecteurs colonnes des coordonnées de m dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Alors on a $X(m) = PX'(m) + X(\omega')$, où P est la matrice de passage de $\vec{\mathcal{R}}$ à $\vec{\mathcal{R}'}$ ou encore, ce qui est plus utile : $X'(m) = {}^tP(X(m) - X(\omega)) = {}^tPX(m) + X'(\omega)$.

3.5.1. ♠. Vérifiez la formule précédente. Que dire de ${}^tP.P$? Ecrire les matrices P possibles lorsque E est de dimension 2.

4. PROJECTION ORTHOGONALE

4.1. Projeté orthogonal.

4.1.1. *Définition.* Soient V un sous-espace affine de dimension k , m un point de E et W le sous-espace affine de dimension $n - k$ passant par m et perpendiculaire à V , cf. 2.2.3. L'unique point d'intersection de V et W est appelé **projeté orthogonal de m sur V** . L'application qui à m associe son projeté orthogonal sur V est appelée **projection orthogonale de E sur V** et notée p_V^\perp ou simplement p_V .

4.1.2. ♠. Vérifiez que p_V^\perp n'est autre que la projection affine p_{V, \vec{V}^\perp} de E sur V , dans la direction de l'orthogonal \vec{V}^\perp (cf. [GA] IV 2.4.3).

4.1.3. **Caractérisations métriques du projeté orthogonal.** Soient V un sous-espace affine de E et m un point de E . Alors les propriétés suivantes d'un point a de V sont équivalentes :

- i) a est le projeté orthogonal de m sur V ;
- ii) pour tout b dans V on a $(\vec{ab} | \vec{am}) = 0$;
- iii) pour tout b dans V on a $ma \leq mb$;
- iv) pour tout b dans $V - \{a\}$ on a $ma < mb$.

4.1.4. ♠. Prouvez cette proposition.

4.1.5. **Définition.** Soit V un sous-espace affine de E et m un point de E . On appelle **distance de m à V** la distance de m au projeté orthogonal de m sur V . C'est la plus courte distance de m à un point de V .

4.2. Hauteurs d'un triangle.

4.2.1. **Définition.** Soit abc un triangle et soit a' le projeté orthogonal de a sur (bc) . La droite (aa') est la **hauteur** issue de a dans le triangle abc .

4.2.2. ♠. Montrez que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point h appelé **orthocentre** du triangle. On pourra prouver et utiliser la relation :

$$(*) \quad (\vec{mb} | \vec{ma} - \vec{mc}) + (\vec{mc} | \vec{mb} - \vec{ma}) + (\vec{ma} | \vec{mc} - \vec{mb}) = 0.$$

On constate que le résultat est la traduction géométrique d'une identité algébrique, ici (*). On peut montrer qu'il en est toujours ainsi pour toutes les propriétés géométriques usuelles (alignement, concours, orthogonalité, etc.), cf. [P1].

4.2.3. ♠. Démontrer le concours des hauteurs en utilisant le théorème de Céva (GA III.4.1.2).

On renvoie à V.1.5.3 pour une autre démonstration de ce concours et à V.2.3 pour les coordonnées barycentriques de l'orthocentre.

4.2.4. ♠. **Triangle isocèle.** Soit abc un triangle isocèle en a (i.e. vérifiant $ab = ac$). Montrez que le projeté orthogonal de a sur (bc) est le milieu m de $[bc]$. Autrement dit : dans un triangle isocèle en a , la médiane issue de a est aussi hauteur.

4.2.5. ♠. Soit abc un triangle isocèle en a .

1) Soit m un point de (bc) . Montrez qu'on a :

$$m \in]bc[\implies am < ab \quad \text{et} \quad m \notin [bc] \implies am > ab.$$

2) Montrez que si m' est un point du triangle distinct de b et c on a $am' < ab$.

4.3. ♣. **Projection orthogonale sur un convexe fermé.** Dans l'exercice suivant on généralise la notion de projection orthogonale au cas où l'image est un convexe fermé quelconque (cf. CAPES agricole 2000).

Soient E un espace affine et C une partie convexe de E .

4.3.1. **Preliminaire : identité de la médiane.** Soient a, b, c trois points de E et soit m le milieu de b et c . Montrez l'égalité

$$am^2 = \frac{1}{2}(ab^2 + ac^2) - \frac{1}{4}bc^2.$$

4.3.2. Soit $m \in E$. Montrez que l'ensemble

$$P(m) = \{p \in C \mid \forall q \in C, pm \leq qm\}$$

a au plus un élément (utilisez 4.3.1)).

4.3.3. Montrez que si on suppose de plus C fermée dans E alors $P(m)$ est non vide (on utilisera un argument de compacité ou de complétude). Que se passe-t-il si C est un segment ouvert ?

Ainsi pour toute partie convexe fermée C , on peut définir la projection orthogonale sur C comme l'application qui à $m \in E$ associe l'unique $p \in C$ réalisant le minimum de la distance mp ; on la notera π_C^\perp .

4.3.4. Vérifiez qu'un sous-espace affine F de E est un convexe fermé et que l'on a $p_F^\perp = \pi_F^\perp$.

4.3.5. On revient au cas d'un convexe C quelconque de l'espace affine E . Soit m un point de E . Montrez que $p \in C$ réalise le minimum de la distance mq , $q \in C$, si et seulement si on a, pour tout $q \in C$, $(\overrightarrow{pm} | \overrightarrow{pq}) \leq 0$.

4.3.6. Montrer que pour tous m et m' de E , on a : $\pi_C^\perp(m)\pi_C^\perp(m') \leq mm'$.

4.3.7. *Remarque.* Pour une partie F non vide, on peut définir la distance d'un point m à F comme $\inf\{qm, q \in F\}$. Mais l'ensemble $P(m)$ peut être vide ou contenir plusieurs points. Donnez des exemples.

4.4. **Hyperplan médiateur.** Soient a et b deux points distincts de E . Alors l'ensemble des points m équidistants de a et b (i.e. vérifiant $am = mb$) est l'hyperplan affine perpendiculaire à (ab) passant par le milieu de a et b . Si $\dim(E) = 2$ on parle de **médiatrice**, sinon d'**hyperplan médiateur** (**plan médiateur** en dimension 3).

4.4.1. ♠. Démontrez ce résultat.

4.4.2. ♠. *Médiatrices d'un triangle.* On suppose E de dimension 2.

1) Montrez que les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes.

2) Montrez que si abc est isocèle en a la médiane issue de a est aussi médiatrice de $[bc]$.

4.4.3. ♠. Montrez que le milieu m de a et b est caractérisé métriquement par les relations $ma = bm = \frac{1}{2}ab$ (ne pas oublier la dernière égalité !).

♡. Montrez qu'un point m de E appartient à $[ab]$ si et seulement si $ma + mb = ab$.

5. SPHÈRES, HYPERPLANS TANGENTS

5.1. **Intersection d'une sphère et d'un sous-espace affine.** Soit S la sphère de centre o et de rayon R de l'espace affine euclidien E et soit V un sous-espace affine de E . Soit ω le projeté orthogonal de o sur V et posons $d = o\omega$ et, si $R^2 - d^2$ est positif, $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Alors, l'intersection $S \cap V$ est

- la sphère de l'espace affine euclidien V , de centre ω et de rayon r si R est strictement supérieur à d ,
- réduite au point ω si R égale d ,
- vide si R est strictement inférieur à d .

Démonstration. Si m est dans V on a $om^2 = o\omega^2 + \omega m^2$ (par 4.1.3 et Pythagore) et le résultat s'ensuit. □

5.1.1. ♠. Montrez que l'intersection d'une droite et d'une sphère est formée de 0,1 ou 2 points, cf. 1.3.1. En particulier, trois points alignés sur un cercle ne peuvent être distincts.

5.2. **Hyperplan tangent à une sphère.** On dit qu'un sous-espace affine V est tangent²⁷ à une sphère S en un point a si l'on a $V \cap S = \{a\}$.

5.2.1. **Proposition.** Soit S une sphère. Pour $a \in S$ il existe un unique hyperplan tangent à S en a , noté $T_a(S)$. C'est l'hyperplan orthogonal à la droite (oa) passant par a . Les sous-espaces affines tangents à S en a sont exactement les sous-espaces affines de $T_a(S)$ passant par a .

Démonstration. Soit T un hyperplan contenant a et soit ω le projeté orthogonal de o sur T . Dire que T est tangent à S en a signifie que $S \cap T = \{a\}$ ce qui, en vertu de 5.1, impose $o\omega = R = oa$, donc $\omega = a$ en vertu de 4.1.3 iv. Il en résulte que T est bien l'hyperplan orthogonal à (oa) qui passe par a . \square

5.3. **Puissance d'un point par rapport à une sphère.** Soient $S = S(o, R)$ une sphère et a un point. On pose $d = oa$. La quantité $p = p(a, S) = d^2 - R^2$ est appelée **puissance** du point a par rapport à la sphère S . Si D est une droite passant par a qui coupe S en m et n , la quantité $(\overrightarrow{am} | \overrightarrow{an})$ ne dépend pas de la droite D et est égale à p . Si D est tangente à S en m on a $(\overrightarrow{am} | \overrightarrow{am}) = p$.

5.3.1. \spadesuit . Prouvez cette proposition.

5.3.2. \spadesuit . *Réciproque.* En déduire une condition d'alignement ou de cocyclicité.

5.3.3. \spadesuit . On suppose que la sphère S de l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^n a pour équation (cf. 1.3.2)

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2\omega_1 x_1 - \dots - 2\omega_n x_n + c = 0.$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$. Montrez qu'on a

$$p(a, S) = a_1^2 + \dots + a_n^2 - 2\omega_1 a_1 - \dots - 2\omega_n a_n + c.$$

5.4. **Hyperplan radical.** Soient $S = S(o, R)$ et $S' = S(o', R')$ deux sphères non concentriques. L'ensemble des points $m \in E$ qui ont même puissance par rapport à S et S' est l'hyperplan H orthogonal à la droite (oo') en le point h de (oo') défini par

$$\overrightarrow{oh} = \frac{R^2 - R'^2 + oo'^2}{2oo'^2} \overrightarrow{oo'}.$$

On l'appelle **hyperplan radical de S et S'** (dans le cas de la dimension 2 on parle d'axe radical de deux cercles.)

Démonstration. Dire que m a même puissance par rapport aux deux sphères signifie qu'on a $om^2 - R^2 = o'm^2 - R'^2$, ou encore $om^2 - o'm^2 = R^2 - R'^2$. On montre d'abord que l'unique point de (oo') qui vérifie cette condition est le point h défini ci-dessus. Si m est un point de E et p son projeté orthogonal sur (oo') on écrit alors $\overrightarrow{om} = \overrightarrow{op} + \overrightarrow{pm}$ et $\overrightarrow{o'm} = \overrightarrow{o'p} + \overrightarrow{pm}$. Si m a même puissance par rapport à S et S' un petit calcul donne $op^2 - o'p^2 = R^2 - R'^2$, donc $p = h$. Mais alors, les points m convenables sont ceux qui se projettent en h , donc les points de l'hyperplan H annoncé. \square

5.4.1. \spadesuit . Que se passe-t-il pour des sphères concentriques ?

²⁷Cette notion coïncide dans ce cas particulier de la sphère avec la notion générale d'espace tangent à une sous-variété.

5.4.2. ♠. Dans \mathbb{R}^n , calculez une équation de l'hyperplan radical à partir des équations des sphères S et S' .

5.4.3. ♠. *Intersection de deux sphères.* Soient $S = S(o, R)$ et $S' = S(o', R')$ deux sphères non concentriques et soit H leur hyperplan radical. Montrez que l'intersection de S et S' est égale à $S \cap H$ et à $S' \cap H$. Discutez. Cas de deux cercles.

5.5. Exercices.

5.5.1. ♣. Soient a, b, o trois points du plan tels que o soit le milieu de $[ab]$. Montrer qu'un point m du plan appartient au cercle de diamètre $[ab]$ si et seulement si le triangle amb est rectangle en m . (Utiliser le produit scalaire). En déduire qu'un triangle amb est rectangle en m si et seulement si om vaut la moitié de ab .

5.5.2. ♠. *Tangentes à une sphère issues d'un point.* Soit $S(o, R)$ une sphère et a un point de E . On se propose de déterminer les droites D tangentes à S et passant par a . Montrez que si $D \cap S = \{m\}$, on a $R^2 + am^2 = ao^2$. Déduisez-en que l'ensemble des points de contact m éventuels est l'intersection de S et d'une sphère S' . Discutez.

5.5.3. ♣. On se place dans le plan, donnez une construction à la règle et au compas des tangentes à un cercle C passant par un point a donné. Discutez.

5.5.4. ♣. Dans le plan affine euclidien, on considère deux cercles de centres distincts $C(\omega, r)$ et $C(\omega', r')$.

- (1) Déterminez l'image du cercle $C(\omega, r)$ par une homothétie-translation.
- (2) Déterminez les homothéties-translations qui envoient le cercle $C(\omega, r)$ sur le cercle $C(\omega', r')$. (On étudiera l'action d'une telle application sur des points particuliers.) Construisez les centres des homothéties trouvées.
- (3) Précisez l'action des ces homothéties-translations sur les tangentes communes aux deux cercles. Construisez ces tangentes communes.

5.5.5. ♠. *Sphère passant par $n + 1$ points.* Soit E un espace affine euclidien de dimension n et soient $n + 1$ points a_0, a_1, \dots, a_n affinement indépendants de E . Montrez qu'il existe une unique sphère qui contient les a_i . En particulier dans l'espace euclidien de dimension 3 tout tétraèdre est inscrit dans une unique sphère.

Indications : On raisonnera par récurrence sur n en considérant la sphère de centre ω de l'espace de dimension $n - 1$ qui contient les n premiers points et on cherchera le centre de S sur la perpendiculaire en ω à l'hyperplan engendré par ces n points et dans l'hyperplan médiateur des points a_n et a_{n+1} .

On pourra aussi considérer les hyperplans médiateurs de a_{i-1} et a_i .

6. BARYCENTRES DANS UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

La fonction scalaire de Leibniz

La notion de barycentre, fondamentale en géométrie affine, peut rendre aussi de grands services en géométrie euclidienne. L'exercice qui suit, généralisation d'exercices classiques au lycée, en donne un aperçu.

♣. Soient E un espace affine euclidien, a_1, \dots, a_n des points de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. On considère la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i m a_i^2$ (fonction scalaire de Leibniz). On se propose de déterminer ses lignes de niveau, c'est-à-dire de décrire, pour $k \in \mathbb{R}$, les ensembles $\mathcal{L}_k = \{m \in E \mid f(m) = k\}$.

6.1. On suppose qu'on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Soit o un point fixé de E . Calculez $f(m)$ en décomposant $\overrightarrow{ma_i} = \overrightarrow{mo} + \overrightarrow{oa_i}$ et montrez que \mathcal{L}_k est l'ensemble des points vérifiant une équation de la forme $(\overrightarrow{om} \mid \vec{u}) = k'$ où \vec{u} est un vecteur et k' un scalaire que l'on précisera. Montrez que, si \vec{u} n'est pas nul, \mathcal{L}_k est un hyperplan. Discutez le cas $\vec{u} = \vec{0}$.

6.2. On suppose qu'on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Soit g le barycentre des a_i affectés des masses λ_i . Calculez $f(m)$ en décomposant $\overrightarrow{ma_i} = \overrightarrow{mg} + \overrightarrow{ga_i}$ et montrez que \mathcal{L}_k est l'ensemble des points qui vérifient une équation de la forme $mg^2 = k''$ où k'' est un scalaire que l'on précisera. Discutez la nature de \mathcal{L}_k (si k'' est > 0 , \mathcal{L}_k est une sphère).

6.3. Soient $a, b \in E$. Déterminez les lignes de niveau des fonctions $ma^2 - mb^2$, $ma^2 + mb^2$, $\frac{ma}{mb}$. (Pour la dernière on se ramènera à l'équation $ma^2 - kmb^2 = 0$.) Discutez.
Remarquez que l'hyperplan radical est un cas particulier.

Partie IV. ISOMÉTRIES AFFINES

Dans cette partie E désigne un espace affine euclidien de dimension n et \vec{E} l'espace vectoriel euclidien associé.

1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1.1. Théorème et définition. Soit f une application affine de E dans E , \vec{f} l'application linéaire associée. On dit que f est une isométrie affine si l'une des propriétés équivalentes suivantes est réalisée :

- 1) \vec{f} est une isométrie vectorielle (donc un élément de $O(\vec{E})$),
 - 2) f conserve les distances : pour tous $a, b \in E$ on a $f(a)f(b) = ab$.
 - 3) L'image par f d'un repère orthonormé est un repère orthonormé.
- On note $Is(E)$ l'ensemble des isométries affines de E .

Démonstration. L'équivalence de 1 et 2 résulte de la formule $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \vec{f}(\overrightarrow{ab})$, de la définition de la distance et de I 5.1.2. Celle de 1 et 3 vient de I 7.1.3. \square

1.1.1. Remarques.

- 1) Une isométrie est bijective (donc est un élément de $GA(E)$).
- 2) Dans la définition on suppose au départ que f est une application affine. En fait, une application qui conserve les distances est automatiquement affine.
- 3) On définit de manière analogue une isométrie d'un espace euclidien E sur un espace euclidien F comme une application affine qui conserve les distances. L'existence d'une telle application entraîne que la dimension de E est inférieure ou égale à la dimension de F (pourquoi ?). Et si l'isométrie est bijective ?

1.1.2. \heartsuit . Voici les étapes de la démonstration de la remarque 2 : On suppose d'abord que f conserve les distances et admet un point fixe ω . On note φ l'application vectorielle définie par $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{\omega f(\omega + \vec{u})}$.

(1) Montrez que $\|\varphi(\vec{u})\|$ vaut $\|\vec{u}\|$ et calculez $\|\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})\|^2$.

(2) En utilisant I.5.1.6, concluez que f est affine d'application linéaire associée φ .

Traiter le cas général.

1.2. Théorème. L'ensemble $Is(E)$ est un sous-groupe de $GA(E)$.

1.2.1. \spadesuit . Prouvez le théorème.

1.3. Exemples fondamentaux.

1.3.1. \spadesuit . Montrez que les translations sont des isométries et que les seules homothéties qui sont des isométries sont celles de rapport ± 1 , c'est-à-dire l'identité et les symétries centrales.

1.3.2. \spadesuit . Soit $\sigma = \sigma_{V, \vec{W}}$ la symétrie affine par rapport à V parallèlement à la direction \vec{W} . Montrez que σ est une isométrie si et seulement si \vec{V} et \vec{W} sont orthogonaux (et $\vec{W} = \vec{V}^\perp$ est alors déterminé par V , cf. I 6.2.2). On dit que σ est la **symétrie orthogonale** par rapport à V et on la note σ_V . Lorsque V est un hyperplan σ est appelée une **réflexion**, lorsque V est un point on retrouve une **symétrie centrale**.

1.3.3. \spadesuit . Le sous-groupe $Is(E)$ est-il distingué dans $GA(E)$? (On pourra calculer la conjuguée d'une symétrie orthogonale σ_V par un élément arbitraire f de $GA(E)$.)

1.4. Proposition : conservation des propriétés. Une isométrie affine conserve l'alignement, les barycentres, les milieux, l'orthogonalité, les distances, les angles (non orientés), transforme projeté orthogonal en projeté orthogonal, etc.

Démonstration. C'est clair, soit par les propriétés des applications affines, soit par celles des isométries vectorielles. \square

Les isométries sont donc des transformations qui permettent de déplacer (ou de retourner, cf. ci-dessous) les figures, sans modifier leur forme (angles, rapports de distances), ni leur taille.

1.5. Isométries positives et négatives. Soit $f \in Is(E)$. On dit que f est un **déplacement** ou une **isométrie (affine) positive** si \vec{f} est une isométrie vectorielle positive (i.e. appartient à $O^+(\vec{E})$).

On dit que f est un **anti-déplacement** ou une **isométrie (affine) négative** si \vec{f} est une isométrie vectorielle négative (i.e. appartient à $O^-(\vec{E})$).

On note $Is^+(E)$ (resp. $Is^-(E)$) l'ensemble des isométries affines positives (resp. négatives).

1.5.1. ♠. Montrez qu'un déplacement (resp. un anti-déplacement) transforme un repère orthonormé direct en un repère orthonormé direct (resp. indirect).

1.5.2. ♠. Montrez que les réflexions sont des isométries négatives, mais que les translations sont des isométries positives. Plus généralement, montrez que la symétrie orthogonale σ_V est directe si et seulement si V est de codimension paire dans E . En particulier une symétrie centrale est directe en dimension paire, indirecte en dimension impaire.

1.5.3. ♠. Montrez que l'application qui à une isométrie affine f associe $\det \vec{f}$ est un homomorphisme de groupes surjectif de $Is(E)$ sur $\{1, -1\}$. Montrez que l'ensemble $Is^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $Is(E)$. Montrez qu'en revanche $Is^-(E)$ n'est pas un sous-groupe.

2. THÉORÈMES DE DÉCOMPOSITION

Le fait que $Is(E)$ soit un groupe dit essentiellement que la composée de plusieurs isométries est toujours une isométrie. Dans nombre de problèmes il est important de savoir précisément quelle sorte d'isométrie on obtient. Cette question n'est pas évidente (même pour les petites dimensions). Elle se scinde en deux parties : il faut d'abord décrire les diverses sortes d'isométries, c'est-à-dire les classifier, puis ensuite préciser comment elles se composent. La classification complète des isométries sera donnée ultérieurement dans le cas des dimensions 2 et 3. Pour la classification comme pour la composition, nous donnons ci-dessous deux outils importants qui sont les théorèmes de décomposition. Le premier est dans la lignée des résultats de géométrie affine généraux et permet de décomposer une isométrie en produit d'une translation et d'une isométrie qui admet un point fixe, donc de se ramener au cas vectoriel. Si l'on est soigneux on peut même supposer qu'on a une décomposition commutative, C'est la "décomposition canonique" (GA IV.7.5). Le second donne une décomposition non unique en éléments plus simples : les réflexions.

2.1. Isométries fixant un point. Soit a un point de E . L'ensemble des isométries de E qui fixent a est un sous-groupe de $Is(E)$ noté $Is_a(E)$. L'application qui à $f \in Is_a(E)$ associe \vec{f} est un isomorphisme de $Is_a(E)$ sur $O(\vec{E})$.

2.1.1. ♠. Prouvez cette assertion en vous inspirant de [GA] IV 7.1.

Comme dans le cas affine, si f est une isométrie et a un point quelconque, on peut écrire f comme produit d'une translation et d'une isométrie fixant a . Le résultat suivant fournit une décomposition canonique et commutative :

2.2. Théorème (décomposition canonique). Soit f une isométrie de E . Alors f s'écrit de manière unique sous la forme $t_{\vec{v}} \circ g$ où

- i) le vecteur \vec{v} appartient à $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$,
- ii) g est une isométrie admettant un point fixe,
- iii) g et $t_{\vec{v}}$ commutent.

Démonstration. En vertu de [GA] IV 7.5, il suffit de montrer qu'une isométrie f vérifie toujours l'hypothèse du théorème de décomposition, i.e. :

$$(*) \quad \vec{E} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}) \oplus \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}}).$$

Comme la somme des dimensions du noyau et de l'image est n il suffit de montrer qu'ils sont en somme directe. Cela résulte du fait qu'ils sont orthogonaux. En effet, soit \vec{x} un vecteur du noyau et \vec{y} un vecteur de l'image. On a donc $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$ et il existe un vecteur \vec{z} tel que $\vec{f}(\vec{z}) - \vec{z} = \vec{y}$. On a alors :

$$(\vec{x} | \vec{y}) = (\vec{f}(\vec{x}) | \vec{f}(\vec{z}) - \vec{z}) = (\vec{f}(\vec{x}) | \vec{f}(\vec{z})) - (\vec{x} | \vec{z}) = 0.$$

Pour finir on note que $g = t_{-\vec{v}} \circ f$ est bien une isométrie. □

2.2.1. *Remarque.* En fait, en vertu du principe de conjugaison, les conditions i) et iii) sont équivalentes, cf. [GA] IV 7.1.

2.2.2. *Exemple.* On retrouve l'exemple (essentiel et difficile) des symétries glissées évoqué dans [GA] IV 7.6 : ce sont les composées (commutatives) d'une symétrie orthogonale σ_V et d'une translation de vecteur parallèle à V , voir aussi 2.3.2, 2.3.3, etc.

2.3. *Exercices.*

2.3.1. ♣. ²⁸ Soit f une isométrie affine telle que \vec{f} soit une symétrie vectorielle $\sigma_{\vec{v}}$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est une symétrie orthogonale,
- 2) f est involutive,
- 3) f admet un point fixe.

Précisez alors l'espace des points fixes de f .

2.3.2. ♣. Soit s une symétrie glissée de décomposition canonique $s = \sigma_V t_{\vec{v}}$. Montrez que V est exactement l'ensemble des milieux des segments $[ms(m)]$ pour $m \in E$.

²⁸Le lecteur attentif notera avec dédain que cet exercice est déjà plusieurs fois dans [GA], cf. GA IV 2.5, 3.2.5, 5.1.3 et 7.6.

2.3.3. ♣. On munit E d'un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On note α un paramètre réel variant 2 ou 0. On veut déterminer la nature et la décomposition canonique de l'application f qui au point m de coordonnées (x, y, z) associe le point m' de coordonnées (x', y', z') :

$$\begin{cases} x' = \frac{7}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z + 1 \\ y' = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{8}{9}z + 2 \\ z' = -\frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}z + \alpha \end{cases}$$

1) Montrez que \vec{f} est une symétrie orthogonale et déterminez une équation cartésienne du sous-espace de ses vecteurs fixes.

2) Pour quelle valeur de α l'application f admet-elle un point fixe ? Dans ce cas déterminez l'ensemble des points fixes.

3) Pour l'autre valeur de α , f est une symétrie glissée de décomposition : $f = \sigma_P \circ t_{\vec{v}}$. Déterminez un point ω de P , puis une équation cartésienne de P . Calculez le vecteur \vec{v} .

2.3.4. ♣. 1) Montrez que les sous-espaces affines stables par une symétrie orthogonale σ_V sont les sous-espaces de la forme $a + \vec{F}$ avec $a \in V$ et $\vec{F} = (\vec{F} \cap \vec{V}) \oplus (\vec{F} \cap \vec{V}^\perp)$. (Si F est stable on notera que $\sigma_V|_F$ est une involution, donc une symétrie, donc a un point fixe et on utilisera I 6.2.6.)

2) Déterminez les sous-espaces affines F stables par une symétrie glissée $s = \sigma_V t_{\vec{v}}$. (Utilisez le carré de s et la question précédente.)

2.3.5. ♣. Autre démonstration de 2.2.

On reprend les notations du théorème de décomposition.

1) *Unicité.*

On suppose qu'on a une décomposition commutative $f = t_{\vec{v}} \circ g$. Soit F l'espace des points fixes de g et soit p la projection orthogonale de E sur F .

a) Rappelez pourquoi l'on a $\vec{F} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$.

b) Soit $x \in E$. Montrez que l'on a $\|\vec{v}\| = p(x)p(f(x)) \leq xf(x)$ avec égalité si et seulement si x est dans F . (On écrira $x = a + \vec{w}$ avec $a \in F$ et $\vec{w} \in \vec{F}^\perp$.)

c) Montrez l'unicité de la décomposition.

Commentaire : Le sous-espace F (parfois appelé axe de f) admet donc une caractérisation géométrique : c'est l'ensemble des points de E "les moins déplacés" par f . Sur F , l'isométrie f agit comme la translation $t_{\vec{v}}$.

2) *Existence.*

On pose $\vec{F} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$. Soit G un sous-espace affine de direction \vec{F}^\perp .

a) Montrez que $f(G)$ est parallèle à G .

b) Pour $x \in G$, on note $h(x)$ le projeté orthogonal de $f(x)$ sur G . Montrez que h est une isométrie de G et que \vec{h} n'admet pas la valeur propre 1. Montrez que h admet un unique point fixe ω_G dans G .

c) En posant $\vec{v} = \overrightarrow{\omega_G f(\omega_G)}$ montrez l'existence de la décomposition.

Détermination pratique de la décomposition.

Pour déterminer concrètement g, F, \vec{v} , la démonstration précédente montre qu'il suffit de considérer n'importe quel sous-espace G de direction \vec{F}^\perp , de poser $h = p_G^\perp \circ f \in \text{Is}(G)$ et de déterminer l'unique point fixe ω_G de h . On a alors les résultats suivants :

- g est l'unique application affine fixant ω_G et d'application linéaire associée \vec{f} ;
- F est l'unique sous-espace affine passant par ω_G de direction \vec{F} ;
- \vec{v} est le vecteur $\overrightarrow{\omega_G f(\omega_G)}$.

3) *Application numérique.*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application affine définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{\sqrt{2}}z + \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + 1 \end{pmatrix}.$$

Montrez que f est une isométrie et déterminez sa décomposition canonique (pour un autre algorithme, voir VI 3.1).

Nous énonçons maintenant le second théorème de décomposition :

2.4. Théorème. *Toute isométrie affine est produit de réflexions orthogonales.*

Démonstration. Comme toute isométrie est produit d'une translation et d'une isométrie admettant un point fixe, on est ramené à montrer le résultat pour une isométrie vectorielle et pour une translation. Le cas vectoriel vient de I 6.3 et I 6.3.2. Pour la translation on a le lemme suivant :

2.4.1. Lemme. *Soit t la translation de vecteur \vec{v} non nul, soit H un hyperplan affine de direction orthogonale à $\vec{v} : \vec{H} = (\text{Vect } \vec{v})^\perp$ et soit H' l'image de H par la translation $t_{\vec{v}/2}$. Alors, le produit $\sigma_{H'}\sigma_H$ vaut t .*

Démonstration. Notons $f = \sigma_{H'}\sigma_H$. Comme on a $\vec{H} = \vec{H}'$ et que $\sigma_{\vec{H}}$ est une involution, l'application linéaire associée à f est $Id_{\vec{E}}$ de sorte que f est une translation.

Soient a un point de H et $c = t_{\vec{v}/2}(a)$ qui est un point de H' . Déterminons le vecteur de la translation $f : c$ 'est le vecteur \vec{ab} si on note b le point $f(a)$. On a

$$b = f(a) = \sigma_{H'}\sigma_H(a) = \sigma_{H'}(a) = \sigma_{H'}(c - (\vec{v}/2)) = c + (\vec{v}/2)$$

car \vec{v} est orthogonal à \vec{H}' . On obtient donc $\vec{ab} = \vec{ac} + \vec{cb} = \vec{v}$ ce qui montre que f est la translation de vecteur \vec{v} c'est-à-dire t . \square

2.4.2. Remarque. Comme application de ce théorème de décomposition, nous verrons qu'en décomposant deux rotations planes de manière judicieuse en produits de deux réflexions on détermine aisément leur composée.

3. SIMILITUDES

3.1. Définition. *Soit $s \in GA(E)$ une application affine bijective. On dit que s est une **similitude affine** si \vec{s} est une similitude vectorielle. Le rapport de s est, par définition, celui de \vec{s} . C'est un nombre réel positif. La similitude s est dite **directe** (resp. **indirecte**) si \vec{s} l'est.*

3.2. Propriétés. Démontrons les résultats suivants :

3.2.1. \spadesuit . Les homothéties et les isométries (affines) sont des similitudes affines.

3.2.2. \spadesuit . Les similitudes affines forment un sous-groupe de $GA(E)$ noté $\text{Sim}(E)$. Les similitudes directes forment un sous-groupe distingué noté $\text{Sim}^+(E)$. Le rapport du produit de deux similitudes est le produit des rapports.

3.2.3. \spadesuit . Les composées d'homothéties et d'isométries sont des similitudes. Nous verrons plus loin que ce sont les seules.

- 3.3. Proposition.** Soit s une similitude affine de rapport λ . On a les propriétés suivantes :
- 1) s multiplie les distances par λ (et donc les isométries sont exactement les similitudes de rapport 1),
 - 2) s conserve les angles non orientés et l'orthogonalité.

Démonstration. Cela vient des résultats analogues dans le cas vectoriel. □

3.4. Centre d'une similitude.

3.4.1. Théorème. Soit s une similitude affine qui n'est pas une isométrie. Alors s admet un unique point fixe appelé **centre** de la similitude.

Démonstration. En vertu de [GA] IV 7.3, il suffit de voir que \vec{s} n'a pas la valeur propre 1. Or, on a $\vec{s} = \vec{h}_\lambda \vec{f}$ avec $\vec{f} \in O(\vec{E})$ et $\lambda > 0, \lambda \neq 1$. Si on a $\vec{s}(\vec{x}) = \vec{x}$, on en déduit $\vec{f}(\vec{x}) = (1/\lambda)\vec{x}$, ce qui, si \vec{x} est non nul, contredit $\|\vec{x}\| = \|\vec{f}(\vec{x})\|$. (On peut aussi montrer que toute valeur propre de \vec{s} est de module λ .) □

3.4.2. Corollaire. Soit s une similitude affine qui n'est pas une isométrie, soit λ son rapport et a son centre. Alors, s s'écrit sous la forme $s = h(a, \lambda) f = f h(a, \lambda)$ où $h(a, \lambda)$ est l'homothétie de centre a et de rapport λ et f une isométrie admettant a pour point fixe. De plus les applications f et $h(a, \lambda)$ commutent.

Démonstration. On pose $f = h(a, \lambda)^{-1} s$. C'est une similitude de rapport 1 donc une isométrie et comme h et s fixent a il en est de même pour f . □

3.5. Proposition : transitivité. Les similitudes (resp. les similitudes directes) opèrent transitivement sur les points de E , sur les droites, les demi-droites, les segments, les cercles.

3.5.1. ♠. Montrez cette proposition (pour les trois premiers c'est déjà vrai pour les isométries).

3.5.2. *Remarque.* En revanche, le groupe des similitudes n'est pas transitif sur les triangles, il y a des "cas de similitude", cf. V 6.1.

Partie V. LE PLAN AFFINE EUCLIDIEN

Dans toute cette partie E est un plan affine euclidien.

1. CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES

Commençons par donner la définition d'une rotation affine :

1.1. Définition. Soit θ un nombre réel et $\bar{\theta}$ sa classe modulo 2π . On appelle rotation affine de centre a et d'angle $\bar{\theta}$ (ou encore θ par abus de langage, θ étant alors défini à 2π près) et on note $\rho(a, \bar{\theta})$ (ou $\rho(a, \theta)$) l'isométrie affine admettant a comme point fixe et la rotation vectorielle d'angle $\bar{\theta}$ (cf. II 2.3.2) comme application linéaire associée.

On peut alors énumérer toutes les isométries affines du plan :

1.2. Théorème de classification. Les isométries affines du plan sont les suivantes :

- 1) Les déplacements sont les translations et les rotations affines.
- 2) Les anti-déplacements sont les réflexions (ou symétries axiales : symétries orthogonales par rapport aux droites) et les symétries glissées (composées d'une symétrie par rapport à une droite D et d'une translation de vecteur parallèle à D).

1.2.1. ♠. Prouvez ce théorème.

1.2.2. *Remarque.* Signalons quelques cas particuliers : l'identité qui est à la fois la translation de vecteur nul et une rotation d'angle nul (mais de centre indéterminé) et les symétries centrales (symétries orthogonales σ_V avec pour V un singleton ; si $V = \{a\}$ on note $\sigma_V = \sigma_a$) qui sont aussi les rotations de centre a et d'angle π .

1.3. Décomposition en produit de symétries.

- 1) La translation de vecteur \vec{v} se décompose en produit de deux symétries $\sigma_{D'}\sigma_D$ où D est une droite arbitraire orthogonale à \vec{v} et où $D' = t_{\vec{v}/2}(D)$.
- 2) La rotation $\rho(a, \theta)$ se décompose en produit de deux symétries $\sigma_{D'}\sigma_D$ où D est une droite arbitraire passant par a et où $D' = \rho(a, \theta/2)(D)$.

♠. Prouvez ces résultats.

1.4. Compléments sous forme d'exercices.

1.4.1. ♠. *Caractérisation par points fixes et droites invariantes.*

Déterminez les points fixes et les droites invariantes²⁹ des divers types d'isométries affines et montrez que celles-ci sont caractérisées par les propriétés suivantes :

- Tous les points fixes : l'identité.
- Une droite de points fixes : les symétries axiales.
- Un unique point fixe : les rotations.
- Pas de point fixe : les translations et les symétries glissées, les premières ayant une infinité de droites stables (les parallèles à la direction de translation), les secondes une unique droite stable (l'axe de la symétrie).

²⁹Une partie $A \subset E$ est dite invariante par une application $f : E \rightarrow E$ si on a $f(A) = A$. Elle est dite stable si on a $f(A) \subset A$. Si A est un sous-espace affine et f une application affine bijective, les deux notions coïncident.

1.4.2. ♣. *Composition.* Déterminez (en les organisant dans un tableau) la nature des diverses composées possibles des isométries planes et précisez leurs éléments géométriques (centre, angle, axe, etc.). Voici quelques indications pour effectuer ce travail :

1) On commencera par déterminer la transformation vectorielle associée et on en déduira les possibilités pour la transformation affine.

2) On étudiera la composée d'une translation et d'une symétrie, d'abord dans le cas où l'axe de symétrie est orthogonal à la direction de translation, puis dans le cas général.

3) On examinera ensuite la composée d'une rotation et d'une symétrie dont l'axe passe par le centre de la rotation.

4) Pour étudier la composée d'une translation et d'une rotation on les décomposera en produit de symétries.

5) On procédera de même pour la composée de deux rotations de centres distincts.

6) Enfin on ramènera les autres cas à ceux précédemment étudiés.

1.4.3. ♠. *Conjugaison.* Déterminez les conjugués gfg^{-1} d'une isométrie f par une isométrie g . On ne saurait trop conseiller d'aller lire, si ce n'est déjà fait, le paragraphe IV 6.5 de [GA] sur le principe de conjugaison. On montrera en particulier les formules suivantes :

0) si $t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur \vec{v} , $gt_{\vec{v}}g^{-1} = t_{\vec{g}(\vec{v})}$,

1) si σ_D est la symétrie par rapport à la droite D , $g\sigma_Dg^{-1} = \sigma_{g(D)}$,

2) si $\rho(a, \theta)$ est la rotation de centre a et d'angle θ , $g\rho(a, \theta)g^{-1} = \rho(g(a), \theta)$ si g est positive, $g\rho(a, \theta)g^{-1} = \rho(g(a), -\theta)$ si g est négative.

1.4.4. ♣. *Commutation.* Préciser, pour deux isométries f et g à quelle condition elles commutent. La méthode consiste à écrire la relation $fg = gf$ sous la forme $gfg^{-1} = f$, donc à se ramener à un problème de conjugaison.

1.4.5. ♣. À quelle condition le produit de deux réflexions $\sigma_D\sigma_{D'}$ est-il une involution? Même question pour les produits $\sigma_o\sigma_D$ et $\sigma_o\sigma_{o'}$.

1.4.6. ♣. *Le théorème des trois réflexions.* Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ trois réflexions d'axes D_1, D_2, D_3 . Montrez que le produit $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ est une réflexion si et seulement si les trois droites D_i sont concourantes ou parallèles.

1.4.7. ♡. Soient a, b, c trois points non alignés. Montrer que $\sigma_{(bc)}\sigma_{(ca)}\sigma_{(ab)}$ est une symétrie glissée. Donner sa décomposition canonique et construire ses éléments caractéristiques.

1.4.8. ♣. Sur un vieux manuscrit le capitaine Crochet a indiqué la marche à suivre pour trouver le trésor enfoui dans l'île des pirates. *Partez du vieil aulne A, marchez vers le bouleau B, puis tournez de 90 degrés à droite et parcourez encore la même distance. Vous obtenez un point M. Revenez à l'aulne et marchez cette fois vers le chêne C, puis tournez de 90 degrés à gauche et parcourez la même distance jusqu'au point N. Le trésor T est à mi-chemin entre M et N.* Peter Pan s'est emparé du grimoire et se rend sur l'île pour trouver le trésor. Malheureusement, si le bouleau et le chêne sont bien là il n'y a plus trace de l'aulne qui a sans doute été foudroyé entre temps. Adieu trésor ! À moins que ...

1.5. ♣. Droites remarquables dans un triangle et cercle des neuf points.

Cette série d'exercices rassemble des résultats classiques, certains déjà rencontrés dans d'autres chapitres. La figure de cet exercice est sur la couverture de ce document.

Soit E le plan affine euclidien. Si m est un point de E , λ un réel différent de 0 et 1 et D une droite de E , on note $H(m, \lambda)$ l'homothétie de centre m et de rapport λ et S_D la réflexion par rapport à la droite D .

Soient un triangle abc et a', b', c' les milieux respectifs de $[bc]$, $[ca]$ et $[ab]$.

1.5.1. Médiannes.

- (1) Montrer que les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes en un point g appelé **centre de gravité** du triangle abc .
- (2) Montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ ont même centre de gravité.
 - (a) en utilisant l'homothétie H_1 (que l'on précisera) qui transforme le triangle abc en $a'b'c'$
 - (b) en utilisant l'associativité des barycentres.

1.5.2. Médiatrices.

- (1) Montrer qu'il existe une unique réflexion qui échange les points b et c . On note Δ_a son axe appelé **médiatrice du segment** $[bc]$.
- (2) Montrer qu'un point m de E appartient à Δ_a si et seulement si les longueurs mb et mc sont égales.
- (3) En déduire que les médiatrices des côtés du triangle abc sont concourantes en un point o centre du **cercle circonscrit** C .

On notera Γ le cercle circonscrit au triangle $a'b'c'$ et ω son centre.

1.5.3. *Hauteurs.* La **hauteur issue de a dans le triangle abc** est la droite passant par a et orthogonale à (bc) . On note a'' la projection orthogonale de a sur (bc) .

Quelle est l'image par H_1 de la droite (aa'') ? Montrer que les hauteurs de abc sont concourantes en un point h appelé **orthocentre du triangle** et que l'on a : $\vec{gh} = -2\vec{g\omega}$. Quel est l'orthocentre de $a'b'c'$?

1.5.4. Droite d'Euler.

- (1) Déduire de 1.5.3 une relation vectorielle entre g , o et ω , puis que les points o , g , ω et h sont soit confondus soit alignés.

La droite (og) est appelée **droite d'Euler du triangle abc** .

- (2) Montrer que ω est le milieu de $[oh]$, en déduire que Γ est l'image de C par $H_2 = H(h, \frac{1}{2})$.

1.5.5. *Cercle des neuf points.* Montrer que les points a''' , b''' et c''' , milieux respectifs de $[ha]$, $[hb]$ et $[hc]$ appartiennent au cercle Γ et que $(a'a''')$ est un diamètre de Γ . (Déterminer une homothétie qui envoie a' sur a'''). En déduire que a'' , b'' et c'' appartiennent à Γ .

Le cercle Γ est donc appelé le **cercle des neuf points**. (Pourquoi?)

1.5.6. *Symétrique de l'orthocentre.* En déduire que le symétrique a_0 de h par rapport à (bc) appartient au cercle C .

2. SECTEURS ET ANGLES NON ORIENTÉS

Nous revenons dans ce paragraphe sur les angles non orientés dans le cadre affine en dimension 2. En particulier nous faisons ici le lien entre l'angle \widehat{bac} défini en III 1.4.3 et la longueur d'arc. Même si, à l'écrit du CAPES, ce sont plutôt les angles orientés de vecteurs qui jouent le rôle principal, ce paragraphe est essentiel pour l'oral et pour votre réflexion de futurs professeurs.

2.1. Secteur angulaire, arc associé.

Nous commençons par définir les secteurs, qui constituent en réalité la première apparition des angles dans l'enseignement.

2.1.1. **Définition des secteurs.** Soit o un point du plan et soient $[oa), [ob)$ deux demi-droites issues de o .

1) Supposons les points o, a, b non alignés. On note H_a^+ (resp. H_a^-) le demi-plan (fermé) limité par (oa) qui contient b (resp. qui ne contient pas b). On note de même H_b^+ et H_b^- les demi-plans limités par (ob) . Les demi-droites $[oa), [ob)$ partagent alors le plan en deux parties. La première, $H_a^+ \cap H_b^+$, qui est convexe, est appelée **secteur angulaire saillant limité** par les demi-droites. La seconde, $H_a^- \cup H_b^-$, non convexe, est appelée **secteur angulaire rentrant limité** par les demi-droites.

2) Lorsque les points o, a, b sont alignés on prolonge les définitions précédentes comme suit :

i) Si les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$ sont égales, le secteur saillant qu'elles définissent est réduit à $[oa)$. Le secteur rentrant est le plan tout entier.

ii) Si les demi-droites sont opposées, il n'y a plus de secteur rentrant mais deux secteurs saillants plats qui sont les demi-plans limités par (oa) .

2.1.2. *Remarque.* Un secteur S limité par $[oa)$ et $[ob)$ est en particulier un cône de sommet o , ce qui signifie qu'il est stable par les homothéties de centre o et de rapport positif. On peut encore traduire cette propriété en disant que S est réunion de demi-droites issues de o .

Nous passons maintenant à la définition des arcs de cercles.

2.1.3. **Proposition-définition : arcs associés aux secteurs.** Soient o, a, b trois points non alignés. On considère un cercle Γ de centre o et de rayon $R > 0$. Les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$ coupent le cercle Γ en a' et b' . Par définition, on appelle **petit arc** (resp. **grand arc**) d'extrémités a' et b' l'intersection de Γ avec le secteur angulaire saillant (resp. rentrant) limité par les demi-droites $[oa), [ob)$.

Le petit arc (resp. le grand arc) est aussi l'intersection du cercle avec le demi-plan limité par $(a'b')$ et qui ne contient pas o (resp. qui contient o).

Démonstration. Soit m un point du petit arc distinct de a' et b' . S'il était dans le demi-plan contenant o il serait dans le triangle $oa'b'$ donc on aurait $om < oa'$ (cf. III 4.2.5) ce qui est absurde. Réciproquement, si m est sur Γ et dans le demi-plan qui ne contient pas o , soit m' l'intersection de (om) et de $(a'b')$. Si m' n'est pas dans le segment $[a'b']$ on a $om \geq om' > oa'$ (*loc. cit.*) et c'est absurde, donc m' est dans $[a'b']$ et m est dans le secteur saillant puisque celui-ci est convexe. Comme le secteur est un cône de sommet o , m est aussi dans le secteur. \square

2.2. **Angle et longueur d'arc.** Le théorème suivant fait le lien entre arcs et angles :

2.2.1. **Théorème.** Soient o, a, b trois points de E avec a et b différents de o . On considère le cercle Γ de centre o et de rayon 1. Les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$ coupent le cercle Γ en a' et b' . Soit \mathcal{A} le petit arc de Γ d'extrémités a' et b' . Alors l'angle \widehat{aob} est égal à la longueur de l'arc \mathcal{A} .

Démonstration. On renvoie à l'annexe 2 pour la définition de la longueur d'une courbe et le calcul de cette longueur dans le cas d'une courbe paramétrée de classe C^1 . Choisissons un repère orthonormé d'origine o , de premier vecteur \vec{oa}' et de second vecteur \vec{ob}'' tel que

$(\vec{ob}' | \vec{ob}'')$ soit positif ou nul (cela signifie que b'' est dans le demi-plan limité par (oa) qui contient b'). Le cercle Γ admet alors le paramétrage $x = \cos t, y = \sin t$, pour $t \in [-\pi, +\pi]$ (cf. III 1.3.3). En particulier le point b' s'écrit $(\cos \theta, \sin \theta)$ avec $\theta \in [-\pi, \pi]$ et on a $(\vec{ob}' | \vec{ob}'') = \sin \theta \geq 0$, de sorte que θ est en fait dans $[0, \pi]$. Par ailleurs, on a $(\vec{ob}' | \vec{oa'}) = \cos \theta$, donc $\widehat{aob} = |\theta| = \theta$ par définition de l'angle non orienté (cf. II 4.4.3).

On obtient un paramétrage de l'arc \mathcal{A} en restreignant le paramétrage précédent à l'intervalle $[0, \theta]$. La longueur de \mathcal{A} se calcule alors par la formule :

$$l(\mathcal{A}) = \int_0^\theta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^\theta dt = \theta,$$

d'où le résultat.³⁰ □

Le résultat précédent permet de définir aussi l'angle des secteurs rentrants (cela peut être utile pour calculer la somme des angles d'un polygone non convexe, cf. 7.3.5).

2.2.2. Définition. Soit \mathcal{S} un secteur (saillant ou rentrant), limité par $[oa)$ et $[ob)$ et soit \mathcal{A} l'arc (petit ou grand) découpé par le secteur sur le cercle de centre o et de rayon 1. L'angle du secteur est par définition la longueur de l'arc \mathcal{A} . On le note $\widehat{\mathcal{S}}$.

2.2.3. Remarque. Pour le secteur saillant \mathcal{S} limité par $[oa)$ et $[ob)$, on a $\widehat{\mathcal{S}} = \widehat{aob}$. Comme l'arc correspondant au secteur saillant est contenu dans un demi-cercle, l'angle correspondant est $\leq \pi$. Au contraire, un angle rentrant est $> \pi$. Précisément, si l'angle d'un secteur saillant vaut θ , celui du secteur rentrant correspondant vaut $2\pi - \theta$.

2.2.4. Proposition (Relation de Chasles non-orientée). On suppose qu'un secteur \mathcal{S}_{ab} (saillant ou rentrant) limité par $[oa)$ et $[ob)$ est réunion de deux secteurs \mathcal{S}_{ac} limité par $[oa)$ et $[oc)$ et \mathcal{S}_{cb} limité par $[oc)$ et $[ob)$ n'ayant en commun que la demi-droite $[oc)$. Alors on a $\widehat{\mathcal{S}}_{ab} = \widehat{\mathcal{S}}_{ac} + \widehat{\mathcal{S}}_{cb}$.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 2.3 de l'annexe 3. □

2.2.5. Remarque. Pour les angles non orientés l'analogie de cette proposition est la relation $\widehat{aob} = \widehat{aoc} + \widehat{cob}$, mais cette relation ne vaut que si la somme des deux angles $\widehat{aoc} + \widehat{cob}$ est $\leq \pi$. Pour les angles orientés en revanche on verra qu'on a la relation de Chasles sans restriction (mais bien entendu on aura imposé " $2\pi = 0$ ").

2.3. ♠. Quelques formules pour les triangles. Nous donnons dans ce paragraphe quelques formules importantes concernant les triangles. Nous les utiliserons surtout en géométrie plane, mais elles sont valables en toutes dimensions.

2.3.1. Calcul du produit scalaire. Soit abc un triangle. En utilisant I 8.2.3 montrez :

$$(\vec{ab} | \vec{ac}) = ab \cdot ac \cdot \cos \widehat{bac}.$$

2.3.2. La formule d'Al-Kashi (2). Soit abc un triangle. Montrez la formule $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2abac \cos \widehat{bac}$ (cf. III 1.2.3). Si \widehat{bac} est **obtus** (i.e. $\widehat{bac} > \pi/2$), montrez qu'on a $bc > ab$ et $bc > ac$. Montrez qu'un triangle a au plus un angle obtus.

³⁰On sait que, si on se restreint à des paramétrages bijectifs, la longueur ne dépend pas du paramétrage, cf. IX 2.2.1.2.

2.3.3. *Application au triangle rectangle.* Soit abc un triangle rectangle en c . Montrez qu'on a $ac = ab \cos \widehat{bac}$, $bc = ab \sin \widehat{bac}$, $bc = ac \tan \widehat{bac}$.

Soit h le pied de la hauteur issue de c . Montrez les formules $ac^2 = ab \times ah$ et $ch^2 = ah \times bh$. Sur l'axe des x on se donne les points $0, 1$ et x avec $x > 0$. Construisez le nombre \sqrt{x} à la règle et au compas.

2.3.4. *Deux formules et une application.* Soit abc un triangle et notons α, β, γ ses trois angles non orientés en a, b, c . Montrez les formules suivantes :

1) $bc = ab \cos \beta + ac \cos \gamma$ (calculez les produits scalaires $(\vec{ba} | \vec{bc})$ et $(\vec{ca} | \vec{cb})$),
 2) $ab \sin \beta = ac \sin \gamma$, (considérez le projeté orthogonal a' de a sur (bc) , attention aux cas de figure).

3) On suppose que le triangle abc n'est pas rectangle. Montrez que a' est barycentre de $\{(b, \tan \widehat{abc}), (c, \tan \widehat{bca})\}$. En déduire les coordonnées barycentriques de l'orthocentre du triangle dans le repère affine a, b, c .

2.4. **La somme des angles d'un triangle.** Soit abc un triangle et notons α, β, γ ses trois angles non orientés. On a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Cette formule (que nous allons prouver de trois façons différentes) est une des caractéristiques fondamentales de la géométrie euclidienne. Dans d'autres géométries comme la géométrie elliptique (resp. la géométrie hyperbolique) la somme des angles d'un triangle est $> \pi$ (resp. $< \pi$). Par exemple les triangles T délimités sur une sphère de rayon 1 par les arcs de grands cercles vérifient $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \mathcal{A}(T)$ où $\mathcal{A}(T)$ désigne l'aire du triangle.

2.4.1. *Première démonstration.*

Le triangle ayant au plus un angle obtus, on peut supposer $\beta, \gamma \leq \pi/2$. On va montrer la formule $\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma$. Pour cela on part de la formule d'Al-Kashi (2.3.2) : $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab \cdot ac \cdot \cos \alpha$ et de la formule 2) de 2.3.4 : $bc = ab \cos \beta + ac \cos \gamma$. On élève cette égalité au carré et on soustrait. En utilisant la formule 1) de 2.3.4 on obtient le résultat. On a ainsi $\cos \alpha = -\cos(\beta + \gamma) = \cos(\pi - \beta - \gamma)$, donc $\alpha = \pi - \beta - \gamma$ ou $\alpha = \beta + \gamma - \pi$, mais cette dernière relation est impossible car α est positif.

2.4.2. *Deuxième démonstration (inspirée d'Euclide).*

♠. Construisez x et y tels que $abcx$ et $acyx$ soient des parallélogrammes et montrez les égalités d'angles : $\widehat{bac} = \widehat{acx}$ (angles alternes-internes ; on utilisera une symétrie centrale), $\widehat{abc} = \widehat{xcy}$ (angles correspondants ; on utilisera une translation). Concluez.

3. ANGLES ORIENTÉS

Nous définissons ici les angles orientés en géométrie affine euclidienne du plan. Là encore, tout le travail, ou presque, a été accompli dans le chapitre sur le plan vectoriel euclidien.

3.1. **Définition.**

1) Soient D, D' deux demi-droites affines de même origine et soient \vec{v} et \vec{v}' des vecteurs directeurs de D et D' . L'angle orienté de D et D' est, par définition, l'angle orienté $\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}$.

2) Soient D, D' deux droites affines, l'angle orienté de D et D' est défini comme l'angle orienté de leurs directions $\widehat{D, D'} = \widehat{\vec{D}, \vec{D}'}$.

3.1.1. *Notations.* On note plutôt $\widehat{(\vec{ab}, \vec{cd})}$ l'angle orienté de vecteurs \vec{ab}, \vec{cd} (afin d'éviter d'être encombré d'un grand chapeau) au moins lorsque cette notation ne prête pas à confusion. C'est aussi l'angle orienté des demi-droites $[ab]$ et $[cd]$. De même, on note aussi parfois $((ab), (cd))$, voire (ab, cd) , au lieu de $\widehat{(\vec{ab}, \vec{cd})}$ l'angle orienté de droites.

Tous les théorèmes établis au chapitre sur les angles en vectoriel s'appliquent dans le cas affine. En particulier on a, pour les angles orientés, la relation de Chasles, la règle du parallélogramme et les résultats suivants :

3.2. **Proposition.** Soit f une isométrie de E avec $\delta = \det \vec{f} = \pm 1$ et soient a, b, c, d quatre points de E avec $a \neq b, c \neq d$. On a les formules suivantes :

- 1) $\widehat{(f(a)f(b), f(c)f(d))} = \delta \widehat{(\vec{ab}, \vec{cd})}$, (angles orientés de vecteurs)
- 2) $((f(a)f(b)), (f(c)f(d))) = (f(ab), f(cd)) = \delta((ab), (cd))$, (angles orientés de droites).

3.2.1. ♠. Soient a, b, c trois points deux à deux distincts de E . Montrez la formule :

$$\widehat{(\vec{ab}, \vec{ac})} + \widehat{(\vec{ca}, \vec{cb})} + \widehat{(\vec{bc}, \vec{ba})} = \pi \quad \text{dans } \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

3.2.2. *Remarque.* Cette relation fournira la troisième démonstration de 2.4 en 3.4.

3.2.3. ♠. Soit abc un triangle isocèle en a . Montrez la formule :

$$\widehat{(\vec{ca}, \vec{cb})} = \widehat{(\vec{bc}, \vec{ba})} \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

(On utilisera la symétrie par rapport à la médiatrice de $[bc]$).

3.3. **Cercle et angles.** Le théorème essentiel concernant les angles orientés est le suivant :

3.3.1. **Théorème de l'angle inscrit.** Soient C un cercle de centre o , a, b deux points de C . Soit x un point de C , distinct de a et b . On a la formule :

$$\widehat{(\vec{oa}, \vec{ob})} = 2 \widehat{(\vec{xa}, \vec{xb})} \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

(l'angle au centre est le double de l'angle inscrit).

Soit t un point de la tangente en a à C distinct de a . On a la formule (**théorème de l'angle inscrit limite**) :

$$\widehat{(\vec{oa}, \vec{ob})} = 2 \widehat{(\vec{at}, \vec{ab})} \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

3.3.2. ♠. Prouvez ce théorème. On commencera par traiter le cas où b est le point diamétralement opposé à x . Dans ce cas on appliquera 3.2.1 et 3.2.3 au triangle oxa .

3.3.3. ♠. 1) Soit Γ un cercle de diamètre $[bc]$ et soit a un point de Γ distinct de b et c . Montrez que le triangle abc est rectangle en a .

2) Réciproquement, si abc est rectangle en a , montrez que a est sur le cercle de diamètre $[bc]$. Si a' est le milieu de $[bc]$ on a donc $aa' = \frac{bc}{2}$.

Le corollaire suivant est le plus important de tous les résultats concernant les angles :

3.3.4. **Corollaire : condition de cocyclicité.** Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan affine euclidien E . Alors, a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si on a l'égalité d'angles (orientés de droites) $(ac, ad) = (bc, bd)$.

3.3.5. ♠. Prouvez le corollaire (pour la réciproque on utilisera le sens direct).

3.3.6. ♣. Soient abc un triangle, b', c' les pieds des hauteurs issues de b et c et h l'orthocentre de abc .

Montrez que le symétrique h' de h par rapport au côté $[bc]$ est sur le cercle circonscrit (on montrera les égalités : $(h'b, h'c) = -(hb, hc) = -(hb', hc') = (hc', hb') = (ac', ab')$).

L'intérêt principal des angles orientés réside dans ce fait qu'ils permettent de ne pas distinguer plusieurs cas de figure. Cependant, comme ils ne peuvent intervenir qu'au lycée, il est indispensable d'apprendre aussi à raisonner sur la figure à l'aide des angles non orientés qui restent l'outil principal pour le collège.

3.4. Signe des angles orientés et arc capable.

3.4.1. **Définition.** Si $\bar{\theta}$ est un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (donc un angle orienté) distinct de 0 et π , son **signe** est, par définition celui de $\sin \theta$.

Attention, la somme de deux angles positifs n'est pas nécessairement un angle positif.

3.4.2. ♠. Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée directe et soient \vec{x} et \vec{y} deux vecteurs non colinéaires. Montrer que l'angle $\widehat{\vec{x}, \vec{y}}$ est positif si et seulement si l'application linéaire \vec{f} qui envoie \vec{i} sur \vec{x} et \vec{j} sur \vec{y} est de déterminant positif ou encore $\det_{\vec{i}, \vec{j}}(\vec{x}, \vec{y}) > 0$.

3.4.3. ♠. Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs unitaires. On suppose que \vec{y} est entre \vec{x} et \vec{z} , cf. I 8.4.1. Montrez que $\widehat{\vec{x}, \vec{y}}, \widehat{\vec{y}, \vec{z}}$ et $\widehat{\vec{x}, \vec{z}}$ sont de même signe. Donnez une nouvelle démonstration de I 8.4.3 (on utilisera II 4.4.3).

3.4.4. ♠. Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs avec \vec{y} et \vec{z} non colinéaires à \vec{x} et soit \vec{D} la droite vectorielle engendrée par \vec{x} . Montrez que les angles $\widehat{\vec{x}, \vec{y}}$ et $\widehat{\vec{x}, \vec{z}}$ sont de même signe si et seulement si \vec{y} et \vec{z} sont dans le même demi-plan limité par \vec{D} . (On supposera les vecteurs unitaires, on complétera \vec{x} en une base orthonormée directe \vec{x}, \vec{x}' et on évaluera \vec{y} et \vec{z} sur cette base.)

3.4.5. ♠. Soient a, b, c trois points non alignés de l'espace affine euclidien E . Montrez que les trois angles $(\vec{bc}, \vec{ba}), (\vec{ca}, \vec{cb}), (\vec{ab}, \vec{ac})$ sont de même signe (on pourra utiliser une base orthonormée directe de premier vecteur $\vec{bc}/\|\vec{bc}\|$ ou utiliser le déterminant). En utilisant 3.2.1, montrez que la somme des angles (non orientés) d'un triangle vaut π (troisième démonstration).

3.4.6. ♠. Soient a, b, c (resp. a, b, d) trois points non alignés de E . Montrez que c et d sont dans le même demi-plan limité par (ab) si et seulement si (\vec{ca}, \vec{cb}) et (\vec{da}, \vec{db}) sont de même signe.

3.4.7. ♠. Montrez que l'ensemble des points m qui vérifient $(\vec{ma}, \vec{mb}) = (\vec{ca}, \vec{cb})$ est l'arc $\mathcal{A} = \widehat{ab}$ du cercle circonscrit Γ à abc qui contient c (c 'est l'**arc capable** défini par les points a, b et l'angle (\vec{ca}, \vec{cb})). Montrez que l'autre arc \widehat{ab} de Γ est l'ensemble des points qui vérifient $(\vec{ma}, \vec{mb}) = (\vec{ca}, \vec{cb}) + \pi$.

3.4.8. ♠. Montrez que l'ensemble des points m qui vérifient $\widehat{amb} = \widehat{acb}$ est l'union de \mathcal{A} et de son symétrique par rapport à (ab) . Montrez que si m est dans $\Gamma - \mathcal{A}$ on a $\widehat{amb} = \pi - \widehat{acb}$.

Sur les figures suivantes on a porté en traits pleins les ensembles associés aux différents types d'angles. La figure 1 représente l'arc capable, ensemble des m tels que $(\vec{ma}, \vec{mb}) = (\vec{ca}, \vec{cb})$, la figure 2 l'ensemble des n tels que $(\vec{na}, \vec{nb}) = (\vec{ca}, \vec{cb}) + \pi$. Sur la figure 3 on a dessiné le cercle circonscrit à abc , ensemble des m et n tels que $(ma, mb) = (na, nb) = (ca, cb)$. La figure 4 décrit l'ensemble des m et p tels que $\widehat{amb} = \widehat{apb} = \widehat{acb}$. Enfin, la figure 5 présente l'ensemble des n et q tels que $\widehat{anb} = \widehat{aqb} = \pi - \widehat{acb}$.

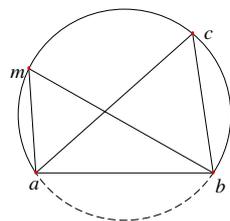


Figure 1

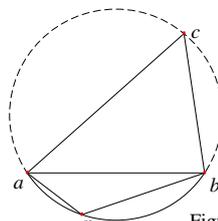


Figure 2

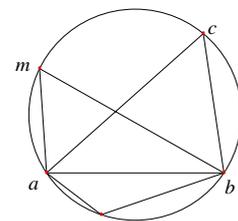


Figure 3

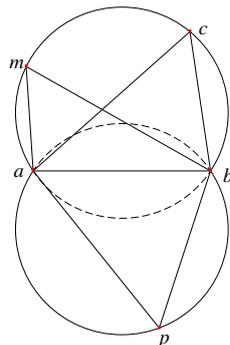


Figure 4

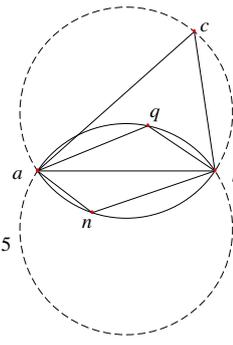


Figure 5

3.4.9. ♠. Démontrez le critère de cocyclicité suivant utilisant les angles non orientés.

Soient a, b, c, d des points du plan, avec a, b distincts.

1) Si c et d sont dans le même demi-plan ouvert limité par (ab) les points a, b, c, d sont cocycliques si et seulement si on a $\widehat{acb} = \widehat{adb}$.

2) Si c et d sont dans des demi-plans ouverts distincts (toujours limités par (ab)) les points a, b, c, d sont cocycliques si et seulement si on a $\widehat{acb} = \pi - \widehat{adb}$.

3) Préciser les angles \widehat{acb} et \widehat{adb} dans le cas où les quatre points sont alignés.

3.4.10. ♡. Reprendre 3.3.6 à l'aide du critère de cocyclicité ci-dessus. (On utilisera le cercle circonscrit à $ac'hb'$ (pourquoi existe-t-il ?) et on prendra garde aux différents cas de figures).

3.4.11. ♣. **Construction de l'arc capable** On considère deux vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} et deux points distincts a et b . Construire l'ensemble des points m tels que $(\vec{ma}, \vec{mb}) = (\vec{u}, \vec{v})$. On pourra utiliser le théorème de l'angle inscrit limite (3.3.1).

3.4.12. ♣. **Extrait d'une épreuve écrite de CAPES.** Soient a, a' et m trois points non alignés du plan. Déterminer le centre et l'angle des deux rotations qui envoient a sur a' et la droite (am) sur la droite $(a'm)$. Construire les centres.

3.5. Bissectrices.

3.5.1. **Proposition.** Soient D_1, D_2 deux droites sécantes en o . Il y a exactement deux droites Δ passant par o qui vérifient $(D_1, \Delta) = (\Delta, D_2)$ (angles orientés de droites). Ces droites Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires. Ce sont les axes des seules réflexions qui échangent D_1 et D_2 . On les appelle **bissectrices** du couple de droites (D_1, D_2) .

Démonstration. Soit \vec{u}_i un vecteur unitaire de D_i . Posons $\varphi = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. On cherche une droite Δ , dirigée par un vecteur unitaire \vec{v} tel que $(\vec{u}_1, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}_2) \pmod{\pi}$. Si on pose $\theta = (\vec{u}_1, \vec{v})$ on a donc à résoudre $2\theta = \varphi$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, soit encore, dans \mathbb{R} , $2\theta = \varphi + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On voit qu'il y a deux solutions : $\theta = \varphi/2$ et $\theta = \varphi/2 + \pi/2$. \square

3.5.2. ♠. Prouvez les autres assertions.

3.5.3. ♠. Montrez qu'un point m est sur l'une des bissectrices de D_1 et D_2 si et seulement si il est équidistant de D_1 et D_2 .

3.5.4. **Proposition.** Soit abc un triangle et soient Δ_1, Δ_2 les bissectrices du couple de droites (ab, ac) .

- (1) Une seule des deux droites Δ_i (disons Δ_1) coupe le segment $[bc]$ (en un point a'). On l'appelle **bissectrice intérieure** de l'angle \hat{a} du triangle. C'est l'axe de la réflexion échangeant les demi-droites $[ab]$ et $[ac]$. On a $(\vec{ab}, \vec{aa'}) = (\vec{aa'}, \vec{ac})$ et donc, a fortiori, $\widehat{baa'} = \widehat{caa'}$. La droite Δ_2 est la **bissectrice extérieure**.
- (2) Le point a' est le barycentre de (b, ac) et (c, ab) .
- (3) Les trois bissectrices intérieures du triangle sont concourantes en un point ω . Ce point est le centre du cercle inscrit dans le triangle abc (i.e. un cercle contenu dans le triangle et tangent aux côtés). Il est barycentre de $(a, bc), (b, ca), (c, ab)$.
- (4) La bissectrice intérieure de \hat{a} et les bissectrices extérieures de \hat{b} et \hat{c} sont concourantes en un point ω_a . Ce point est centre du cercle exinscrit au triangle "dans l'angle \hat{a} ", i.e. un cercle tangent aux trois côtés du triangle, inclus dans le secteur saillant limité par $[ab]$ et $[ac]$ et ne rencontrant pas les autres secteurs saillants limités par les côtés.

3.5.5. ♠. Voici des indications pour prouvez cette proposition.

Dans le triangle abc , on note Δ_a (resp. Δ'_a) la bissectrice intérieure issue de a (resp. l'autre bissectrice ou bissectrice extérieure) et δ_a l'une de ces deux droites et de même en b et c .

- (1) Soient \vec{u} (resp. \vec{v}) le vecteur directeur unitaire de la demi-droite $[ab]$ (resp. $[ac]$). Donner les équations de Δ_a et Δ'_a dans le repère $(a; \vec{u}, \vec{v})$. En déduire les coordonnées barycentriques de a' .
- (2) Quelle est l'image de (ac) par $\sigma_{\delta_b} \circ \sigma_{\delta_a}$? En déduire que δ_a et δ_b sont sécantes.

On note ω (resp. $\omega_a, \omega_b, \omega_c$) le point d'intersection de Δ_a et Δ_b (resp. Δ'_b et Δ'_c, Δ'_c et Δ'_a, Δ'_a et Δ'_b).

- (3) On note (α, β, γ) les coordonnées barycentriques dans (a, b, c) d'un point m du plan qu'on supposera distinct des sommets du triangle. Montrer que :

- (a) si $m \in \Delta_a$, alors β et γ sont de même signe.
 - (b) si $m \in \Delta'_a$, alors β et γ sont de signes contraires.
- (4) Montrer que chacun des points ω , ω_a , ω_b et ω_c appartient à une troisième bissectrice que l'on précisera.
- (5) Préciser dans quelle partie du plan se trouvent ces points.
- ♡ On montrera en particulier que a , ω , a' et ω_a sont dans cet ordre sur une même demi-droite issue de a .

3.5.6. ♣. *Propriété du centre du cercle inscrit.* Dans le triangle abc on note ω le centre du cercle inscrit dans le triangle et a' , b' et c' les points d'intersection (distincts de a, b, c) des bissectrices intérieures issues respectivement de a , b et c avec le cercle circonscrit au triangle abc . Montrer que ω est l'orthocentre du triangle $a'b'c'$ (on montrera que a est le symétrique orthogonal de ω par rapport à la droite $(b'c')$).

3.5.7. ♣. Dans le triangle abc , on considère trois bissectrices concourantes δ_a , δ_b et δ_c et l'application $g = \sigma_{\delta_a} \circ \sigma_{\delta_b} \circ \sigma_{\delta_c}$. Quelle est la nature de g ? Déterminer un point fixe et une droite stable par g . En déduire les éléments caractéristiques de g et les construire.

4. UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES

L'isomorphisme entre le groupe des rotations du plan et le groupe des nombres complexes de module 1 va permettre de traiter nombre de problèmes de géométrie plane par le calcul en utilisant la structure de corps de \mathbb{C} (et notamment la multiplication).

4.1. La structure de plan affine euclidien sur \mathbb{C} .

Le corps des nombres complexes \mathbb{C} est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} . C'est donc aussi, canoniquement, un espace affine réel, cf. [GA] I 1.5. Par ailleurs, il y a un unique produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} qui est tel que $(1, i)$ soit une base orthonormée (il est donné par $(x_1 + iy_1 | x_2 + iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2$).

Dans tout ce qui suit on munira \mathbb{C} de cette structure de plan affine euclidien et du repère orthonormé $(0, 1, i)$ que l'on décrètera direct. Les nombres complexes sont donc des **points** de ce plan affine et, si a, b sont dans \mathbb{C} on peut parler de leur distance, du vecteur \vec{ab} ; on peut aussi parler de triangles, de parallèles, etc.

4.2. Géométrie et calcul dans \mathbb{C} .

4.2.1. ♠. Montrez les formules suivantes :

- 1) La distance des points $a, b \in \mathbb{C}$ est $|b - a|$, (ici, il faut absolument proscrire l'écriture de la distance sous la forme ab , à cause de la confusion avec le produit ab des complexes).
- 2) Le produit scalaire des vecteurs $\vec{0a}$ et $\vec{0b}$ est $\operatorname{Re}(a\bar{b})$.
- 3) Pour trois points a, b, c le produit scalaire $(\vec{ab} | \vec{ac})$ vaut $\operatorname{Re}((b - a)\overline{(c - a)})$.

4.2.2. Proposition : Expression des isométries et des similitudes de \mathbb{C} .

1) Les translations de \mathbb{C} sont les applications définies par $\tau(z) = z + b$, avec $b \in \mathbb{C}$. Les rotations sont les applications définies par $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ (i.e. $a = e^{i\theta}$), $a \neq 1$. Le centre de la rotation est le point d'affixe $b/(1 - a)$.

2) Les isométries indirectes sont les applications de la forme $f(z) = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$.

3) Les similitudes directes sont les applications de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

4) Les similitudes indirectes sont les applications de la forme $f(z) = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

4.2.3. ♠. Prouvez cette proposition.

4.2.4. ♠. On donne une rotation par son centre $\omega \in \mathbb{C}$ et par l'image d'un point : $b = \rho(a)$, $a \neq \omega$. Montrez que l'angle de ρ est l'argument de $\frac{b - \omega}{a - \omega}$.

4.2.5. ♠. Soient a, b (resp. a', b') deux points distincts de E . Montrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que l'on ait $s(a) = a'$ et $s(b) = b'$, cf. aussi IV 3.5. Même assertion avec s indirecte.

4.2.6. ♠. *Application.* Soit abc un triangle de \mathbb{C} , ω le milieu de $[bc]$ et soient b' et c' des points tels que les triangles $ab'c$ et $ac'b$ soient rectangles isocèles en b' et c' et extérieurs au triangle abc . Montrez par le calcul (sans supposer quoi que ce soit sur ω) que le triangle $c'\omega b'$ est rectangle isocèle. On suppose $\omega = 0$. Constatez que le calcul est notablement plus simple.

4.3. Utilisation des nombres complexes.

Soit E un plan affine euclidien et supposons que l'on ait à résoudre dans E un problème (P) de géométrie affine euclidienne, c'est-à-dire un problème dont hypothèses et conclusions s'expriment en termes d'alignement, concours, parallélisme, distance, produit scalaire, angle, orthogonalité, etc. On choisit un repère orthonormé $\mathcal{R} = (o, a, b)$ de E . Il existe alors un unique isomorphisme d'espaces affines euclidiens $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ (c'est-à-dire une application affine bijective qui est une isométrie) qui envoie o, a, b sur $0, 1, i$. Bien entendu, cet isomorphisme dépend du choix du repère (o, a, b) .

Comme le problème (P) s'exprime en termes affines euclidiens, il suffit de traiter le problème obtenu dans \mathbb{C} en transportant par φ le problème (P), l'avantage d'être dans \mathbb{C} étant qu'on dispose de la structure de corps donc d'un moyen de calculer.

Par exemple, reprenons le problème vu ci-dessus en 4.2.6, que nous supposons cette fois donné dans un plan affine euclidien quelconque. Pour résoudre ce problème, on choisit un isomorphisme de E sur \mathbb{C} . Si l'on est astucieux on choisit l'origine de E en ω de sorte que l'on a $\varphi(\omega) = 0$. On pose $\varphi(a) = z_a$, $\varphi(b) = z_b$, $\varphi(c) = z_c$, $\varphi(b') = z_{b'}$, $\varphi(c') = z_{c'}$. Ce choix de φ correspond au choix sur E d'une coordonnée complexe appelée **affiche** (z_a est donc l'affiche de a)³¹. Comme φ est une isométrie, les hypothèses faites sur les points de E se transportent à \mathbb{C} . Par exemple $z_a z_{b'} z_c$ est un triangle rectangle isocèle en $z_{b'}$. On peut alors utiliser le résultat établi en 4.2.6 qui indique que $z_{c'} 0 z_{b'}$ est rectangle isocèle. En appliquant l'isomorphisme réciproque φ^{-1} , on en déduit que $c'\omega b'$ est rectangle isocèle.

³¹Quand on note les points avec des lettres majuscules A, B, \dots (ce qui est le cas dans l'enseignement du second degré et dans les problèmes de CAPES), on note en général les affixes avec les minuscules associées a, b, \dots

En fait, il est inutile d'expliciter l'isomorphisme φ (et on peut donc s'épargner de faire les calculs avec les notations z_a , etc. inutilement lourdes). Il suffit de dire : *quitte à choisir un isomorphisme de E sur \mathbb{C} qui envoie ω sur 0, on peut supposer que les points a, b, c, \dots sont dans \mathbb{C} et que 0 est le milieu de $[bc]$ et on peut alors appliquer directement 4.2.6. Cette méthode vaut aussi quand on travaille directement dans \mathbb{C} . Elle permet alors de un repère adapté au problème.*

Il est essentiel de comprendre que l'affixe d'un point a de E dépend fondamentalement du choix d'un repère orthonormé. Cependant, comme on passe d'un repère orthonormé à un autre par une isométrie et que cette transformation préserve les structures euclidiennes, ce choix n'influe pas, en définitive, sur les résultats.

4.4. ♣ Triangles équilatéraux. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. On rappelle que j est une racine cubique de l'unité et qu'on a $1 + j + j^2 = 0$.

4.4.1. Soient α, β, γ trois nombres complexes vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Montrez qu'on a $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$ si et seulement si on a $\beta = j\alpha$ ou $\beta = j^2\alpha$ et qu'alors on a aussi $\gamma = j^2\alpha$ ou $\gamma = j\alpha$, respectivement. (On traitera d'abord le cas $\alpha = 1$.)

4.4.2. Soient a, b, c trois points de \mathbb{C} , $g = \frac{a+b+c}{3}$ leur isobarycentre. Montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $|b-c| = |c-a| = |a-b|$ (le triangle abc est équilatéral),
- ii) $c-a = j(b-c)$ ou $c-a = j^2(b-c)$. Interprétez cette relation en termes de rotation (on l'écrira, par exemple, $a-c = -j(b-c)$).
- iii) $a+bj+cj^2 = 0$ ou $a+bj^2+cj = 0$
- iv) $b-g = j(a-g)$ ou $b-g = j^2(a-g)$. Interprétez cette relation en termes de rotation.
- v) $|g-a| = |g-b| = |g-c|$ (g est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle).
- vi) il existe une similitude directe qui envoie le triangle type $1, j, j^2$ ou le triangle $1, j^2, j$ sur a, b, c .

4.4.3. Soient a, b, c trois points de \mathbb{C} , $g = \frac{a+b+c}{3}$ leur isobarycentre. On considère le polynôme $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$.

a) On pose $Z = z - g$ et $Q(Z) = P(Z+g)$. Montrez que Q n'a pas de terme de degré 2 (on pourra soit utiliser les fonctions symétriques des racines, soit calculer $P''(g)$).

b) Soit ω le centre du cercle circonscrit au triangle abc . Exprimez $\frac{P'(\omega)}{P(\omega)}$ en fonction de ω, g et du rayon du cercle circonscrit. Montrez que le triangle est équilatéral si et seulement si Q n'a pas de terme de degré 1, donc est de la forme : $Q(Z) = Z^3 - k$. Précisez k .

c) Retrouvez le résultat précédent en notant que les sommets d'un triangle équilatéral de centre 0 sont de la forme a, ja, j^2a .

4.5. Similitudes affines.

4.5.1. ♠. *Similitudes affines directes.*

Si a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 0$, on note $f_{a,b}$ la similitude directe de \mathbb{C} qui à z associe $az + b$.

Montrez que, si a est différent de 1, $f_{a,b}$ a un unique point fixe c que l'on précisera. Montrez que $f_{a,b}$ est la similitude directe de centre c , de rapport $|a|$ et d'angle $\text{Arg } a$:

$$f_{a,b} = h(c, |a|) \circ \rho(c, \text{Arg } a) = \rho(c, \text{Arg } a) \circ h(c, |a|).$$

Examinez le cas où a est réel.

4.5.2. ♠. Similitudes affines indirectes.

Si a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 0$, on note $\phi_{a,b}$ la similitude indirecte de \mathbb{C} qui à z associe $a\bar{z} + b$.

- (1) Montrez que si c est un point fixe de $\phi_{a,b}$, c 'est aussi un point fixe de $\phi_{a,b} \circ \phi_{a,b}$, mais que la réciproque est fautive. Montrez l'équivalence :

$$\phi_{a,b} \circ \phi_{a,b}(c) = c \Leftrightarrow (1 - |a|^2)c = a\bar{b} + b.$$

- (2) On suppose $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b = 0$.

(a) Montrez que $\phi_{a,b}$ est une symétrie affine orthogonale. Soit D son axe.

(b) Montrez que le point $\frac{b}{2}$, est fixe pour ϕ . (Démontrez-le sans calcul puis par le calcul).

(c) Montrez que la direction de D est la droite d'argument $\alpha = (\text{Arg } a)/2$ (modulo π).

- (3) On suppose $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b \neq 0$.

(a) Montrez que $\phi_{a,b}$ est une symétrie glissée. On écrit la décomposition canonique de $\phi_{a,b}$ sous la forme $\phi_{a,b} = t_{\vec{u}} \circ \phi_{a,b'}$.

(b) Montrez qu'on a $\vec{u} = \frac{a\bar{b} + b}{2}$ et $b' = \frac{b - a\bar{b}}{2}$ (utilisez le carré de $\phi_{a,b}$). Précisez la symétrie $\phi_{a,b'}$.

- (4) On suppose $|a| \neq 1$. Montrez que $\phi_{a,b}$ est une similitude qui n'est pas une isométrie et qu'elle admet un unique point fixe que l'on calculera. Précisez l'écriture de $\phi_{a,b}$ comme composée d'une homothétie et d'une symétrie qui commutent.

4.6. Cercles et similitudes.

4.6.1. ♣. Décrivez le transformé d'un cercle par une similitude.

4.6.2. ♣. Soient deux cercles C_1 et C_2 . Trouvez le lieu des centres des similitudes directes qui transforment C_1 en C_2 et construisez-le. (Étudiez la position du centre de la similitude par rapport aux centres des cercles quand ils sont distincts et utilisez les résultats de III 5.5.4 ou III 6.)

4.6.3. ♣. Soient C_1 et C_2 deux cercles sécants en deux points (distincts) p et q . Soit s la similitude directe de centre p qui transforme C_1 en C_2 . Démontrez que, pour tout point m de C_1 , les points m , $s(m)$ et q sont alignés. Donnez une construction des points $s(q)$ et $s^{-1}(q)$.

4.6.4. ♣. Soit s une similitude directe, a et b deux points distincts du plan et a' et b' leurs images par s . En utilisant 4.6.3, construisez le centre de s . Discutez.

5. CAS D'ISOMÉTRIE DES TRIANGLES

Nous énonçons maintenant les trois cas d'isométrie des triangles. Ces énoncés sont très importants. D'abord, historiquement, ils constituent le fondement de la géométrie d'Euclide, telle qu'on l'enseignait encore au collège au début des années 1960 (à l'époque les transformations n'étaient pas enseignées dans les classes et ces théorèmes étaient, en fait, des axiomes, avec une justification expérimentale, proche de celle d'Euclide, cf. ci-après Annexe 1 pour une discussion). Ils ont été injustement oubliés depuis car ce sont d'excellents outils pour faire de la géométrie (mais ils nécessitent absolument de faire des dessins). Ils viennent d'ailleurs de faire leur réapparition dans les programmes de seconde, voir [R], [B], [DPR], [P2].

Notons que l'appellation traditionnelle de ces énoncés est cas “d'égalité”. Ce mot prêtant à confusion nous dirons plutôt cas d'isométrie dans ce qui suit. On parle aussi parfois de “congruence”.

Le champ d'application des cas d'isométrie est essentiellement la géométrie plane, mais ils sont valables dans un espace affine euclidien quelconque.

Étant donnés deux triangles abc et $a'b'c'$, il s'agit de dire à quelles conditions, portant sur longueurs et angles, il existe une isométrie f telle que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$. C'est donc, une fois encore, une question de transitivité, cf. I 7. Il y a six conditions évidemment nécessaires (les égalités des longueurs des côtés et des angles). Les trois énoncés ci-dessous montrent que trois de ces conditions, convenablement choisies, sont suffisantes. Tous reposent sur l'assertion suivante qui est un cas particulier de I 7.1.1 :

5.1. Lemme fondamental. Soient (\vec{x}, \vec{y}) et (\vec{x}', \vec{y}') deux couples de vecteurs de \vec{E} . Il existe une isométrie vectorielle \vec{f} telle que $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}'$ et $\vec{f}(\vec{y}) = \vec{y}'$ si et seulement on a les trois égalités $\|\vec{x}\| = \|\vec{x}'\|$, $\|\vec{y}\| = \|\vec{y}'\|$ et $(\vec{x} | \vec{y}) = (\vec{x}' | \vec{y}')$.

5.2. Théorème : Premier cas d'isométrie. On suppose que les triangles abc et $a'b'c'$ ont deux côtés “égaux” (i.e. de même longueur) et les angles (non orientés) compris entre ces côtés égaux (par exemple, $ab = a'b'$, $ac = a'c'$ et $\widehat{bac} = \widehat{b'a'c'}$). Alors les triangles sont isométriques (précisément, dans l'exemple, il existe une isométrie f telle que l'on ait $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$).

Démonstration. On commence par envoyer a sur a' par la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$. On est ainsi ramené au cas où $a = a'$, donc au cas vectoriel et il reste à trouver une isométrie vectorielle qui envoie \overrightarrow{ab} et \overrightarrow{ac} sur $\overrightarrow{a'b'}$ et $\overrightarrow{a'c'}$ respectivement. C'est exactement le lemme ci-dessus, en tenant compte de la formule usuelle donnant le produit scalaire en fonction de l'angle non orienté, cf. I 8.2.3. \square

5.2.1. ♠. Donnez un exemple montrant que le résultat n'est pas correct si l'on oublie l'hypothèse que l'angle est compris entre les côtés.

5.2.2. ♠. Donnez une autre démonstration de ce résultat en procédant de proche en proche : on envoie a sur a' par translation, puis le plan (abc) sur $(a'b'c')$, puis b sur b' par rotation, etc.

5.2.3. *Remarque.* Ce théorème (comme les suivants) est intuitivement clair : il signifie que, sous les hypothèses faites, les deux triangles sont “superposables” et c'est ainsi qu'on le justifiait autrefois dans Euclide et au collège.

5.3. Théorème : Deuxième cas d'isométrie. On suppose que les triangles abc et $a'b'c'$ ont deux angles et un côté égaux (par exemple, $ab = a'b'$, $\beta = \widehat{abc} = \widehat{a'b'c'}$ et $\alpha = \widehat{bac} = \widehat{b'a'c'}$; comme la somme des angles d'un triangle vaut π les angles en c et c' sont égaux eux aussi). Alors les triangles sont isométriques (précisément, dans l'exemple, il existe une isométrie f telle que l'on ait $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$).

Démonstration. On se ramène au premier cas. Il suffit de montrer pour cela que ac est déterminé par ab et par les angles α, β, γ . Cela résulte de la formule $ac \sin \gamma = ab \sin \beta$, cf. 2.3.4. \square

5.3.1. ♠. Donnez une démonstration de proche en proche.

5.4. Théorème : Troisième cas d'isométrie. On suppose que les triangles abc et $a'b'c'$ ont leurs trois côtés égaux ($ab = a'b'$, $bc = b'c'$, $ca = c'a'$). Alors les triangles sont isométriques (précisément, dans l'exemple, il existe une isométrie f telle que l'on ait $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$).

Démonstration. On se ramène au premier cas en utilisant la formule d'Al-Kashi. □

5.4.1. ♡. *Généralisation de 5.4.*

Soient E un espace affine euclidien de dimension n quelconque.

1) Montrer qu'un point de E est déterminé par ses distances aux $n + 1$ points d'un repère affine.

2) Soit X une partie de E et soit $f : X \rightarrow E$ une application qui vérifie :

$$\forall a, b \in X \quad d(f(a), f(b)) = d(a, b).$$

Montrez que f est la restriction d'une isométrie de E uniquement déterminée sur le sous-espace affine engendré par X .

5.5. Théorème : cas d'isométrie des triangles rectangles. On suppose que les triangles abc et $a'b'c'$ sont rectangles en a et a' et ont deux côtés égaux (mais pas nécessairement les côtés de l'angle droit, par exemple, $ab = a'b'$, $bc = b'c'$). Alors les triangles sont isométriques (précisément, dans l'exemple, il existe une isométrie f telle que l'on ait $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$).

♠. Démontrez ce théorème.

5.5.1. *Remarque.* En utilisant les angles orientés, on peut donner des cas d'isométrie des triangles qui permettent de conclure à l'existence d'un déplacement envoyant un triangle sur un autre. En pratique, ces résultats sont peu utiles.

5.6. Applications.

Comme nous l'avons dit, l'idée essentielle qui sous-tend l'usage des cas d'isométrie des triangles est encore une fois l'idée de **transitivité**, cf. I 7. En géométrie affine, on sait qu'on peut envoyer un triangle sur n'importe quel autre et cela peut être très utile (cf. [DPR] §8).

En revanche, le groupe des isométries, lui, n'est pas transitif sur l'ensemble des triangles. Dans cette situation, nous avons vu que l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux triangles peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre.

C'est ce que font les cas d'isométrie qui décrivent exactement les orbites du groupe des isométries sur l'ensemble des triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles **sans être obligé d'exhiber celle-ci**.

Nous allons donner des exemples d'application de ces outils. Le principe est toujours le même : on montre, à l'aide des cas d'isométrie, que des triangles sont isométriques en montrant qu'ils ont trois éléments (angles ou côtés, convenablement choisis) égaux et on en déduit l'égalité des autres éléments.

5.6.1. ♣. Soit abc un triangle isocèle de base $[bc]$. La médiatrice de $[ac]$ coupe (bc) en d que l'on suppose extérieur à $[bc]$. On trace (ad) et on porte une longueur $ae = bd$ sur (ad) , de l'autre côté de a par rapport à d . Montrez que cde est isocèle.

Indication : montrez que les triangles adb et cea sont isométriques.

5.6.2. ♣. Soit $abcd$ un parallélogramme. On construit, à l'extérieur de $abcd$ les triangles équilatéraux adp et abq . Montrez que pqc est équilatéral.

Indication : Montrez que les triangles bqc et dcp sont isométriques puis montrez que l'angle en c de pqc vaut $\pi/3$ ou montrez que le triangle aqp est isométrique à l'un quelconque des précédents. (Attention, on montrera qu'il y a deux cas de figure et deux seulement.)

Résolvez cet exercice en utilisant des rotations ou les nombres complexes.

5.6.3. ♣. Soit abc un triangle. On suppose que les hauteurs bb' et cc' sont "égales". Montrez que abc est isocèle.

Indication : montrez que les triangles $ac'c$ et $ab'b$ (ou encore les triangles rectangles $bc'c$ et $cb'b$) sont isométriques.

5.6.4. ♣. Soit $abcd$ un tétraèdre régulier (c'est-à-dire quatre points de l'espace affine euclidien E de dimension 3 qui vérifient $ab = ac = ad = bc = bd = cd$). Montrez que ces points forment un repère affine de E . On considère le projeté orthogonal h de a sur le plan (bcd) . Montrez que h est le centre du triangle équilatéral bcd (on montrera que les triangles abh , ach , adh sont isométriques).

En déduire qu'il existe des tétraèdres réguliers et que deux tétraèdres réguliers de même longueur d'arête sont isométriques.

6. CAS DE SIMILITUDE DES TRIANGLES

La problématique est exactement la même que pour les cas d'isométrie : l'exercice 4.2.5 montre qu'étant donnés deux couples de points on peut toujours envoyer l'un sur l'autre par une similitude et il s'agit maintenant d'avoir un critère de transitivité sur les triangles.

6.1. **Premier cas de similitude.** On suppose que les triangles abc et $a'b'c'$ ont deux angles (non orientés) égaux (par exemple $\widehat{a} = \widehat{a'}$ et $\widehat{b} = \widehat{b'}$). Alors ces triangles sont semblables.³² Précisément, dans l'exemple, il existe une similitude s telle que l'on ait $s(a) = a'$, $s(b) = b'$, $s(c) = c'$.

6.1.1. ♠. Démontrez ce théorème.

6.2. **Deuxième cas de similitude.** Soient abc et $a'b'c'$ deux triangles. On suppose qu'on a l'égalité d'angles $\widehat{a} = \widehat{a'}$ et l'égalité de rapports des côtés entourant cet angle : $\frac{a'b'}{ab} = \frac{a'c'}{ac}$. Alors les triangles sont semblables. Précisément, dans l'exemple, il existe une similitude s telle que l'on ait $s(a) = a'$, $s(b) = b'$, $s(c) = c'$.

6.2.1. ♠. Prouvez ce résultat.

³²Les actuels programmes de seconde, rompant avec une tradition de plusieurs siècles, disent "de même forme" au lieu de semblables.

6.3. **Troisième cas de similitude.** Soient abc et $a'b'c'$ deux triangles. On suppose qu'on a l'égalité des rapports des côtés : $\frac{b'c'}{bc} = \frac{c'a'}{ca} = \frac{a'b'}{ab}$. Alors les triangles sont semblables. Précisément, dans l'exemple, il existe une similitude s telle que l'on ait $s(a) = a'$, $s(b) = b'$, $s(c) = c'$.

6.3.1. ♠. Établissez cette assertion.

6.4. **Applications.** Le principe des applications est le même que pour les cas d'isométrie : on utilise les cas de similitude pour conclure à l'existence d'une similitude échangeant les triangles et on en déduit de nouvelles égalités d'angles ou de rapports de longueurs. On renvoie le lecteur à [DPR] pour une discussion autour des cas d'isométrie et de similitude et de leur intérêt par rapport à l'usage des transformations, notamment au collège.

6.4.1. ♣. *Le théorème de Thalès suisse.* Soit abc un triangle rectangle en a et ah la hauteur issue de a . Montrez l'égalité $ah^2 = bh \times ch$. (On montrera que les triangles abh et cah sont semblables.) Donnez d'autres preuves de ce résultat en utilisant les transformations, le produit scalaire ou la trigonométrie. Montrez de même qu'on a $ba^2 = bh \times bc$. (cf. 2.3.3)

6.4.2. ♣. *Puissance.* Soit Γ un cercle de centre o et de rayon R et a un point non situé sur Γ . Deux droites Δ et Δ' passant par a coupent respectivement Γ en b, c et b', c' . Montrez qu'on a $(\overrightarrow{ab} | \overrightarrow{ac}) = (\overrightarrow{ab'} | \overrightarrow{ac'})$. (On montrera que les triangles abc' et $ab'c$ sont semblables.) On retrouve le résultat concernant la puissance de a par rapport à Γ , cf. III 5.3.

6.4.3. ♣. Soit abc un triangle isocèle en a . Une droite passant par a coupe le côté $[bc]$ en d et le cercle circonscrit C en e .

1) Montrez qu'on a $(\overrightarrow{ad} | \overrightarrow{ae}) = ab^2$. (On montrera que les triangles abd et aeb sont semblables. Question subsidiaire : précisez cette similitude, centre rapport et axe.)

2) Quel est le lieu du centre ω du cercle Γ circonscrit au triangle bde quand la droite (ad) varie ? (On considérera la puissance du point a par rapport à ce cercle et on pourra étudier la position du projeté orthogonal de ω sur (bc) quand d varie sur le segment $[bc]$.)

7. POLYGONES

Nous donnons ici, à titre d'application, quelques brèves indications sur les polygones, et notamment les polygones réguliers.

7.1. Lignes polygonales.

7.1.1. **Définition.** Soit n un entier ≥ 2 et soient a_1, a_2, \dots, a_n n points de E tels que $a_i \neq a_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $a_n \neq a_1$. On appelle **ligne polygonale fermée abstraite** une telle suite $\mathcal{L} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. La suite des n segments $[a_1a_2], [a_2a_3], \dots, [a_{n-1}a_n], [a_na_1]$ est la **ligne polygonale fermée associée**. Ces segments sont les **côtés** de \mathcal{L} et les points a_i sont ses **sommets**.

Pour éviter des distinctions fastidieuses entre les segments de la forme $[a_i a_{i+1}]$ (avec $1 \leq i \leq n-1$) et le segment $[a_n a_1]$, nous utiliserons la convention suivante : nous noterons a_i (pour $i \in \mathbb{Z}$) l'unique point a_j avec $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \equiv i \pmod{n}$. Par exemple, a_{n+1} n'est autre que a_1 et a_0 est un autre nom pour a_n . Avec cette convention, on appelle **côtés consécutifs** de \mathcal{L} les côtés $[a_{i-1} a_i]$ et $[a_i a_{i+1}]$ pour $i \in \mathbb{Z}$.

Quelques petits dessins suffiront à convaincre le lecteur que les lignes polygonales peuvent être extrêmement compliquées. Par exemple, on peut avoir $a_p = a_q$ pour $p \not\equiv q \pmod{n}$

(une boucle), voire $a_p = a_{p+2}$ (un aller et retour). Nous étudierons uniquement ici celles qui donnent des polygones convexes. Nous admettrons le résultat suivant sur les polygones convexes :

7.2. Polygones convexes.

7.2.1. **Proposition-définition.** Soit $\mathcal{L} = (a_1, \dots, a_n)$ une ligne polygonale fermée avec $n \geq 3$. On suppose que la condition suivante (de convexité) est réalisée :

(C) pour chaque $i = 1, \dots, n$ tous les sommets autres que a_i et a_{i+1} sont dans un même demi-plan ouvert P_i limité par $(a_i a_{i+1})$.

On a les propriétés suivantes :

(1) Les sommets de \mathcal{L} sont distincts, les côtés de \mathcal{L} ne se coupent que s'ils sont consécutifs dans \mathcal{L} et leur intersection est alors réduite au sommet commun.

(2) Les deux ensembles suivants sont égaux :

– l'intersection des demi-plans fermés \overline{P}_i ,

– l'enveloppe convexe des points a_i .

L'ensemble \mathcal{P} ainsi défini est appelé **polygone convexe**.

(3) La frontière de \mathcal{P} est la réunion des côtés de \mathcal{L} .

7.2.2. ♠. Prouvez l'assertion 1.

7.2.3. ♠. Montrez que si m est un point intérieur à un polygone convexe \mathcal{P} et D une demi-droite issue de m , D coupe la frontière en un unique point. (cf. [GA] III 3).

7.2.4. ♠. Montrez que a est un sommet de \mathcal{L} si et seulement si a est un point extrémal de \mathcal{P} (i.e. $a \in \mathcal{P}$ et a n'est pas barycentre de deux points $x, y \in \mathcal{P}$ distincts de a , ou encore, $\mathcal{P} - \{a\}$ est encore convexe).

7.2.5. ♠. Montrez que les côtés de \mathcal{L} sont exactement les segments joignant deux sommets et contenus dans la frontière de \mathcal{P} . Montrez que les côtés sont les segments $[ab]$ contenus dans \mathcal{P} tels que $\mathcal{P} - [ab]$ est encore convexe et $\mathcal{P} \cap (ab) = [ab]$.

Les deux remarques ci-dessus montrent que les sommets et les côtés de \mathcal{L} sont intrinsèquement liés à \mathcal{P} . On peut donc poser la définition suivante :

7.2.6. **Définition.** Les sommets et les côtés de \mathcal{P} sont, par définition, ceux de \mathcal{L} .

7.2.7. ♠. Soient a, b, c trois points non alignés.

1) Vérifiez que l'enveloppe convexe $\text{Conv}(a, b, c)$ est l'intersection des demi-plans fermés $P_a \cap P_b \cap P_c$ définis comme en 7.2.1. Le polygone convexe ainsi obtenu est le triangle abc .

2) Soit d un point tel que l'on ait $\vec{ab} = \vec{dc}$. Montrez que la ligne polygonale (a, b, c, d) définit un polygone convexe (le parallélogramme $abcd$). Vérifiez la proposition 7.2.1 dans ce cas.

7.3. Angles d'un polygone convexe.

7.3.1. **Définition.** Soit \mathcal{P} un polygone convexe, a_1, \dots, a_n ses sommets. Les angles de \mathcal{P} sont les angles (non orientés) $\widehat{a_{i-1} a_i a_{i+1}}$ pour $i = 1, \dots, n$.

7.3.2. **Proposition.** Soit \mathcal{P} un polygone convexe à n côtés. La somme des angles de \mathcal{P} est égale à $(n - 2)\pi$.

Démonstration. On va commencer par montrer le lemme suivant :

7.3.3. **Lemme.** Soit \mathcal{P} un polygone convexe et o un point intérieur. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^n \widehat{a_i o a_{i+1}} = 2\pi.$$

Démonstration. Rappelons, cf. 2.1.2, que les secteurs saillants $[a_i o a_{i+1}]$ sont des cônes de sommet o et que leur angle est exactement $\widehat{a_i o a_{i+1}}$. Comme ces secteurs sont réunions des demi-droites $[op]$ pour $p \in [a_i a_{i+1}]$, il résulte de 7.2.3 que leur réunion est le secteur (rentrant) égal au plan tout entier. Le même argument montre que deux secteurs saillants distincts $[a_i o a_{i+1}]$ et $[a_j o a_{j+1}]$ se coupent si et seulement si les segments $[a_i a_{i+1}]$ et $[a_j a_{j+1}]$ se coupent ce qui ne se produit que si on a $i = j + 1$ ou $j = i + 1$, et dans ce cas l'intersection est l'une des demi-droites $[o a_i]$ ou $[o a_{i+1}]$. On peut donc appliquer 2.2.4 et on a le résultat.

7.3.4. *Démonstration de la proposition.* On choisit un point o intérieur à \mathcal{P} . On a alors pour chaque i : $a_{i-1} \widehat{a_i a_{i+1}} = \widehat{a_{i-1} a_i o} + \widehat{o a_i a_{i+1}}$. (Cela vient de 2.2.4 et du fait que le secteur saillant limité par les demi-droites $[a_i a_{i-1}]$ et $[a_i a_{i+1}]$ est l'intersection $\overline{P}_{i-1} \cap \overline{P}_i$, donc contient \mathcal{P} et o dans son intérieur). La somme des angles des n triangles $o a_i a_{i+1}$, qui vaut $n\pi$, est donc égale à la somme des angles du polygone, plus la somme des angles en o : $\widehat{a_i o a_{i+1}}$. Comme celle-ci vaut 2π par le lemme, on a le résultat. \square

7.3.5. *Remarque.* On peut montrer que cette propriété est encore vraie pour un polygone concave (non croisé).

7.4. **Définition.** Soit \mathcal{P} un polygone convexe. L'ensemble des isométries $f \in Is(E)$ qui vérifient $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ est un sous-groupe de $Is(E)$ que l'on note $Is(\mathcal{P})$.

7.4.1. \spadesuit . Montrez que si f est une isométrie de $Is(\mathcal{P})$, f permute les sommets de \mathcal{P} et ses côtés (utilisez 7.2.4). Montrez que $Is(\mathcal{P})$ est un groupe fini.

7.4.2. \spadesuit . Montrez que les éléments de $Is(\mathcal{P})$ ont un point fixe commun. Montrez que les éléments de $Is(\mathcal{P})$ sont des rotations ou des symétries axiales.

7.4.3. \clubsuit . Déterminez le groupe des isométries d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un losange. (Pour le carré, voir 7.6.1).

7.5. Polygones convexes réguliers.

7.5.1. **Proposition-définition.** Soit \mathcal{P} un polygone convexe, a_1, \dots, a_n ses sommets. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Tous les côtés de \mathcal{P} ont même longueur et tous ses angles sont égaux.
- (2) Tous les côtés de \mathcal{P} ont même longueur et tous ses sommets sont situés sur un cercle.
- (3) Il existe une rotation $\rho \in Is(\mathcal{P})$, d'angle $\pm 2\pi/n$, qui vérifie $\rho(a_i) = a_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On dit que \mathcal{P} est **régulier** s'il vérifie l'une de ces propriétés. Le cercle contenant les sommets de \mathcal{P} est appelé **cercle circonscrit** à \mathcal{P} et son centre o est appelé³³ **centre de \mathcal{P}** .

³³Si n est impair o est encore l'isobarycentre des sommets de \mathcal{P} , mais n'est plus centre de symétrie, cf. 7.6.1.

Démonstration. Le fait que (3) implique (1) est clair car une rotation conserve les longueurs et les angles. Montrons (1) \implies (2). Il suffit de montrer que quatre sommets consécutifs a_{i-1}, a_i, a_{i+1} et a_{i+2} sont cocycliques. Considérons les bissectrices intérieures des angles en a_i et a_{i+1} du polygone. Elles sont sécantes (\spadesuit prouvez-le !). Soit o leur point commun. Comme les angles en a_i et a_{i+1} sont égaux, le triangle $oa_i a_{i+1}$ est isocèle en o et on a donc $oa_i = oa_{i+1}$. Il suffit de montrer qu'on a aussi $oa_i = oa_{i-1}$ et $oa_{i+2} = oa_{i+1}$. Pour cela on considère les triangles $oa_i a_{i-1}$ et $oa_i a_{i+1}$. Ils ont en commun le côté oa_i , les côtés $a_{i-1} a_i$ et $a_i a_{i+1}$ sont égaux par hypothèse, enfin, les angles en a_i de ces triangles sont égaux puisque (oa_i) est bissectrice de l'angle du polygone. On en déduit que les triangles sont isométriques (premier cas d'isométrie) et on a aussi $oa_i = oa_{i-1}$. L'autre égalité se montre de la même façon.

Montrons enfin (2) \implies (3). Soit o le centre du cercle circonscrit à \mathcal{P} . On considère les triangles $oa_i a_{i+1}$. Ils sont tous isométriques (par le troisième cas d'isométrie). Leurs angles (non orientés) en o sont donc tous égaux et, en vertu de 7.3.3, ils valent tous $2\pi/n$. Quitte à changer l'orientation du plan on peut supposer qu'on a $(\overrightarrow{oa_1}, \overrightarrow{oa_2}) = +2\pi/n$. Montrons alors que l'on a aussi $(\overrightarrow{oa_2}, \overrightarrow{oa_3}) = +2\pi/n$. Sinon, on aurait $(\overrightarrow{oa_2}, \overrightarrow{oa_3}) = -2\pi/n$, d'où $(\overrightarrow{oa_1}, \overrightarrow{oa_3}) = 0$ et cela contredirait le fait que la demi-droite $[oa_1)$ ne coupe \mathcal{L} qu'en a_1 . On montre de même qu'on a $(\overrightarrow{oa_i}, \overrightarrow{oa_{i+1}}) = +2\pi/n$ pour tout i . Mais alors, la rotation ρ de centre o et d'angle $2\pi/n$ convient. \square

7.5.2. *Remarque.* De même, on peut montrer directement l'implication (2) \implies (1) à l'aide des cas d'isométrie, mais on peut aussi prouver toutes les implications en utilisant des symétries axiales.

7.5.3. \spadesuit . Montrez qu'un polygone qui a un nombre impair de côtés, dont les angles sont égaux et dont les sommets sont sur un cercle est régulier. Montrez que l'assertion analogue est fautive dans le cas d'un nombre pair de côtés (regardez d'abord le cas $n = 4$, puis construire un contre-exemple pour n'importe quel nombre pair $2p \geq 6$ de côtés en coupant astucieusement les sommets d'un polygone régulier à p côtés).

7.5.4. \spadesuit . Montrez que deux polygones réguliers à n côtés sont semblables.

7.5.5. *Exemple type.* Si on se place dans le plan complexe, l'enveloppe convexe des racines n -èmes de l'unité $e^{2ik\pi/n}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ est un polygone régulier.

7.6. Groupe diédral \mathbb{D}_n .

7.6.1. **Proposition.** *L'ensemble des isométries qui conservent un polygone régulier à n côtés \mathcal{P} est un groupe, appelé groupe diédral \mathbb{D}_n . Il contient $2n$ éléments : les n rotations de centre o et d'angles $\frac{2k\pi}{n}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ et n symétries axiales :*

Si n est pair, $n = 2p$, le point o est centre de symétrie. La médiatrice du côté $[a_i a_{i+1}]$ est aussi médiatrice du côté $[a_{i+p} a_{i+p+1}]$. La droite (oa_i) , bissectrice de l'angle $\widehat{a_i}$ est aussi bissectrice de $\widehat{a_{i+p}}$. Les axes de symétries sont les p médiatrices et les p bissectrices.

Si n est impair, $n = 2p + 1$, le point o n'est pas centre de symétrie, la médiatrice du côté $[a_i a_{i+1}]$ est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{a_{i-p}}$. Les n axes de symétries sont les n médiatrices-bissectrices.

7.6.2. \spadesuit . Prouvez cette proposition.

7.7. Pentagone et décagone réguliers. Dans le plan complexe, on considère le cercle unité C et le pentagone régulier "standard", dont les sommets sont les racines cinquièmes de l'unité

$$A = 1, \quad B = \zeta = e^{2i\pi/5} \quad C = \zeta^2 \quad D = \zeta^3 = \zeta^{-2} \quad E = \zeta^4 = \zeta^{-1} = \bar{\zeta}$$

On note A' le point d'affixe -1 et P celui d'affixe i .

7.7.1. On pose $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$ et $\beta = \zeta^2 + \zeta^{-2}$.

- (1) Montrer que $\zeta, \zeta^2, \zeta^{-2}$ et ζ^{-1} sont les racines du polynôme $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
- (2) Montrer que α et β sont les racines du polynôme $X^2 + X - 1$. En déduire les égalités suivantes : $2 + \alpha = \beta^2$ et $2 + \beta = \alpha^2$.
- (3) Calculer les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

7.7.2. *Constructions du pentagone régulier.*

- (1) On trace le cercle Γ' de centre ω' d'affixe $-\frac{1}{4}$ passant par le point B' d'affixe $\frac{i}{2}$.
Montrer que Γ coupe l'axe des réels aux points $\alpha/2$ et $\beta/2$.
(On peut déterminer une équation de Γ et faire le calcul, mais il est plus astucieux d'utiliser la somme et le produit des racines de l'équation $X^2 + X - 1$ et la puissance de l'origine par rapport à Γ .)
Donner une construction du pentagone régulier à la règle et au compas.
- (2) Donner une construction analogue à la précédente mais utilisant le cercle Γ de centre $\omega = -\frac{1}{2}$ et passant par le point P . On notera Q le point d'intersection de Γ avec la demi-droite $[OA)$ (quelle est son abscisse ?).
- (3) Montrer que B et E sont les points d'intersection de C et du cercle Γ''' de centre A' passant par Q . En déduire une autre construction du pentagone régulier.
- (4) Montrer que PQ égale AB . En déduire une autre construction du pentagone régulier.

7.7.3. *Décagone régulier convexe.*

- (1) Vérifier que les points d'affixe $1, -\zeta^{-2}, \zeta, -\zeta^{-1}, \zeta^2, -1, \zeta^3, -\zeta, \zeta^4, -\zeta^2$ sont les sommets d'un décagone régulier convexe. On notera T le point d'affixe $-\zeta^{-2}$.
- (2) Montrer que OQ est la longueur du côté du décagone régulier.
- (3) On considère le cercle Γ'' de centre ω passant par 0 . On note R et S les points d'intersection de la droite (ωP) avec Γ'' tels que PR soit inférieur à PS . Montrer que PR est la longueur du côté du décagone régulier.
- (4) Proposer des constructions du décagone régulier et d'autres constructions du pentagone régulier.

7.7.4. *Décagone régulier étoilé.*

- (1) Montrer que PS est la longueur du côté du décagone étoilé et le construire.
- (2) Proposer alors une autre construction du pentagone régulier.

7.7.5. Comparer toutes ces constructions du pentagone régulier.

7.7.6. Proposer une solution des questions 7.7.2 (3) et 7.7.3 (2) à l'aide des cas d'isométrie des triangles.

Partie VI. GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE EN DIMENSION 3

1. LES ISOMÉTRIES VECTORIELLES

Dans ce paragraphe \vec{E} est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 que nous supposons **orienté**. Nous allons classer les isométries vectorielles de \vec{E} en utilisant leurs valeurs propres et donner la forme matricielle des isométries dans une base orthonormée convenable.

1.1. Orientation d'un plan vectoriel de l'espace par un vecteur normal.

1.1.1. **Définition.** Soit \vec{P} un plan vectoriel de \vec{E} et soit \vec{e}_1 un vecteur unitaire orthogonal à \vec{P} . L'orientation de \vec{P} définie par \vec{e}_1 est la suivante : si $\mathcal{B} = (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de \vec{P} , on dit que \mathcal{B} est directe si la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe.

1.1.2. *Remarque.* Attention, si l'on change \vec{e}_1 en $-\vec{e}_1$, l'orientation de \vec{P} est renversée.

1.2. Droites propres et plans stables.

Rappelons que, comme on est en dimension 3, tout endomorphisme de \vec{E} admet 1 ou 3 valeurs propres réelles (comptées avec leur multiplicité).

1.2.1. **Proposition.** Soit \vec{f} une isométrie vectorielle admettant la valeur propre réelle λ , soit \vec{D} une droite propre associée à λ et soit $\vec{P} = \vec{D}^\perp$ le plan orthogonal à \vec{D} . Alors, on a $\lambda = \pm 1$ et le plan \vec{P} est stable par \vec{f} .

Démonstration. Le fait que la valeur propre vaut ± 1 résulte de I 6.1.3 ; la stabilité du plan orthogonal vient de la conservation de l'orthogonalité et de la stabilité de \vec{D} . \square

1.3. Les isométries vectorielles admettant trois valeurs propres réelles.

1.3.1. **Proposition.** Soit \vec{f} une isométrie vectorielle admettant 3 valeurs propres réelles. Alors, \vec{f} est l'identité ou une symétrie orthogonale.

1.3.2. **♠. Démonstration.** Utilisez la proposition 1.2.1 et raisonnez selon la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

1.3.3. **Définition.** Soit \vec{f} la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace \vec{V} de \vec{E} . Il y a quatre cas :

- si $\dim \vec{V} = 3$, \vec{f} est l'identité (isométrie positive),
- si $\dim \vec{V} = 2$, \vec{f} est la réflexion³⁴ de plan \vec{V} (isométrie négative),
- si $\dim \vec{V} = 1$, \vec{f} est le **demi-tour**³⁵ d'axe \vec{V} (isométrie positive),
- si $\dim \vec{V} = 0$, \vec{f} est la symétrie centrale $-\text{Id}_{\vec{E}}$ (isométrie négative).

³⁴On dit aussi "symétrie par rapport au plan \vec{V} "

³⁵On dit aussi "symétrie par rapport à la droite \vec{V} "

1.4. Les isométries vectorielles admettant une seule valeur propre réelle.

1.4.1. **Proposition.** Soit \vec{f} une isométrie vectorielle admettant une unique valeur propre réelle λ , soit \vec{D} la droite propre associée à λ et \vec{P} le plan orthogonal à \vec{D} .

- (1) La restriction de \vec{f} à \vec{P} est une rotation de \vec{P} .
- (2) Si on a $\lambda = 1$ (resp. $\lambda = -1$) l'isométrie \vec{f} est positive (resp. négative).
- (3) Si \vec{e}_1 est un vecteur unitaire de \vec{D} , il existe un unique réel θ modulo 2π tel que la matrice de \vec{f} dans toute base orthonormée directe de premier vecteur \vec{e}_1 soit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Comme $\vec{f}|_{\vec{P}}$ n'a pas de valeur propre réelle, la classification des isométries planes montre que c'est une rotation. Cela prouve les points 1 et 2. On considère l'orientation de \vec{P} définie par \vec{e}_1 . Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base directe de \vec{E} , (\vec{e}_2, \vec{e}_3) est alors une base directe de \vec{P} et si θ est l'angle de la rotation $\vec{f}|_{\vec{P}}$ dans \vec{P} muni de cette orientation, on a bien la matrice annoncée dans \mathcal{B} . \square

1.4.2. **Définition.** Soit \vec{f} une isométrie vectorielle admettant une matrice du type A de 1.4.1 dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

- (1) Dans le cas $\lambda = 1$ et $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, on dit que \vec{f} est la **rotation** vectorielle d'axe orienté (\vec{D}, \vec{e}_1) et d'angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on la note $\vec{p}(\vec{D}, \vec{e}_1, \theta)$.
- (2) Dans le cas $\lambda = -1$ et $\theta \neq 0, \pi \pmod{2\pi}$ on dit que \vec{f} est l'**anti-rotation**³⁶ (vectorielle) d'axe (\vec{D}, \vec{e}_1) et d'angle θ .

1.4.3. *Remarques.*

- (1) Si on change l'orientation de \vec{D} , l'angle de la rotation est changé en son opposé :

$$\vec{p}(\vec{D}, \vec{e}_1, \theta) = \vec{p}(\vec{D}, -\vec{e}_1, -\theta)$$

- (2) A la différence du cas du plan, le groupe $O^+(\vec{E})$ n'est pas commutatif et donc la forme matricielle de 1.4.1 ne vaut que pour des bases particulières.

1.4.4. **♠.** Soit \vec{f} une isométrie de \vec{E} admettant une unique valeur propre réelle λ . On choisit un vecteur propre unitaire \vec{e}_1 relatif à la valeur propre $\lambda = \pm 1$. Montrez que l'angle θ est alors entièrement déterminé par les remarques suivantes :

- (1) On a : $\lambda + 2 \cos \theta = \text{Tr } \vec{f}$.
- (2) Le signe de $\sin \theta$ est le signe de $\det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$ où \vec{x} est un vecteur quelconque non colinéaire à \vec{e}_1 et \mathcal{B} une base directe.

³⁶Attention, nous trouvons commode cette appellation, mais elle n'est pas standard. La plupart des auteurs ne donnent pas de nom spécifique à cette transformation.

1.5. Classification.

1.5.1. **Théorème.** *En dimension 3, les isométries vectorielles positives sont l'identité³⁷, les rotations dont les demi-tours. Les isométries vectorielles négatives sont la symétrie centrale, les réflexions et les antirotations.*

1.5.2. *Matrice d'une isométrie.* En fait, toutes les isométries vectorielles admettent des matrices de la forme A de 1.4.1 (où évidemment λ vaut le déterminant de la matrice). En effet, on retrouve l'identité avec $\lambda = 1$ et $\theta = 0$, les réflexions avec $\lambda = -1$ et $\theta = 0$, les demi-tours avec $\lambda = 1$ et $\theta = \pi$ et la symétrie centrale avec $\lambda = -1$ et $\theta = \pi$. On notera que, sauf pour l'identité et la symétrie centrale, la droite engendrée par \vec{e}_1 est bien déterminée : c'est la droite propre relative à λ .

1.6. **Décomposition en produit de symétries.** Nous montrons maintenant le théorème I 6.3 dans le cas de la dimension 3 :

Théorème.

- (1) Toute isométrie $\vec{f} \in O(\vec{E})$ est produit d'au plus 3 réflexions.
- (2) Toute rotation $\vec{f} \in O^+(\vec{E})$ est produit d'au plus deux demi-tours.

Démonstration.

1) Supposons d'abord $\vec{f} \in O^+(\vec{E})$. Alors il existe une droite \vec{D} et un plan \vec{P} orthogonaux et stables tels que $\vec{f}|_{\vec{D}} = \text{Id}_{\vec{D}}$ et $\vec{f}|_{\vec{P}}$ est une rotation de \vec{P} . Cette rotation plane est produit de deux symétries $\vec{\tau}_1$ et $\vec{\tau}_2$ par rapport à des droites de \vec{P} . Si on appelle $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ les transformations définies par $\vec{\sigma}_i|_{\vec{D}} = \text{Id}_{\vec{D}}$ et $\vec{\sigma}_i|_{\vec{P}} = \vec{\tau}_i$ on voit aussitôt (sur les matrices) que les $\vec{\sigma}_i$ sont des réflexions et qu'on a $\vec{f} = \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$.

Si maintenant on a $\vec{f} \in O^-(\vec{E})$, on prend une réflexion $\vec{\sigma}$ quelconque et on considère $\vec{\sigma}\vec{f}$ qui est dans $O^+(\vec{E})$ donc produit $\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$ de deux réflexions. Mais alors, on a $\vec{f} = \vec{\sigma}\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$ comme annoncé.

2) Soit $\vec{f} \in O^+(\vec{E})$ que l'on écrit comme produit de deux réflexions $\vec{f} = \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$. On a aussi $\vec{f} = (-\vec{\sigma}_1)(-\vec{\sigma}_2)$. On conclut en notant qu'en dimension 3, l'opposé d'une réflexion est un demi-tour, car dans une base convenable on a :

$$\vec{\sigma}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

2. LES ISOMÉTRIES AFFINES

Dans toute cette partie E désigne un espace affine euclidien orienté de dimension 3.

2.1. **Rotations et vissages.** Commençons par donner quelques définitions :

2.1.1. **Définition.** *Soit D une droite, orientée par le choix d'un vecteur \vec{e} non nul de \vec{D} , et soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. La **rotation d'axe orienté** (D, \vec{e}) **et d'angle** θ est l'application affine $\rho(D, \vec{e}, \theta)$ définie par :*

- 1) $\rho(D, \vec{e}, \theta)(a) = a$ pour tout point a de D ,
- 2) $\rho(D, \vec{e}, \theta)$ est la rotation vectorielle $\vec{\rho}$ d'axe (\vec{D}, \vec{e}) et d'angle θ .

³⁷Quand on parle du groupe des rotations, on considère bien sûr l'identité comme une rotation (d'angle nul et d'axe non déterminé).

2.1.2. *Remarque.* Comme $\vec{\rho}$ laisse fixe tous les vecteurs de \vec{D} il suffit d'imposer la relation $\rho(D, \vec{e}, \theta)(a) = a$ pour **un** point $a \in D$.

2.1.3. **Définition.** Soit D une droite, orientée par le choix d'un vecteur \vec{e} non nul de \vec{D} , soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et soit $\vec{v} \in \vec{D}$. Le **vissage d'axe orienté** (D, \vec{e}) , **d'angle** θ **et de vecteur** \vec{v} est l'application affine $\rho(D, \vec{e}, \theta) \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ \rho(D, \vec{e}, \theta)$.

2.2. **Déplacements.** Nous donnons maintenant la liste exhaustive des déplacements de E .

2.2.1. **Théorème.** Les déplacements de E sont les suivants : l'identité, les translations $t_{\vec{v}}$ de vecteur non nul, les rotations $\rho(D, \vec{e}, \theta)$ d'angle non nul et les vissages $\rho(D, \vec{e}, \theta) t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \rho(D, \vec{e}, \theta)$ avec $\theta \neq 0$ et $\vec{v} \in \vec{D}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Démonstration. Soit f un déplacement et \vec{f} l'application linéaire associée. En vertu de 1.5, \vec{f} est une rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si θ est nul, \vec{f} est l'identité, donc f est une translation ou l'identité (cf. [GA] IV 2.1.2). Sinon, comme \vec{f} admet la valeur propre 1, il y a deux cas :

1) ou bien f a un point fixe et dans ce cas elle en a toute une droite et c'est le cas de la rotation,

2) ou bien f n'a pas de point fixe et elle s'écrit comme composée d'une rotation et d'une translation de vecteur non nul qui commutent en vertu du théorème de décomposition. C'est alors un vissage. \square

2.3. **Les isométries négatives.** Nous avons déjà rencontré la plupart des isométries négatives, à l'exception des antirotations :

2.3.1. **Définition.** Soit D une droite de E que nous orienterons en choisissant un vecteur \vec{e} non nul de \vec{D} , soit a un point de D et soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta \neq 0, \pi$. On appelle **antirotation de centre** a , **d'axe** (D, \vec{e}) **et d'angle** θ l'application affine $\varphi = \varphi(a, D, \vec{e}, \theta)$ définie par :

1) $\varphi(a) = a$,

2) $\vec{\varphi}$ est l'antirotation vectorielle d'axe (\vec{D}, \vec{e}) et d'angle θ .

2.3.2. **♠.** Montrer qu'une antirotation est la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation.

Maintenant nous connaissons toutes les isométries négatives de E :

2.3.3. **Théorème.** Les isométries négatives de E sont les suivantes : les symétries centrales σ_a , $a \in E$, les antirotations $\varphi(a, D, \theta)$ de centre a , d'axe D et d'angle θ , les réflexions orthogonales σ_H où H est un plan et les symétries (orthogonales) glissées $\sigma_H t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \sigma_H$ où H est un plan et où l'on a $\vec{v} \in \vec{H}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Démonstration. Cela résulte de 1.4.2 et IV 2.2. Les antirotations vectorielles n'ayant pas la valeur propre 1, les applications affines associées ont un unique point fixe et sont donc des antirotations affines. En revanche, les réflexions ont la valeur propre 1 d'où les deux cas ci-dessus. \square

3. EXERCICES

3.1. ♣ Calcul des éléments caractéristiques d'une isométrie. Soit E un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (o, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Soit f une application affine de E dans E , \vec{f} l'application linéaire associée, A sa matrice dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On pose $b = f(o)$. Lorsque f est une isométrie, l'exercice propose un algorithme (dont on justifiera chaque étape) pour déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . On illustrera les étapes de cette méthode sur les applications proposées à la fin de l'exercice.

3.1.1. Étude de \vec{f} . On vérifie que f est une isométrie en montrant que A est orthogonale ; \vec{f} est alors une symétrie si et seulement si A est symétrique. Dans ce cas, la trace de A indique la nature de cette symétrie.

3.1.2. Étude de f . On calcule le sous-espace $\vec{V} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})$ et on distingue plusieurs cas.

a. $\dim \vec{V} = 3$. On a déjà dû remarquer que \vec{f} est l'identité et f est alors la translation de vecteur \vec{ob} .

b. $\dim \vec{V} = 2$. On a déjà dû noter que \vec{f} est une réflexion. Si le milieu a de $[ob]$ est fixe par f , f est la réflexion par rapport à $a + \vec{V}$. Sinon, f est une réflexion glissée, $f = \sigma_V \circ t_{\vec{\omega}}$ avec $V = a + \vec{V}$ et $\vec{\omega} = \overrightarrow{af(a)}$.

c. $\dim \vec{V} = 1$. Dans ce cas, \vec{f} est une rotation. On oriente \vec{V} en choisissant un vecteur \vec{e}_1 non nul de \vec{V} et on détermine l'angle θ de \vec{f} comme en 1.4.4. On considère alors le réel $\mu = (\vec{ob} | \vec{e}_1)$. Si μ est nul, f est la rotation $\rho(c + \vec{V}, \vec{e}_1, \theta)$ où c est un point fixe de f . Si μ est non nul, on pose $\vec{\omega} = \frac{\mu \vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2}$. Si c est un point fixe de $t_{-\vec{\omega}} \circ f$, f est le vissage d'axe $(c + \vec{V}, \vec{e}_1)$, d'angle θ et de translation $t_{\vec{\omega}}$.

d. $\dim \vec{V} = 0$. L'isométrie f est soit la symétrie centrale par rapport au milieu de $[ob]$ (si \vec{f} est $-\text{Id}$) soit une antirotation : son centre est son unique point fixe c , son axe est $c + \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id})$ et on détermine son angle par la méthode 1.4.4.

3.1.3. Applications. On note α un paramètre réel valant 2 ou 0. Déterminez la nature et la décomposition canonique de l'application f qui au point m de coordonnées (x, y, z) associe le point m' de coordonnées (x', y', z') dans les cas suivants (on peut aussi revoir IV 2.3.3) :

$$a) \begin{cases} x' = \frac{2x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{z}{3} + 1 \\ y' = \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{2z}{3} - \alpha \\ z' = -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} \end{cases} \quad b) \begin{cases} x' = \frac{2x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{z}{3} + 1 \\ y' = -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} + 4 \\ z' = \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{2z}{3} \end{cases}$$

3.2. ♣ Perpendiculaires communes à deux droites. Soient D_1 et D_2 deux droites affines distinctes de E . On se propose de chercher toutes les perpendiculaires communes à D_1 et D_2 .

3.2.1. Montrez que si D_1 et D_2 sont parallèles, toute perpendiculaire commune à D_1 et D_2 est dans le plan affine engendré par D_1 et D_2 . Concluez.

3.2.2. Dans le cas où D_1 et D_2 sont sécantes, déterminez l'intersection d'une droite de direction $\vec{D}_1^\perp \cap \vec{D}_2^\perp$ avec le plan engendré par D_1 et D_2 . Concluez.

3.2.3. On suppose que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires. Montrez qu'il y a une unique droite Δ perpendiculaire à D_1 et D_2 . (On montrera que Δ est l'intersection des plans P_i ($i = 1, 2$) déterminés par D_i et par $\vec{\Delta} = \vec{D}_1^\perp \cap \vec{D}_2^\perp$.)

3.3. ♣ **Isométries conservant deux droites.** Soient D_1 et D_2 deux droites non coplanaires et Δ leur perpendiculaire commune (voir l'exercice précédent). On note a_i le point d'intersection de D_i et Δ .

3.3.1. Montrez que, si x_i est un point de D_i , on a $x_1x_2 \geq a_1a_2$ avec égalité si et seulement si on a $x_1 = a_1$ et $x_2 = a_2$.

3.3.2. Soit G le groupe des isométries conservant globalement l'ensemble $D_1 \cup D_2$. Étudiez l'effet d'un élément de G sur Δ , sur $\{a_1, a_2\}$, sur le milieu m de $[a_1a_2]$. Précisez la liste des éléments et la structure de G (on pourra introduire la droite D'_i parallèle à D_i passant par m et les deux bissectrices Δ' et Δ'' de D'_1 et D'_2).

3.4. ♣ **Droites invariantes.**

3.4.1. Déterminez les droites globalement invariantes par une translation, une rotation (attention au cas du demi-tour), une réflexion, un vissage. (Dans tous les cas on pourra commencer par étudier le problème analogue pour la transformation vectorielle associée).

3.4.2. Soit $f \in Is(E)$ et D une droite telle que $f(D) = D$. Montrez que la restriction de f à D est une translation ou une symétrie centrale.

3.4.3. On suppose que $f \in Is^+(E)$ et que $f|_D$ est une symétrie centrale. Montrez que f est un demi-tour d'axe perpendiculaire à D .

3.5. ♣. Montrez que le produit d'une rotation d'axe Δ et d'une translation de vecteur \vec{u} orthogonal à Δ est une rotation d'axe parallèle à Δ . Déterminez le produit d'une rotation d'axe Δ et d'une translation de vecteur \vec{v} quelconque.

3.6. ♣ **Produit de demi-tours.** Soient D_1, D_2 deux droites distinctes de E et $f = s_{D_1}s_{D_2}$ le produit des demi-tours d'axes D_1 et D_2 .

3.6.1. Montrez que si D_1 et D_2 sont concourantes, f est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

3.6.2. Montrez que si D_1 et D_2 sont parallèles, f est une translation dont on déterminera le vecteur.

3.6.3. Montrez que si D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires, f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques. (On pourra utiliser les questions 1 et 2).

3.7. ♣. Soit ρ une rotation d'axe Δ , $a \in \Delta$ et soit D_1 une droite perpendiculaire à Δ en a .

3.7.1. Montrez qu'il existe une droite D_2 (resp. D'_2) perpendiculaire à Δ en a telle que l'on ait : $\rho = s_{D_1}s_{D_2}$ (resp. $\rho = s_{D'_2}s_{D_1}$).

3.7.2. Soit ρ une rotation d'axe Δ et D une droite perpendiculaire à Δ . Montrez l'égalité : $s_D\rho s_D = \rho^{-1}$.

3.8. ♣. Soit f un vissage d'axe Δ et soit D une droite perpendiculaire à Δ . Montrez qu'il existe une et une seule droite D' telle que l'on ait l'égalité : $f = s_{D'}s_D$.

3.9. ♣ **Produit de réflexions.** Soient P et P' deux plans affines de E sécants suivant une droite Δ . Montrez que le produit des réflexions par rapport à ces plans est une rotation. Dans quel cas le produit est-il commutatif ?

3.10. ♣. Soient a et a' deux points distincts de E .

3.10.1. Quel est l'ensemble des axes des rotations qui transforment a en a' ? (On peut commencer par étudier la question dans un plan contenant a et a' , on cherche alors l'ensemble des centres des rotations).

3.10.2. Soit D une droite non parallèle à (aa') . On considère l'ensemble \mathcal{V} des vissages d'axe parallèle à D qui envoient a sur a' . Quel est l'ensemble des axes des vissages de \mathcal{V} ?

3.11. ♣ **Produit de rotations d'axes concourants.** Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations d'axes D_1 et D_2 distincts et concourants en o .

3.11.1. Montrez que $\rho_1\rho_2$ est une rotation dont l'axe Δ passe par o .

3.11.2. Montrez que les rotations ρ_1 et ρ_2 commutent si et seulement si ce sont deux demi-tours d'axes perpendiculaires. (commutation? pensez conjugué! que deviennent les axes par conjugaison?)

3.11.3. Montrez que les droites D_1, D_2, Δ ne sont pas coplanaires.

3.12. ♣ **Produit de rotations d'axes parallèles.** Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations d'axes D_1 et D_2 parallèles et distincts.

3.12.1. Montrez que le commutateur $\rho_1\rho_2\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}$ est une translation non triviale.

3.12.2. Montrez que le produit $\rho_1\rho_2$ est une translation ou une rotation.

3.13. ♣ **Produit de rotations d'axes non coplanaires.** Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations d'axes D_1 et D_2 non coplanaires. Montrez que $\rho_1\rho_2$ est un vissage (qui n'est ni une translation ni une rotation).

4. DÉCOMPOSITION DE CERTAINES ISOMÉTRIES AFFINES

Le but de ces deux exercices est de démontrer le théorème de décomposition³⁸ des applications affines dans deux cas particuliers.

4.1. **Cas où l'application linéaire associée est une symétrie.** On retrouve dans cet exercice la décomposition canonique des symétries glissées vue en 2.3.3.

Soient E un espace affine de dimension finie n et f une application affine dont l'application linéaire associée \vec{f} est la symétrie par rapport à \vec{V} parallèlement à \vec{W} où \vec{V} et \vec{W} sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \vec{E} . Soient a un point de E , b son image par f et m le milieu de $[ab]$. On note \vec{v} le vecteur $\overrightarrow{mf(m)}$ et g l'application affine $t_{-\vec{v}} \circ f$.

4.1.1. Montrer que g est une symétrie affine dont on précisera les éléments caractéristiques (on notera V l'ensemble de ses points fixes).

4.1.2. On note c le point $g(a)$ et m' le milieu de $[ac]$. Faire la figure en plaçant V , a , b , c , m , m' et \vec{v} , dans le cas où n vaut 2, V est une droite affine ne contenant pas a et \vec{W} est l'orthogonal de \vec{V} .

4.1.3. Montrer que \vec{v} appartient à \vec{V} .

4.1.4. Calculer $f \circ f$.

4.1.5. Conclure quant au théorème de décomposition pour une application affine dont l'application linéaire associée est une involution.

³⁸Il est donc interdit d'utiliser le théorème de décomposition ou la classification des isométries qui en découle dans les démonstrations.

4.2. Cas où l'isométrie vectorielle associée est une rotation.

4.2.1. *Préliminaire.* Montrer que si ϕ est un vissage de décomposition canonique $t_{\vec{u}}\rho(D, \vec{u}, \theta)$ alors \vec{u} est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{a\phi(a)}$ sur \vec{D} pour tout point a de E .

Soient E un espace affine euclidien de dimension 3 et f une application affine dont l'application linéaire associée \vec{f} est une rotation d'axe \vec{D} dirigé par le vecteur \vec{u} et d'angle non nul. On note \vec{P} le plan vectoriel orthogonal à \vec{u} et \vec{p} la projection orthogonale sur \vec{D} .

4.2.2. Montrer que $\overrightarrow{\vec{p}(mf(m))}$ ne dépend pas du point m de E . (On pourra calculer le vecteur $\overrightarrow{af(a)} - \overrightarrow{bf(b)}$ où a et b sont deux points quelconques de E .)

On note \vec{v} ce vecteur de \vec{D} et g l'isométrie affine $t_{-\vec{v}} \circ f$.

4.2.3. Soient a un point fixé de E et P le plan passant par a et dirigé par \vec{P} . Montrer que P est stable par g . En déduire que g admet un point fixe.

4.2.4. Soient g_1 et g_2 deux rotations de E vérifiant $\vec{g}_1 = \vec{g}_2 = \vec{f}$. Montrer que $g_2^{-1} \circ g_1$ est une translation de vecteur appartenant à \vec{P} .

4.2.5. Conclure quant au théorème de décomposition pour une isométrie affine dont l'application linéaire associée est une rotation d'angle non nul.

Annexe 1. LE POINT DE VUE D'EUCLIDE, HILBERT ... ET DU COLLÈGE

1. INTRODUCTION

L'approche de la géométrie euclidienne plane développée ci-dessus s'appuie sur la notion d'espace affine euclidien. Bien entendu, cette approche suppose un certain nombre de prérequis, notamment la notion de nombre réel et, au bout du compte, la théorie des ensembles. Cette présentation, qui, sur le plan mathématique, est efficace et rapide, présente un défaut rédhibitoire du point de vue pédagogique, pour un futur professeur de lycée ou de collège : elle est inutilisable ! En effet, la notion d'espace vectoriel n'est pas enseignée dans le secondaire (l'expérience a été tentée au début des années 1970 et s'est soldée par un échec).³⁹ Les futurs professeurs, munis de cette présentation, sont donc assez démunis. Comme le dit notre collègue Gilbert Arzac : “un enseignant est aussi bien armé avec cette axiomatique qu'une poule avec un couteau pour résoudre les problèmes de l'enseignement de la géométrie.”

Certes, il est important, pour un futur professeur, de dominer les contenus qu'il aura à enseigner et c'est ce qui a motivé l'écriture de ce polycopié, qui est d'ailleurs dans la ligne de l'écrit du CAPES. Cependant, il nous a semblé impossible de ne pas montrer qu'à côté de l'approche vectorielle (qui ne date que du début du XX^{ème} siècle), il y a une autre possibilité, tout aussi rigoureuse. L'objectif des quelques lignes qui suivent est de donner un tout petit aperçu de cette approche.

2. LES AXIOMES D'EUCLIDE-HILBERT POUR LA GÉOMÉTRIE PLANE

2.1. Historique.

On doit au mathématicien grec Euclide (323-283 av. J.-C.) les fameux *Éléments de géométrie* qui faisaient la somme des connaissances de son temps dans le domaine. Dans ce texte, Euclide fonde la géométrie à partir d'un petit nombre de postulats (on dirait plutôt aujourd'hui d'axiomes) dont il déduit toutes les autres propositions. La géométrie euclidienne utilise de façon essentielle les “cas d'égalité” des triangles que nous nous avons rencontrés sous le nom de cas d'isométrie. Chez Euclide le statut de ces “cas d'égalité” n'est pas clair (il en donne une démonstration incomplète).

Une refonte parfaitement rigoureuse de la géométrie euclidienne a été proposée par David Hilbert (1862-1943) en 1899. En particulier, le premier cas “d'égalité” devient un axiome mais les autres sont des théorèmes. Le lecteur curieux et courageux pourra consulter le livre [Hi], très clair mais pas toujours facile. D'autres références abordables sont [Ar] (qui allie plusieurs qualités : il est court, il présente une réflexion utilisable pour un futur professeur), [Ha], [Li]. Nous donnons un aperçu sommaire de quelques uns des axiomes de Hilbert dans le paragraphe suivant. Attention, notre objectif n'est pas de donner une présentation totalement rigoureuse de la géométrie, qui prendrait beaucoup de temps, mais de convaincre le lecteur qu'il est possible de le faire et que c'est plutôt cette démarche qui justifie la progression du collège.

2.2. Les axiomes. Dans le système proposé par Hilbert, on suppose qu'on a un ensemble (appelé **plan euclidien**) dont les éléments sont appelés **points** et qui contient des parties appelées **droites**. On ne définit pas ces objets⁴⁰, mais on précise les relations qui les lient.

³⁹ Au contraire, actuellement, la géométrie élémentaire sert de support intuitif à la notion de vecteur qui va mener à celle d'espace vectoriel.

⁴⁰ D'ailleurs Hilbert signale qu'ils pourraient aussi bien s'appeler tables et chopes de bière.

Bien entendu, pour que la géométrie présente un intérêt pratique, elle doit modéliser la réalité. Le lecteur constatera que c'est bien le cas du système d'Euclide-Hilbert.

2.2.1. Axiomes d'incidence.

Axiome I.1 Par deux points du plan passe une droite et une seule.

Axiome I.2 Toute droite contient au moins deux points.

Axiome I.3 Il existe trois points non alignés.

La droite définie par les points a, b est notée (ab) . Il résulte des axiomes que deux droites distinctes ont au plus un point commun. Deux droites sans point commun sont dites **parallèles**. On suppose vérifié le postulat d'Euclide c'est-à-dire l'axiome P (comme parallèles) ci-dessous :

Axiome P Par un point m non situé sur la droite D passe une parallèle à D et une seule.

En réalité, cet axiome vient bien plus tard chez Hilbert, car on peut faire une bonne partie de la géométrie sans lui et c'est un problème non évident qui a beaucoup agité les mathématiciens jusqu'au dix-neuvième siècle de savoir si cet axiome est nécessaire ou si on peut le déduire des autres. On montre qu'il n'en est rien et qu'il y a des géométries (dites non euclidiennes) dans lesquelles tous les axiomes sont vérifiés (y compris ceux d'ordre, de congruence, etc.) sauf celui-là. Bien entendu, s'il y a des traits communs entre ces géométries, il y a aussi de notables différences (par exemple sur la somme des angles des triangles). On consultera sur ce sujet [Li], [Ha].

2.2.2. *Axiomes d'ordre.* Il s'agit des axiomes régissant la relation "a est entre b et c" pour trois points alignés. Les axiomes de Hilbert sont les suivants :

Axiome B.1 Si b est entre a et c , b est entre c et a .

Axiome B.2 Étant donnés deux points a, b il existe c entre a et b .

Axiome B.3 Étant donnés trois points d'une droite, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres.

Il y a un quatrième **axiome** plus caché (dit **de Pasch**) qui exprime qu'une droite qui rentre dans un triangle par un côté en ressort nécessairement par un autre.

On voit, là encore, qu'il s'agit d'axiomes bien naturels, et le lecteur pourra, sans trop de risque, se fier à sa conception intuitive de cette relation.

La relation d'ordre permet de définir la notion de **segment**, noté $[ab]$, c'est l'ensemble des points situés entre a et b , et la notion de **demi-droite**.

On postule ensuite que chaque droite D partage le plan en deux parties appelées **demi-plans**. Cette notion de demi-plans permet de parler de secteurs.

2.2.3. Axiomes de congruence.

On se donne ensuite une relation d'équivalence entre les segments, appelée congruence. Deux segments équivalents sont dits de même **longueur**. On note ab la longueur de $[ab]$. Il y a bien entendu des axiomes qui précisent cette notion. De même on se donne une relation d'équivalence sur les secteurs : deux secteurs équivalents sont dits de même **angle**. On note \widehat{bac} l'angle associé au secteur (bac) .⁴¹

Enfin, le dernier axiome fondamental est l'axiome de **congruence des triangles** (qui n'est autre que ce que nous avons appelé premier cas d'isométrie) : étant donné un triangle abc , si

⁴¹On notera que dans cette approche il n'y a pas *a priori* de nombre, donc pas de distance ni de mesure d'angle au sens où nous l'entendons.

on a $ab = a'b'$, $ac = a'c'$, $\widehat{bac} = \widehat{b'a'c'}$ on en déduit les autres égalités : $bc = b'c'$, $\widehat{bca} = \widehat{b'c'a'}$ et $\widehat{abc} = \widehat{a'b'c'}$.

Pour être complet il faudrait encore ajouter des axiomes de continuité. Sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur à [Ar] ou [Li]. Bien entendu, la géométrie affine euclidienne que nous avons présentée ici vérifie les axiomes de Hilbert.

À partir des axiomes évoqués ci-dessus on peut faire toute la géométrie (telle que le lecteur l'a apprise au collège et au lycée). On peut aussi retrouver les nombres réels, définir les vecteurs, leur addition et le produit scalaire de deux vecteurs, ce qui permet de montrer que la géométrie d'Euclide est bien la géométrie euclidienne telle que nous l'avons présentée dans ce polycopié.

3. QUEL SYSTÈME D'AXIOMES POUR LE COLLÈGE

La question qui se pose maintenant est de savoir quelle géométrie enseigner au collège. À l'heure actuelle, la géométrie du collège est fondée sur une introduction progressive des transformations (symétrie axiale en sixième, centrale en cinquième, translation en quatrième, rotation en troisième). Pour une discussion sur l'intérêt et les défauts de cette progression, cf. [R], [P1,2], [DPR], etc. Les fondements théoriques de cette présentation ne sont pas très clairs, cf. toutefois [CF].

Parmi les propositions qui se font jour à l'heure actuelle dans les milieux où l'on élabore les futurs programmes que vous aurez à enseigner, l'une est de revenir à une pratique plus proche d'Euclide (notamment par une utilisation plus intensive des invariants : longueurs, aires, angles et par l'usage des cas d'isométrie).

Bien entendu, il n'est pas question de bâtir pour les élèves toute la géométrie sur l'axiomatique d'Euclide-Hilbert en établissant toutes les propriétés : c'est évidemment trop difficile. Par ailleurs, notre sentiment est que l'axiomatique de Hilbert est assez mal adaptée aux nécessités de l'enseignement. Une solution intermédiaire plausible différencierait de Hilbert sur deux points :

- Elle ferait un plus grand usage des nombres (c'est le point faible de la mathématique grecque, que Descartes a bien mis en évidence),
- Elle utiliserait (de manière implicite) un axiome de transitivité d'un groupe (qui serait celui des isométries). Cet axiome permettrait de justifier la méthode de superposition d'Euclide en donnant une consistance à la notion de mouvement et de prouver les cas d'"égalité".

Attention, cette axiomatique ne saurait être qu'à usage des (futurs) professeurs, pas des élèves. Pour eux, la plupart des propriétés que l'on pourrait prendre pour axiomes seraient soit des constatations d'expérience, soit des formulations de faits intuitifs.

Annexe 2. EXPONENTIELLE ET FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Nous montrons dans ce paragraphe l'existence de l'exponentielle admise en II 2.2 et ses principales propriétés.

1. EXPONENTIELLE COMPLEXE

1.1. **Définition.** Pour tout nombre complexe z , on pose

$$\exp z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

On définit ainsi une fonction \exp indéfiniment dérivable de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

1.2. **Propriétés.** On vérifie par le calcul sur les séries entières⁴² les propriétés suivantes :

- $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ (en particulier on a la formule $\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$, de sorte que l'exponentielle ne s'annule pas),
- $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$,
- la dérivée (au sens complexe) de \exp est \exp .

2. EXPONENTIELLE COMPLEXE IMAGINAIRE

Le but de ce paragraphe est la démonstration de la proposition suivante :

2.1. **Proposition.** L'application ε définie par $\varepsilon(x) = \exp(ix)$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif \mathbb{R} dans le groupe multiplicatif \mathbb{U} des nombres complexes de module 1. Son noyau est le sous-groupe de \mathbb{R} des multiples entiers d'un nombre réel strictement positif noté 2π .

Pour tout nombre réel x , $\exp(ix)$ est un nombre complexe de module 1 puisque son conjugué $\exp(-ix)$ est aussi son inverse. Le noyau de ε est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, fermé, puisque c'est l'image réciproque par une application continue du fermé $\{1\}$, différent de \mathbb{R} puisque ε n'est pas constant (sa dérivée n'est pas nulle). Si ε n'est pas injectif, ce sous-groupe n'est pas réduit à 0, il est engendré par son plus petit élément strictement positif.

Il nous reste à démontrer la non-injectivité et la surjectivité de ε , plusieurs méthodes sont possibles. Nous allons étudier ici la fonction cosinus.

2.2. Les fonctions cos et sin.

2.2.1. On définit la fonction cosinus (resp. sinus) comme la partie réelle (resp. imaginaire) de ε . On a donc :

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Les formules de trigonométrie découlent des propriétés de l'exponentielle complexe.

⁴²On utilise le produit de Cauchy de deux séries entières et la dérivation terme à terme d'une série entière.

2.2.2. *La fonction cos s'annule.*

Proposition. *Il existe un réel x_0 strictement positif tel que $\cos x_0$ soit nul.*

Démonstration. En utilisant les propriétés des séries alternées, on montre que $\cos 2$ est majoré par $1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}$ donc strictement négatif. La fonction cosinus qui est continue et vaut 1 en 0 s'annule pour au moins un réel x_0 strictement compris entre 0 et 2. \square

2.3. **Une définition de π .** Comme $\cos(x_0)$ est nul, $\sin(x_0)$ vaut ± 1 , donc on a $\varepsilon(x_0) = \pm i$ et $\varepsilon(4x_0) = 1$ avec $4x_0 \neq 0$. L'homomorphisme ε n'est donc pas injectif.

On note 2π le générateur positif de son noyau :

$$\text{Ker } \varepsilon = 2\pi\mathbb{Z}.$$

Comme ε est un homomorphisme et que 2π est le générateur de son noyau, le complexe $\exp(i\pi)$ solution de $z^2 = 1$ vaut -1 donc $\cos \pi$ vaut -1 (et $\sin \pi$ vaut 0). De même, on montre que $\cos \pi/2$ et $\cos 3\pi/2$ sont nuls, $\pi/2$ est donc le plus petit zéro positif de la fonction cos. On a les formules suivantes :

$$\exp(2i\pi) = 1 \quad \exp(i\pi) = -1 \quad \exp(\pm i\pi/2) = \pm i$$

2.4. **Surjectivité de ε .** Par le théorème de valeurs intermédiaires, la fonction cos prend toutes les valeurs entre -1 et 1 . Soit $z = a + ib$ un élément de \mathbb{U} . Comme a est compris entre -1 et 1 , il existe un réel x tel que $\cos x = a$ et alors b vaut $\pm \sin x = \sin(\pm x)$. Donc z s'écrit $\exp \pm ix$. L'homomorphisme ε est donc surjectif. On en déduit le corollaire suivant.

2.4.1. **Corollaire.** *L'application ε induit un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur le groupe multiplicatif \mathbb{U} .*

2.4.2. *Remarque.* On peut aussi démontrer la surjectivité de ε en montrant que son image est ouverte et fermée.

2.4.3. *Argument d'un nombre complexe.* On appelle **argument du nombre complexe non nul** z et on note $\text{Arg}(z)$ l'élément $\varepsilon^{-1}(z/|z|)$ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si θ est l'argument de z on a donc $z = |z|e^{i\theta}$.

Annexe 3. LONGUEUR DES COURBES

Cette annexe a pour but de donner une définition précise et un mode de calcul de la longueur des courbes planes, et en particulier de donner celle du cercle et de ses arcs, fondamentale pour mesurer les angles.

Dans cette annexe on se place dans un plan euclidien et on suppose qu'on a choisi un repère orthonormé, de sorte qu'on peut supposer $E = \mathbb{R}^2$. Bien entendu, on peut généraliser ce qui suit en toute dimension. Nous dérogeons ici par rapport à nos notations usuelles en notant les points par des lettres majuscules afin de garder les minuscules pour les réels de l'espace des paramètres.

1. INTRODUCTION ET RAPPELS

1.1. **Principes.** Deux principes (dont l'origine est essentiellement expérimentale) sont à la base de la définition des longueurs des courbes planes :

1) La longueur d'un segment de droite $[AB]$ est la distance euclidienne AB .

2) La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre : si on a une courbe Γ qui joint A et B on a $l(\Gamma) \geq AB$.

Plus généralement si on a une ligne polygonale P inscrite dans Γ , donc une suite de points $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ de Γ , la longueur de Γ est plus grande que celle de P , autrement dit on a : $l(\Gamma) \geq l(P) = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$ et l'idée de la définition de la longueur consiste à dire que la longueur de la courbe va être la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites quand celles-ci approchent convenablement Γ , cf. ci-dessous pour des définitions précises.

Nous aurons besoin d'un résultat auxiliaire d'analyse :

1.2. **Théorème : une inégalité.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue et soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^m . On a l'inégalité :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Démonstration. On pose $f = (f_1, \dots, f_m)$. Par définition l'intégrale de f est le m -uplet des intégrales des f_i . Par ailleurs, pour une fonction numérique continue g quelconque on a la formule des sommes de Riemann :

$$\int_a^b g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right).$$

Posons $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$. L'inégalité résulte alors, par passage à la limite, de :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{i=0}^{n-1} f_1(x_i), \dots, \sum_{i=0}^{n-1} f_m(x_i) \right) \right\| &= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (f_1(x_i), \dots, f_m(x_i)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|(f_1(x_i), \dots, f_m(x_i))\|. \end{aligned}$$

□

2. DÉFINITION DE LA LONGUEUR DES COURBES

2.1. Courbes et paramétrages.

2.1.1. **Définition.** On appelle paramétrage d'une courbe plane la donnée d'une application $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ où les fonctions x et y sont supposées continues. La courbe associée à ce paramétrage est l'image $\Gamma = \gamma([a, b])$.

2.1.2. *Remarques.* Attention, cette définition est périlleuse.

1) D'abord, la "courbe" Γ peut-être assez éloignée de l'idée communément admise de courbes. Par exemple elle peut être tout le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ (courbe de Peano). En ce sens, les courbes Γ de classe C^1 par morceaux sont nettement plus raisonnables.

2) La courbe peut être parcourue plusieurs fois par le point $\gamma(t)$ (et, partant, la longueur dépendra de γ et pas seulement de Γ). Une façon de remédier à tout cela consiste à supposer que γ est une bijection sur son image (ou, au moins qu'il n'y a qu'un nombre fini de points doubles i.e. de points m tels que $m = \gamma(t) = \gamma(t')$ avec $t \neq t'$).

2.1.3. **Définition.** On a une relation d'équivalence sur les paramétrages : si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma' : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ en sont deux, on dit qu'ils sont équivalents et on note $\gamma \sim \gamma'$ s'il existe une bijection continue $f : [a, b] \rightarrow [a', b']$ telle que $\gamma = \gamma' \circ f$. Les classes d'équivalence pour cette relation seront appelés les arcs paramétrés.

2.1.4. *Remarques.*

1) On notera qu'il existe des paramétrages équivalents à un paramétrage γ donné et d'origine arbitraire (utiliser une translation de la variable).

2) Si γ et γ' sont équivalents leurs images sont les mêmes.

2.1.5. **Définition.** On a une opération de concaténation des arcs paramétrés. Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma' : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux paramétrages et soit $\gamma'' : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage équivalent à γ' . Soit $\gamma \vee \gamma''$ le concaténé (défini sur $[a, c]$ en mettant bout à bout γ et γ''). Alors, l'arc paramétré correspondant ne dépend que des arcs paramétrés et est appelé le concaténé des arcs γ et γ' .

2.2. Lignes polygonales inscrites.

2.2.1. **Définition.** Soit γ un arc paramétré. Soit \mathcal{A} une ligne polygonale inscrite dans γ (cf. V 7.1.1), donnée par ses sommets A_0, \dots, A_r , $A_i = \gamma(t_i)$ avec $t_0 = a < t_1 < \dots < t_r = b$. La longueur $l(\mathcal{A})$ de cette ligne polygonale est la somme des distances :

$$A_0A_1 + \dots + A_{r-1}A_r.$$

La longueur $l(\gamma)$ de γ est définie comme la borne supérieure, finie ou infinie, des longueurs de toutes les lignes polygonales inscrites dans γ . On dit que γ est **rectifiable** si $l(\gamma)$ est finie.

2.2.2. *Remarques.*

- (1) La notion de ligne polygonale inscrite et celle de longueur sont indépendantes du choix du paramétrage à équivalence près.
- (2) Attention, en revanche, la donnée de $\Gamma = \text{Im}(\gamma)$ ne suffit pas à déterminer la longueur (penser au cas d'un cercle parcouru plusieurs fois). C'est vrai cependant si on se limite aux courbes admettant des paramétrages **bijectifs**⁴³.

⁴³On remarquera que deux paramétrages bijectifs sont équivalents.

- (3) Posons $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$. Comme le segment $[AB]$ est une ligne polygonale particulière, on a $l(\gamma) \geq AB$: on voit que la définition que nous venons de donner respecte notre premier principe : la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

2.3. Proposition. Si γ' est restriction de γ , on a $l(\gamma') \leq l(\gamma)$. On a $l(\gamma \vee \gamma') = l(\gamma) + l(\gamma')$.

2.4. Longueur et transformations. Les résultats suivants découlent aussitôt des définitions :

2.4.1. Proposition. Soit γ un arc paramétré.

a) Si f est une isométrie on a $l(f(\gamma)) = l(\gamma)$.

b) Si h est une homothétie de rapport λ , on a $l(h(\gamma)) = |\lambda|l(\gamma)$.

Démonstration. Si P est une ligne polygonale inscrite dans γ on a $l(f(P)) = l(P)$ (resp. $l(h(P)) = |\lambda|l(P)$) car cette propriété est vraie pour la longueur d'un segment. Si on écrit $l(\gamma)$ comme la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites, on en déduit le résultat. \square

2.5. Longueur et pas. Le résultat suivant (que nous admettrons) donne une version plus intuitive de la longueur des courbes comme limite des longueurs des lignes polygonales dont les longueurs des côtés tendent vers 0 :

2.5.1. Proposition. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré continu. Alors $l(\gamma)$ est la limite des longueurs $l(\mathcal{A})$ des lignes polygonales inscrites lorsque $\sup A_i A_{i+1}$ tend vers 0.

3. LE CAS DES COURBES C^1

On suppose désormais qu'on a un paramétrage $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. On note γ' la dérivée de $\gamma : \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. On a alors le résultat fondamental suivant :

3.1. Théorème. Soit γ un paramétrage C^1 . Alors l'arc associé γ est rectifiable et on a la formule :

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Ici la norme $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Démonstration. Soit \mathcal{A} une ligne polygonale inscrite dans γ . Montrons d'abord l'inégalité

$l(\mathcal{A}) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = I$. On a $x_{i+1} - x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t) dt$ et de même avec y , soit encore

$$\overrightarrow{A_i A_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt.$$

En vertu de 1.2 on en déduit l'inégalité :

$$A_i A_{i+1} \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$$

d'où le résultat.

Comme l'inégalité ci-dessus vaut pour toutes les lignes polygonales on a aussi $l(\gamma) \leq I$.

Pour $t \in [a, b]$, soit γ_t la restriction de γ à $[a, t]$ et posons $L(t) = l(\gamma_t)$. Nous allons maintenant montrer que L est dérivable et de dérivée $\|\gamma'(t)\|$ ce qui achèvera de prouver le théorème. Soit h un réel (disons > 0) et calculons $L(t+h) - L(t)$. Notons M_t et M_{t+h} les points $\gamma(t)$ et $\gamma(t+h)$. En vertu de 2.3, $L(t+h) - L(t)$ est la longueur de l'arc γ restreint à $[t, t+h]$, donc

de l'arc qui joint M_t et M_{t+h} . On a un encadrement de cette longueur en la minorant par la longueur de la corde et en utilisant la majoration $l(\gamma) \leq I$ (appliquée à la restriction de l'arc γ à $[t, t+h]$) :

$$\frac{M_t M_{t+h}}{h} = \frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h} \leq \frac{L(t+h) - L(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(u)\| du.$$

Comme les deux membres extrêmes ont pour limite $\|\gamma'(t)\|$ quand h tend vers 0, on a le résultat. \square

3.1.1. Remarques.

1) On peut justifier intuitivement, à la manière des physiciens, la formule précédente. Pour un petit accroissement dt (infiniment petit si l'on veut) de la variable, au voisinage du point t , l'accroissement de $x(t)$ est voisin de $x'(t)dt$ et celui de $y(t)$ voisin de $y'(t)dt$. Si on assimile le morceau de courbe correspondant à un segment de droite, sa longueur, par Pythagore, vaut $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$. Pour avoir la longueur de la courbe toute entière il faut faire la somme de ces petites longueurs infinitésimales, somme généralisée s'entend, c'est-à-dire l'intégrale et c'est bien ce qu'on a fait.

2) Ce qui précède vaut encore pour des courbes C^1 par morceaux.

3) Tous ces résultats sont valables dans un espace euclidien de dimension finie.

4. LONGUEUR DU CERCLE ET DES ARCS DE CERCLE

On suppose qu'on a choisi un repère orthonormé direct de E ce qui permet d'identifier E à \mathbb{R}^2 voire à \mathbb{C} . On note \mathbb{U} le cercle unité et on en considère le paramétrage donné par l'exponentielle : $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ sur $[0, 2\pi]$.

4.1. Théorème. Avec le paramétrage ci-dessus, la longueur du cercle unité est égale à 2π . La longueur de l'arc image de l'intervalle $[t_1, t_2] \subset [0, 2\pi]$ (avec $t_1 < t_2$) est égale à $t_2 - t_1$.

Démonstration. On a $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = \cos t$, d'où $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ et le résultat vient de 3.1. \square

4.1.1. Corollaire. La longueur d'un cercle de rayon R est égale à $2\pi R$.

RÉFÉRENCES

[Ar] Arzac G., *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, IREM de Lyon, 1998.

[Au] Audin M., *Géométrie*, Belin, 1998.

[B] Bkouche R., *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.

[CF] Cousin-Fauconnet A., *Enseigner la géométrie au collège*, A. Colin, 1995.

[D] Dieudonné J., *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1968.

[DPR] Duperret J.-C., Perrin D., Richeton J.-P., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bulletin de l'APMEP, 435 octobre 2001.

[GA] David M.-C., Haglund F., Perrin D., *Polycopié de géométrie affine*, Orsay, 1999-2000.

[Ha] Hartshorne R., *Geometry : Euclide and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[Hi] Hilbert D., *Les fondements de la géométrie*, Dunod, 1971.

[Le] Lebesgue H., *La mesure des grandeurs*, Blanchard, 1975.

[Li] Lion G., *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

[P1] Perrin D., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, novembre 2000.

[P2] Perrin D., *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations*, Colloque Inter-IREM premier cycle, Montpellier, juin 2001.

[P3] Perrin D., *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[PG] Perrin-Glorian M.-J., *Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires*. Actes de la 11ème École d'été de didactique des mathématiques, Corps, août 2001.

[R] *Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.

Pour les annexes, voir le site Internet de la SMF :

<http://www.emath.fr/Serveur/Smf/smf.emath.fr/Enseignements>